

東海大学大学院令和6年度博士論文

正規分布に従うデータに対する
群逐次検定の応用に関する研究

池谷 利治

目次

1	序論	3
1.1	研究の背景	3
1.2	各章の構成について	3
1.3	2 標本の仮説検定	4
1.3.1	検定統計量	4
1.3.2	有意水準と棄却限界値	4
1.3.3	決定規則	5
1.3.4	検出力	5
1.3.5	必要標本サイズ	6
1.3.6	シミュレーションと数値例	6
1.3.6.1	帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ の下でのシミュレーション	6
1.3.6.2	対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ の下でのシミュレーション	7
1.3.6.3	対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ の下での標本サイズ設計とシミュレーション	9
1.4	群逐次検定	10
1.4.1	検定統計量	11
1.4.2	有意水準と棄却限界値	12
1.4.2.1	Pocock(1977)	13
1.4.2.2	O'Brien & Fleming(1979)	13
1.4.2.3	Lan & DeMets(1983)	14
1.4.2.4	各手法の比較	15
1.4.3	決定規則	17
1.4.4	検出力	17
1.4.5	必要標本サイズ	18
1.4.6	シミュレーションと数値例	19
1.4.6.1	帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ の下でのシミュレーション	19
1.4.6.2	対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ の下でのシミュレーション	20
1.4.6.3	対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ の下での標本サイズ設計とシミュレーション	26
2	線形傾向を検出するための逐次検定	33
2.1	検定統計量	33
2.2	有意水準と棄却限界値	36
2.3	決定規則	41
2.4	検出力	42
2.5	必要標本サイズ	43
2.6	シミュレーションと数値例	43
2.6.1	帰無仮説 $H_0^{(3)}: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = 0$ の下でのシミュレーション	43
2.6.2	対立仮説 $H_1^{(3)}: \sum_{i=1}^5 a_{3i}\mu_i > 0$ の下でのシミュレーション	44
2.6.3	対立仮説 $H_1^{(3)}: \sum_{i=1}^5 a_{3i}\mu_i > 0$ の下での標本サイズ設計とシミュレーション	52
2.7	事例研究	56
3	母平均の差を累積した逐次型多重比較法	58
3.1	検定統計量	58
3.2	有意水準と棄却限界値	61
3.3	決定規則	65
3.4	検出力	66
3.5	必要標本サイズ	67
3.6	シミュレーションと数値例	67
3.6.1	帰無仮説 $H_0^{(5)}: \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = \theta_5 = 0$ の下でのシミュレーション	67
3.6.2	対立仮説 $H_1^{(5)}: \sum_{j=1}^5 \theta_j \neq 0$ の下でのシミュレーション	68
3.6.3	対立仮説 $H_1^{(5)}: \sum_{j=1}^k \theta_j \neq 0$ の下での標本サイズ設計とシミュレーション	79
3.7	事例研究	83
4	ソフトウェア R による多重数値積分	85

4.1 多重数値積分に用いるパッケージと関数	85
4.2 計算精度と計算時間	86
5 まとめと展望	98
謝辞	99
参考文献	100
業績一覧	102

1 序論

1.1 研究の背景

正規分布に従うデータにおいて、母平均がある比較基準と差があるかどうか、または2群間の母平均に差があるかどうか興味があるときには、その検証に仮説検定を行うことがある。この仮説検定は母分散 σ^2 が既知の場合は、標準正規分布を用いた仮説検定 (Z 検定などとも呼ばれる) が用いられるが、母分散 σ^2 が既知の場合は稀なため、母分散 σ^2 が未知の場合は t 検定が用いられる。仮説検定では母平均に差がないにもかかわらず、差があると誤った判断をする確率を有意水準 α と呼び、この確率を一定以下に抑える必要があり、一般的には有意水準 α を 0.05 以下とすることが多い。また、2群間ではなく3群以上の多群間の母平均の比較に興味がある場合は、有意水準 α が 0.05 よりも大きくなることを防ぐ目的で多重比較法が用いられる。例えば、A, B, C の3群間での母平均の比較の組み合わせは A-B, B-C, C-A の3通りで、2群間の母平均の差の検定を有意水準 $\alpha = 0.05$ で繰り返すとすると、このとき、すべての群間で母平均に差がない下で、いずれか1つ以上の群の組み合わせで仮説検定によって母平均に差があると誤って判断する確率は、 $1 - 0.95^3 = 0.143$ と有意水準 α は 0.05 を上回ることになってしまう。厳密には検定統計量の相関を考える必要があり、シミュレーションなどによりこの確率を確認すると 0.122 ほどとなり、0.143 より小さくなるが 0.05 を上回る。この問題を解決するために考えられた手法が多重比較法であり、例のようなすべての群間の母平均の比較を目的に仮説検定を行う場合の多重比較法として Tukey(1953) の方法がある。この他に代表手法として、A, B, C の3群において A-B, A-C と言うような特定の群とその他の群間で母平均の比較を目的に仮説検定を行う多重比較法として Dunnett(1955) の方法があり、群数と比較の組み合わせを考慮して有意水準 α が 0.05 よりも大きくならないように調整されている。

多重比較は多群間での母平均の比較の繰り返しであったが、2群間で母平均の比較を繰り返すこともある。医薬品の開発などでは、臨床試験の途中段階の事前に計画で決められた試験参加者数の評価が揃った時点で、母平均に差があるかどうかの仮説検定を実施し、2群間で差が認められた場合は計画に則り途中で臨床試験を中止し、差が認められない場合は計画に則り臨床試験を継続するような群逐次検定と呼ばれる中間解析が用いられることがある。群逐次検定も多重比較同様に通常の2群間の母平均の比較を繰り返すと有意水準 α が 0.05 よりも大きくなるため、有意水準 α が 0.05 を超えないように工夫する必要があり、Armitage *et al.*(1969) は有意水準 α を考慮した繰り返し検定、Pocock(1977) および O'Brien & Fleming(1979) は、試験全体の有意水準 α を保つための群逐次検定を提案している。また、Lan & DeMets(1983) は、複数回の検定を行うに際して、各回の検定に有意水準 α をどのように割り振りかを決める α 消費関数を用いた群逐次検定を提案している。この群逐次検定は試験の途中段階で中止するも可能とすることをあらかじめ計画に盛り込むことで、試験の途中段階での意思決定が可能となり、試験参加者や対象となる標本を少なくすることができる有益な手法である。

このように母平均の差を検出するために多群間での比較または2群間での複数回の比較を行う場合は有意水準 α の調整が必要となるが、母平均の比較の仮説やデータ収集のデザインによってその調整方法は考える必要がある。今回、次の2つの仮説およびデータ収集デザインに対して群逐次検定を応用して、途中段階で意思決定が可能となる統計解析手法を提案する。

- 用量反応試験をイメージした用量の変化に伴い、母平均に線形的な傾向があるかどうかの仮説に対して、試験の途中段階で意思決定が可能なデザイン
- 2群間で複数の調査項目での母平均の比較において、各調査項目の母平均の差の累積が等しいかどうかの仮説に対して、試験の途中段階で意思決定が可能なデザイン

これらの提案手法は群逐次検定と同様に、試験の途中段階で意思決定が可能となり、有益と考える。

1.2 各章の構成について

第1章の次節以降では、本研究の対象となる正規分布に従うデータに対する母平均の差の仮説検定に関して、2標本での母分散 σ^2 が既知の場合の検定および群逐次検定を紹介する。各仮説検定では有意水準 α を満たす棄却限界値の決定方法、検出力 $1 - \beta$ および標本サイズの決定方法を紹介し、正規乱数によるモンテカルロシミュレーションによりこれらの挙動を示す。

第2章では、提案手法の1つ目である用量反応試験をイメージした母平均に線形的な傾向があるかどうかの仮説に対する逐次検定を提案する。この提案手法の統計学的な検定統計量導出、有意水準 α の調整方法、決定規則、検出力 $1 - \beta$ および標本サイズの決定方法を示す。また、正規乱数によるモンテカルロシミュレーションや数値例を用いてこれらの挙動を示すと同時に事例研究を示す。

第3章では、提案手法の2つ目である2群間の母平均の差を累積した逐次型多重比較法を提案する。1つ目の提案手法と同様に、この提案手法の統計学的な検定統計量導出、有意水準 α の調整方法、決定規則、検出力 $1 - \beta$ および標本サイズの決定方法を示し、正規乱数によるモンテカルロシミュレーションや数値例を用いてこれらの挙動を示すと同時に事例研究を示す。

第4章では、多重比較や群逐次検定で必要となる多重数値積分に関して、ソフトウェアRを使った多重数値積分の計算方法を紹介し、第3章で提案した2群間の母平均の差を累積した逐次型多重比較法を例に多重数値積分の計算方法、計算時間および計算精度を評価した結果を示す。

1.3 2標本の仮説検定

いま、2群において各群 n 個の反応データ $x_{11}, \dots, x_{1n}, x_{21}, \dots, x_{2n}$ が2群間および群内で互いに独立で、それぞれ $N(\mu_1, \sigma^2)$ および $N(\mu_2, \sigma^2)$ に従うと仮定し、2群間(2標本間)の母平均が異なるかどうかを検証することを考える。

表 1.1: 2群間の母平均の比較に用いる反応データの概要

群 i	標本サイズ n	反応データ x_{ij}	母平均 μ_i	母分散 σ^2
1	n	$x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}$	μ_1	σ^2
2	n	$x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}$	μ_2	σ^2

このとき、母分散が既知の場合は正規分布を用いた2標本の仮説検定、母分散が未知の場合は t 分布を用いた2標本 t 検定が使われる。ここでは母分散が既知の検定における仮説、検定統計量、有意水準とそれに伴い決められる棄却限界値、決定規則、検出力および検出力を保つための標本サイズの決め方を説明する。有意水準、検出力および標本サイズについては、正規乱数を用いたモンテカルロシミュレーションを行い、理論値と実際に仮説検定を行った結果が同様の傾向を示すことを確認する。

1.3.1 検定統計量

群を $i = 1, 2$ 、反応データの標本サイズを n としたとき、確率変数 $X_{1j}, X_{2j} (j = 1, \dots, n)$ が独立にそれぞれ同一の $N(\mu_1, \sigma^2), N(\mu_2, \sigma^2)$ の正規分布に従うとき、2つの母平均 μ_1 と μ_2 が等しいとする帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ (または $\mu_2 - \mu_1 = 0$) と2つの母平均 μ_1 と μ_2 が異なるとする対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ (または $\mu_2 - \mu_1 \neq 0$) の2つの仮説を用いて仮説検定を行う。

帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ または $\mu_2 - \mu_1 = 0$ 、対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ または $\mu_2 - \mu_1 \neq 0$ 。

標本平均 $\bar{X}_1 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{1j}, \bar{X}_2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{2j}$ は、それぞれ $N(\mu_1, \frac{\sigma^2}{n}), N(\mu_2, \frac{\sigma^2}{n})$ の正規分布に従うことから、標本平均の差 $\bar{X}_2 - \bar{X}_1$ は $N(\mu_2 - \mu_1, \frac{2\sigma^2}{n})$ の正規分布に従う。ここで $Z = (\bar{X}_2 - \bar{X}_1) / \sqrt{2\sigma^2/n}$ とすると Z は次の正規分布に従う。

$$\begin{aligned} Z &= \frac{\bar{X}_2 - \bar{X}_1}{\sqrt{\frac{2\sigma^2}{n}}} \\ &= \sqrt{\frac{n}{2}} \cdot \frac{\bar{X}_2 - \bar{X}_1}{\sigma} \sim N\left(\sqrt{\frac{n}{2}} \cdot \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sigma}, 1\right). \end{aligned} \quad (1.1)$$

帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ の下で、 Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うことから、 Z を検定統計量とする。

1.3.2 有意水準と棄却限界値

両側有意水準 α は帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ の下、仮説検定によって帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ を棄却する確率であり、第1種の過誤の確率やタイプ I エラー率などとも呼ばれる。両側有意水準 α 、帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ を棄却するための棄却限界値 $b (b \geq 0)$ には次式の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} \alpha &= \Pr(Z < -b | H_0) + \Pr(Z > b | H_0) \\ &= \int_{-\infty}^{-b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \int_b^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \Phi(-b) + \{1 - \Phi(b)\} \\ &= 1 - \Phi(b) + \Phi(-b). \end{aligned} \quad (1.2)$$

ここで $\Phi(x)$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ の分布関数である。また, (1.2) 式は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned}\alpha &= \Pr(Z < -b|H_0) + \Pr(Z > b|H_0) \\ &= 1 - \int_{-b}^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= 1 - \{\Phi(b) - \Phi(-b)\} \\ &= 1 - \Phi(b) + \Phi(-b).\end{aligned}$$

正規分布は左右対称の分布であり, $1 - \Phi(b) = \Phi(-b)$ であることから, 両側有意水準 α と棄却限界値 b の関係は次式のように表すことができる。

$$\begin{aligned}\alpha &= \Pr(Z < -b|H_0) + \Pr(Z > b|H_0) \\ &= 2\Pr(|Z| > b|H_0) \\ &= 2\{1 - \Phi(b)\}.\end{aligned}$$

このことから棄却限界値 b は次式を解くことで求めることができる。

$$b = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

ここで $\Phi^{-1}(z)$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ の分布関数の逆関数である。両側有意水準 α は一般的に 0.05 を用いるが, 0.01, 0.05, 0.10 の棄却限界値 b を計算した結果を表 1.2 に示す。

表 1.2: 母分散既知の母平均の差の検定における両側有意水準 α と棄却限界値 b

両側有意水準 α	棄却限界値 b
0.01	2.5758
0.05	1.9600
0.10	1.6449

仮説検定には, 事前に設定した両側有意水準 α に対応した棄却限界値 b を用いる。

1.3.3 決定規則

この検定では 2 群における群間および群内で互いに独立な n 個の反応データ $x_{11}, \dots, x_{1n}$ と $x_{21}, \dots, x_{2n}$ から検定統計量 Z の実現値 z を求め, 事前に決めた両側有意水準 α に対応した棄却限界値 b を用いて, 以下のように判断する。

- $|z| > b$ ならば, 帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ を棄却し, 母平均 μ_1 と μ_2 は異なるとして, 検定を終了する。
- $|z| \leq b$ ならば, 帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ を受容し, 母平均 μ_1 と μ_2 は異なるとは言えないとして, 検定を終了する。

1.3.4 検出力

検出力は対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ の下, 次式で示す帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ を棄却する確率であり, $1 - \beta$ と表す。

$$\begin{aligned}1 - \beta &= \Pr(Z < -b|H_1) + \Pr(Z > b|H_1) \\ &= 1 - \Pr(-b \leq Z \leq b|H_1)\end{aligned}\tag{1.3}$$

なお, β は対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ の下, 仮説検定で帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ を棄却できない確率であり, 第 2 種の過誤の確率やタイプ II エラー率などと呼ばれる。仮説検定では十分な検証を可能とするため, 検出力を 0.80 や 0.90 と言った高い確率にすることが求められる。検出力 $1 - \beta$ の計算のために対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ の下での検定統計量 Z の分布を考える。2 群間の母平均の差を $\delta = \mu_2 - \mu_1$ とすると, 検定統計量 Z は, (1.1) 式より次のようになる。

$$Z = \sqrt{\frac{n}{2}} \cdot \frac{\bar{X}_2 - \bar{X}_1}{\sigma} \sim N\left(\sqrt{\frac{n}{2}} \cdot \frac{\delta}{\sigma}, 1\right).$$

これは標準正規分布 $N(0, 1)$ から母平均が $\sqrt{n/2} \cdot \delta/\sigma$ だけズレていることを意味している。この $N(\sqrt{n/2} \cdot \delta/\sigma, 1)$ の正規分布の下, 図 1.1 で示した (1.3) 式の確率を次式で求めることができる。

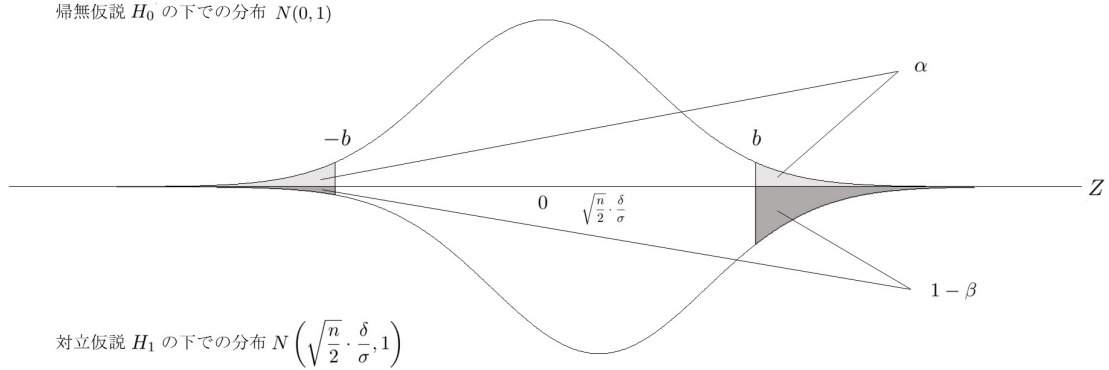


図 1.1: 帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ の下での有意水準と対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ の下での検出力の関係

$$\begin{aligned}
 1 - \beta &= \Pr(Z < -b | H_1) + \Pr(Z > b | H_1) \\
 &= \int_{-\infty}^{-b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - \sqrt{\frac{n}{2}} \cdot \frac{\delta}{\sigma})^2}{2}} dx + \int_b^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - \sqrt{\frac{n}{2}} \cdot \frac{\delta}{\sigma})^2}{2}} dx \\
 &= 1 - \int_{-b}^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - \sqrt{\frac{n}{2}} \cdot \frac{\delta}{\sigma})^2}{2}} dx.
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

実際の検出力 $1 - \beta$ の計算には, 両側有意水準 α , 棄却限界値 b , 2 群間の母平均の差 δ の想定値, 既知の母分散 σ^2 , 各群の標本サイズ n が必要となる。

1.3.5 必要標本サイズ

この仮説検定の対象となるデータの収集計画を立てるとき, 両側有意水準 α および検出力 $1 - \beta$ を考慮した各群の標本サイズ n を決める必要があり, その手順を以下に示す。

1. 両側有意水準 α , 棄却限界値 b , 目標とする検出力 $1 - \beta$ を決める。
2. 2 群間の母平均の差の想定値を $\delta_0 = \mu_2 - \mu_1$ とする。
3. 各群の仮の標本サイズ $n_0 = 2$ を与える。
4. 両側有意水準 α , 棄却限界値 b , 各群の仮の標本サイズ n_0 , 2 群間の母平均の差の想定値 δ_0 , 既知の母分散 σ^2 を用いて (1.4) 式より算出した検出力を $1 - \beta_0$ とする。
5. $1 - \beta_0 < 1 - \beta$ なら各群の仮の標本サイズ $n_0 = n_0 + 1$ として手順 4. に戻り, $1 - \beta_0 \geq 1 - \beta$ ならば n_0 を各群の標本サイズ n とする。

1.3.6 シミュレーションと数値例

1.3.6.1 帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ の下でのシミュレーション

この仮説検定において帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = 0$, 既知の母分散 $\sigma^2 = 1.0$ の下で, いくつかの各群の標本サイズ n のパターンで $N(0, 1)$ の正規分布に従う正規乱数を各群 n 個発生させ, 両側有意水準 $\alpha = 0.05$ で仮説検定を行うシミュレーションを行う。シミュレーション回数に対して帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ を棄却した割合から両側有意水準 α が設定通りになっているか評価した結果を表 1.3 に示す。

表 1.3: 帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = 0$ の下でのシミュレーション結果
両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$

標本サイズ/群 n	シミュレーション 回数	帰無仮説 H_0 を棄却	
		回数	割合
5	10000	459	0.0459
10	10000	479	0.0479
20	10000	513	0.0513
30	10000	460	0.0460
40	10000	513	0.0513

表 1.3 に示した結果から帰無仮説 H_0 の下では, 各群の標本サイズ n によらず両側有意水準 α が保たれていることがわかる.

1.3.6.2 対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ の下でのシミュレーション

次に 2 群間の母平均の差 δ を 0.1 から 0.1 ごとに 1.0 までとする対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$, 既知の母分散 $\sigma^2 = 1.0$ の下で, いくつかの各群の標本サイズ n のパターンに対する両側有意水準 $\alpha = 0.05$ としたときの検出力 $1 - \beta$ を計算した結果を示す. また, 群 1 および群 2 でそれぞれ $N(\mu_1, 1), N(\mu_2, 1)$ の正規分布に従う正規乱数を各 n 個発生させ, 両側有意水準 $\alpha = 0.05$ で仮説検定を行うシミュレーションを行い, シミュレーション回数に対して帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ を棄却した割合から検出力 $1 - \beta$ と同様になっているか評価した結果を表 1.4 から 1.8 に示す.

表 1.4: 対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 (\mu_2 - \mu_1 = \delta)$ の下でのシミュレーション結果
両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 標本サイズ/群 $n = 5$

母平均		差	検出力	シミュレーション 回数	帰無仮説 H_0 を棄却	
μ_1	μ_2	δ	$1 - \beta$		回数	割合
0.0	0.1	0.1	0.0529	10000	536	0.0536
0.0	0.2	0.2	0.0615	10000	598	0.0598
0.0	0.3	0.3	0.0761	10000	764	0.0764
0.0	0.4	0.4	0.0969	10000	937	0.0937
0.0	0.5	0.5	0.1241	10000	1220	0.1220
0.0	0.6	0.6	0.1578	10000	1610	0.1610
0.0	0.7	0.7	0.1979	10000	1976	0.1976
0.0	0.8	0.8	0.2441	10000	2449	0.2449
0.0	0.9	0.9	0.2960	10000	2998	0.2998
0.0	1.0	1.0	0.3526	10000	3514	0.3514

表 1.5: 対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 (\mu_2 - \mu_1 = \delta)$ の下でのシミュレーション結果
 両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 標本サイズ/群 $n = 10$

母平均		差	検出力	シミュレーション	帰無仮説 H_0 を棄却	
μ_1	μ_2	δ	$1 - \beta$	回数	回数	割合
0.0	0.1	0.1	0.0557	10000	535	0.0535
0.0	0.2	0.2	0.0732	10000	735	0.0735
0.0	0.3	0.3	0.1029	10000	1024	0.1024
0.0	0.4	0.4	0.1455	10000	1488	0.1488
0.0	0.5	0.5	0.2010	10000	2077	0.2077
0.0	0.6	0.6	0.2687	10000	2630	0.2630
0.0	0.7	0.7	0.3467	10000	3444	0.3444
0.0	0.8	0.8	0.4322	10000	4297	0.4297
0.0	0.9	0.9	0.5210	10000	5291	0.5291
0.0	1.0	1.0	0.6088	10000	6069	0.6069

表 1.6: 対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 (\mu_2 - \mu_1 = \delta)$ の下でのシミュレーション結果
 両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 標本サイズ/群 $n = 20$

母平均		差	検出力	シミュレーション	帰無仮説 H_0 を棄却	
μ_1	μ_2	δ	$1 - \beta$	回数	回数	割合
0.0	0.1	0.1	0.0615	10000	600	0.0600
0.0	0.2	0.2	0.0969	10000	977	0.0977
0.0	0.3	0.3	0.1578	10000	1563	0.1563
0.0	0.4	0.4	0.2441	10000	2499	0.2499
0.0	0.5	0.5	0.3526	10000	3530	0.3530
0.0	0.6	0.6	0.4751	10000	4771	0.4771
0.0	0.7	0.7	0.6001	10000	5986	0.5986
0.0	0.8	0.8	0.7156	10000	7171	0.7171
0.0	0.9	0.9	0.8122	10000	8161	0.8161
0.0	1.0	1.0	0.8854	10000	8837	0.8837

表 1.7: 対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 (\mu_2 - \mu_1 = \delta)$ の下でのシミュレーション結果
 両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 標本サイズ/群 $n = 30$

母平均		差	検出力	シミュレーション	帰無仮説 H_0 を棄却	
μ_1	μ_2	δ	$1 - \beta$	回数	回数	割合
0.0	0.1	0.1	0.0674	10000	715	0.0715
0.0	0.2	0.2	0.1211	10000	1249	0.1249
0.0	0.3	0.3	0.2133	10000	2143	0.2143
0.0	0.4	0.4	0.3408	10000	3448	0.3448
0.0	0.5	0.5	0.4907	10000	4995	0.4995
0.0	0.6	0.6	0.6420	10000	6393	0.6393
0.0	0.7	0.7	0.7737	10000	7788	0.7788
0.0	0.8	0.8	0.8725	10000	8697	0.8697
0.0	0.9	0.9	0.9365	10000	9385	0.9385
0.0	1.0	1.0	0.9721	10000	9724	0.9724

表 1.8: 対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 (\mu_2 - \mu_1 = \delta)$ の下でのシミュレーション結果
両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 標本サイズ/群 $n = 40$

母平均		差	検出力	シミュレーション	帰無仮説 H_0 を棄却	
μ_1	μ_2	δ	$1 - \beta$	回数	回数	割合
0.0	0.1	0.1	0.0732	10000	684	0.0684
0.0	0.2	0.2	0.1455	10000	1447	0.1447
0.0	0.3	0.3	0.2687	10000	2696	0.2696
0.0	0.4	0.4	0.4322	10000	4270	0.4270
0.0	0.5	0.5	0.6088	10000	6055	0.6055
0.0	0.6	0.6	0.7653	10000	7688	0.7688
0.0	0.7	0.7	0.8791	10000	8771	0.8771
0.0	0.8	0.8	0.9471	10000	9457	0.9457
0.0	0.9	0.9	0.9805	10000	9797	0.9797
0.0	1.0	1.0	0.9940	10000	9927	0.9927

表 1.4 から 1.8 に示した結果から次のことがわかる.

- シミュレーションによる帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ を棄却する割合から検出力 $1 - \beta$ は保たれている.
- 各群の標本サイズ n を固定した場合, 2 群間の母平均の差 δ が大きくなるにつれて検出力 $1 - \beta$ は高くなる.
- 2 群間の母平均の差 δ を固定した場合, 標本サイズ n が増加するにつれて検出力 $1 - \beta$ は高くなる.

1.3.6.3 対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ の下での標本サイズ設計とシミュレーション

最後に 2 群間の母平均の差 δ を 0.1 から 0.1 ごとに 1.0 までとする対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$, 既知の母分散 $\sigma^2 = 1.0$ の下で, 両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 検出力 $1 - \beta = 0.80, 0.90$ を満たす各群の標本サイズ n を計算した結果を示す. また, 群 1 および群 2 でそれぞれ $N(\mu_1, 1), N(\mu_2, 1)$ の正規分布に従う正規乱数を各 n 個発生させ, 両側有意水準 $\alpha = 0.05$ で仮説検定を行うシミュレーションを行い, シミュレーション回数に対して帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ を棄却した割合が検出力 $1 - \beta$ と同様になっているか評価した結果を表 1.9 および 1.10 に示す.

表 1.9: 対立仮説 $H_1: \mu_1 = \mu_2 \neq 0 (\mu_2 - \mu_1 = \delta)$ の下での標本サイズ n /群とシミュレーション結果
両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 検出力 $1 - \beta = 0.80$

母平均		差	標本サイズ/群	シミュレーション	帰無仮説 H_0 を棄却	
μ_1	μ_2	δ	n	回数	回数	割合
0.0	0.1	0.1	1570	10000	7919	0.7919
0.0	0.2	0.2	393	10000	7999	0.7999
0.0	0.3	0.3	175	10000	7949	0.7949
0.0	0.4	0.4	99	10000	8032	0.8032
0.0	0.5	0.5	63	10000	7928	0.7928
0.0	0.6	0.6	44	10000	8040	0.8040
0.0	0.7	0.7	33	10000	8090	0.8090
0.0	0.8	0.8	25	10000	8047	0.8047
0.0	0.9	0.9	20	10000	8146	0.8146
0.0	1.0	1.0	16	10000	8056	0.8056

表 1.10: 対立仮説 $H_1: \mu_1 = \mu_2 \neq 0 (\mu_2 - \mu_1 = \delta)$ の下での標本サイズ n /群とシミュレーション結果
両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 検出力 $1 - \beta = 0.90$

母平均		差	標本サイズ/群	シミュレーション	帰無仮説 H_0 を棄却	
μ_1	μ_2	δ	n	回数	回数	割合
0.0	0.1	0.1	2102	10000	9013	0.9013
0.0	0.2	0.2	526	10000	9030	0.9030
0.0	0.3	0.3	234	10000	9047	0.9047
0.0	0.4	0.4	132	10000	9005	0.9005
0.0	0.5	0.5	85	10000	9025	0.9025
0.0	0.6	0.6	59	10000	9047	0.9047
0.0	0.7	0.7	43	10000	8970	0.8970
0.0	0.8	0.8	33	10000	9054	0.9054
0.0	0.9	0.9	26	10000	8998	0.8998
0.0	1.0	1.0	22	10000	9113	0.9113

表 1.9 および 1.10 の結果から次のことがわかる.

- 仮説検定で帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ を棄却する割合から検出力 $1 - \beta$ は保たれている.
- 2 群間の母平均の差を δ が小さくなるにつれて, 検出力 $1 - \beta$ を満たす各群の標本サイズ n は大きくなる.
- 2 群間の母平均の差 δ を固定した場合, 検出力 $1 - \beta$ が高いと各群の標本サイズ n が大きくなる.

1.4 群逐次検定

群逐次検定は, 臨床試験などの場面で 2 群間の母平均に差があるかどうかに興味があるときに利用する中間解析の手法の 1 つである. 事前に決められた標本の収集と仮説検定の計画に基づいて, 標本収集とその時点までに収集された標本に対して仮説検定することを繰り返し, 試験の途中段階で 2 群間の母平均に差があると判断された場合はその時点で試験を終了する. 臨床試験では試験参加者の保護などの倫理的な観点から検証に必要な試験参加者数を最小限に抑えることが求められ, 試験の途中で治療効果による差が確認できた場合にその時点で試験を終了することは有益である. また, 群逐次検定は計画された標本サイズを集めて 1 度だけ仮説検定を行う場合に比べ, 平均的に必要となる標本サイズを小さくすることが可能となる. 群逐次検定や多重比較などの仮説検定を繰り返す手法においては, 仮説検定 1 回あたりの有意水準を調整して試験全体の有意水準を保つ必要がある. 例えば 1 回あたりの有意水準を $\alpha = 0.05$ として, 母平均に差がない下で 2 母集団から標本をそれぞれ独立に収集して仮説検定を繰り返すことを 2 回行くと, 2 回を通じた有意水準をいずれかの仮説検定で有意差ありと判断される確率とすると $\alpha = 1 - (1 - 0.05)^2 = 0.0975$ となり, 仮説検定を繰り返すことで有意水準は膨らんでしまうことがわかる. 群逐次検定は, この仮説検定を繰り返しても試験全体の有意水準 α が膨らまないよう構築されている. Armitage *et al.*(1969) は, 有意水準 α を考慮した繰り返し検定を提案している. Pocock(1977) および O'Brien & Fleming(1979) は, 試験全体の有意水準を α とするための各段階の棄却限界値 b_k を用いた群逐次検定を提案している. Lan & DeMets(1983) は, 有意水準 α を各段階に割り振るために各段階で消費する有意水準を決める α 消費関数として Normal 法, Log 法, α_t 法の 3 手法, 各段階に割り振られた有意水準に基づいた棄却限界値 b_k を用いた群逐次検定を提案している.

いま, 2 群において, K 回に分けて各群から m 個ずつの反応データを収集することを考える. このとき, $k(k = 1, \dots, K)$ 回目の反応データは $x_{1k1}, \dots, x_{1km}, x_{2k1}, \dots, x_{2km}$ とし, 2 群間および群内で互いに独立で, それぞれ $N(\mu_1, \sigma^2)$ および $N(\mu_2, \sigma^2)$ に従うと仮定し, 2 群間 (2 標本間) の母平均が異なるかどうかを逐次的に検証することを考える.

表 1.11: 2 群間の母平均を逐次的な比較に用いる反応データの概要

段階	群	標本サイズ	累積標本サイズ	反応データ	母平均	母分散
j	i	m	n_j	x_{ijh}	μ_i	σ^2
1	1	m	m	$x_{111}, x_{112}, \dots, x_{11m}$	μ_1	σ^2
	2	m	m	$x_{211}, x_{212}, \dots, x_{21m}$	μ_2	σ^2
2	1	m	$2m$	$x_{121}, x_{122}, \dots, x_{12m}$	μ_1	σ^2
	2	m	$2m$	$x_{221}, x_{222}, \dots, x_{22m}$	μ_2	σ^2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	1	m	km	$x_{1k1}, x_{1k2}, \dots, x_{1km}$	μ_1	σ^2
	2	m	km	$x_{2k1}, x_{2k2}, \dots, x_{2km}$	μ_2	σ^2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
K	1	m	Km	$x_{1K1}, x_{1K2}, \dots, x_{1Km}$	μ_1	σ^2
	2	m	Km	$x_{2K1}, x_{2K2}, \dots, x_{2Km}$	μ_2	σ^2

ここでは「1.3 2 標本の仮説検定」で説明した母分散 σ^2 が既知の場合の 2 標本の仮説検定を基にした群逐次検定を取り扱い、検定における仮説、検定統計量、有意水準とそれに伴い決められる棄却限界値、決定規則、検出力および検出力を保つための標本サイズの決め方を説明する。有意水準、検出力および標本サイズについては、Pocock(1977)、O'Brien & Fleming(1979) および Lan & DeMets(1983) が提案したそれぞれの手法に対して正規乱数を用いたモンテカルロシミュレーションを行い、理論値と実際に仮説検定を行った結果が同様の傾向を示すことを確認する。

1.4.1 検定統計量

群を $i = 1, 2$, 段階を $j = 1, \dots, K$, 反応データの標本サイズを m としたとき、確率変数 $X_{1jh}, X_{2jh} (j = 1, \dots, K, h = 1, \dots, m)$ が独立にそれぞれ同一の $N(\mu_1, \sigma^2), N(\mu_2, \sigma^2)$ の正規分布に従うとき、2 つの母平均 μ_1 と μ_2 が等しいとする帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ (または $\mu_2 - \mu_1 = 0$) と 2 つの母平均 μ_1 と μ_2 が異なる対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ (または $\mu_2 - \mu_1 \neq 0$) の 2 つの仮説を用いて仮説検定を行う。

帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ または $\mu_2 - \mu_1 = 0$, 対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ または $\mu_2 - \mu_1 \neq 0$.

$k (k = 1, \dots, K)$ 段階まで収集した各群の累積標本サイズ $n_k = km$ での標本平均 $\bar{X}_{1k} = \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^k \sum_{h=1}^m X_{1jh}$, $\bar{X}_{2k} = \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^k \sum_{h=1}^m X_{2jh}$ は、次式よりそれぞれ $N(\mu_1, \frac{\sigma^2}{n_k}), N(\mu_2, \frac{\sigma^2}{n_k})$ の正規分布に従う。

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^m X_{ijh} &\sim N(m\mu_i, m\sigma^2), \\ \sum_{j=1}^k \sum_{h=1}^m X_{ijh} &\sim N(km\mu_i, km\sigma^2) \equiv N(n_k\mu_i, n_k\sigma^2), \\ \bar{X}_{ik} &= \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^k \sum_{h=1}^m X_{ijh} \sim N(\mu_i, \frac{\sigma^2}{n_k}), i = 1, 2. \end{aligned}$$

このことから $k (k = 1, \dots, K)$ 段階での標本平均の差 $\bar{X}_{2k} - \bar{X}_{1k}$ は $N(\mu_2 - \mu_1, \frac{2\sigma^2}{n_k})$ の正規分布に従い、 $Z_k = (\bar{X}_{2k} - \bar{X}_{1k}) / \sqrt{2\sigma^2/n_k}$ は次の正規分布に従う。

$$\begin{aligned} Z_k &= \frac{\bar{X}_{2k} - \bar{X}_{1k}}{\sqrt{\frac{2\sigma^2}{n_k}}} \\ &= \sqrt{\frac{n_k}{2}} \cdot \frac{\bar{X}_{2k} - \bar{X}_{1k}}{\sigma} \sim N\left(\sqrt{\frac{n_k}{2}} \cdot \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sigma}, 1\right). \end{aligned} \tag{1.5}$$

帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ の下で、 Z_k は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うことから、 Z_k を $k (k = 1, \dots, K)$ 段階での検定統計量とする。

なお, 検定統計量 $Z_k (k = 1, \dots, K)$ はそれぞれ正規分布に従うことから $\mathbf{Z}_K = (Z_1, \dots, Z_K)'$ は K 変量正規分布に従うため, 平均ベクトル $\boldsymbol{\mu}_K$, 分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}_K$ を考える.

平均ベクトル $\boldsymbol{\mu}_K$ は, (1.5) 式より次式となる.

$$\boldsymbol{\mu}_K = \begin{pmatrix} \sqrt{n_1/2}(\mu_2 - \mu_1)/\sigma \\ \sqrt{n_2/2}(\mu_2 - \mu_1)/\sigma \\ \vdots \\ \sqrt{n_{K-1}/2}(\mu_2 - \mu_1)/\sigma \\ \sqrt{n_K/2}(\mu_2 - \mu_1)/\sigma \end{pmatrix} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{2}\sigma} \begin{pmatrix} \sqrt{n_1} \\ \sqrt{n_2} \\ \vdots \\ \sqrt{n_{K-1}} \\ \sqrt{n_K} \end{pmatrix}.$$

検定統計量 $Z_k, Z_l (k < l)$ の共分散は次式となる.

$$\text{Cov}(Z_k, Z_l) = \sqrt{\frac{k}{l}}, k < l.$$

このことから分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}_K$ は次式となる.

$$\boldsymbol{\Sigma}_K = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\frac{1}{2}} & \cdots & \sqrt{\frac{1}{K-1}} & \sqrt{\frac{1}{K}} \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & 1 & \cdots & \sqrt{\frac{2}{K-1}} & \sqrt{\frac{2}{K}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sqrt{\frac{1}{K-1}} & \sqrt{\frac{2}{K-1}} & \cdots & 1 & \sqrt{\frac{K-1}{K}} \\ \sqrt{\frac{1}{K}} & \sqrt{\frac{2}{K}} & \cdots & \sqrt{\frac{K-1}{K}} & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

以上より検定統計量ベクトル $\mathbf{Z}_K$ は, 以下の平均ベクトル $\boldsymbol{\mu}_K$, 分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}_K$ の K 変量正規分布に従う.

$$\mathbf{Z}_K \sim N_K(\boldsymbol{\mu}_K, \boldsymbol{\Sigma}_K),$$

$$\boldsymbol{\mu}_K = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{2}\sigma} \begin{pmatrix} \sqrt{n_1} \\ \sqrt{n_2} \\ \vdots \\ \sqrt{n_{K-1}} \\ \sqrt{n_K} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\Sigma}_K = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\frac{1}{2}} & \cdots & \sqrt{\frac{1}{K-1}} & \sqrt{\frac{1}{K}} \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & 1 & \cdots & \sqrt{\frac{2}{K-1}} & \sqrt{\frac{2}{K}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sqrt{\frac{1}{K-1}} & \sqrt{\frac{2}{K-1}} & \cdots & 1 & \sqrt{\frac{K-1}{K}} \\ \sqrt{\frac{1}{K}} & \sqrt{\frac{2}{K}} & \cdots & \sqrt{\frac{K-1}{K}} & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

また, 帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ の下で, 検定統計量ベクトル $\mathbf{Z}_K$ は, 以下の平均ベクトル $\mathbf{0}$, 分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}_K$ の K 変量正規分布に従う.

$$\mathbf{Z}_K|H_0 \sim N_K(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_K), \boldsymbol{\Sigma}_K = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\frac{1}{2}} & \cdots & \sqrt{\frac{1}{K-1}} & \sqrt{\frac{1}{K}} \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & 1 & \cdots & \sqrt{\frac{2}{K-1}} & \sqrt{\frac{2}{K}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sqrt{\frac{1}{K-1}} & \sqrt{\frac{2}{K-1}} & \cdots & 1 & \sqrt{\frac{K-1}{K}} \\ \sqrt{\frac{1}{K}} & \sqrt{\frac{2}{K}} & \cdots & \sqrt{\frac{K-1}{K}} & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

1.4.2 有意水準と棄却限界値

群逐次検定では, 最大で事前に決めた K 回の検定を繰り返すことから, 帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ の下, $Z_1, \dots, Z_K$ を各段階での検定統計量, $b_1, \dots, b_K$ を各段階で用いる棄却限界値とすると両側有意水準 α は次式の確率となる.

$$\begin{aligned} \alpha &= \Pr(|Z_1| > b_1 | H_0) + \Pr(|Z_1| \leq b_1, |Z_2| > b_2 | H_0) \\ &\quad + \cdots + \Pr(|Z_1| \leq b_1, \dots, |Z_{k-1}| \leq b_{k-1}, |Z_k| > b_k | H_0) \\ &\quad + \cdots + \Pr(|Z_1| \leq b_1, \dots, |Z_{K-1}| \leq b_{K-1}, |Z_K| > b_K | H_0) \end{aligned} \quad (1.9)$$

ここで $\Pr(|Z_1| \leq b_1, \dots, |Z_{k-1}| \leq b_{k-1}, |Z_k| > b_k | H_0)$ は, $k-1$ 段階までは帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ を棄却せず, k 段階で初めて棄却する確率を α_k^* , k 段階までに帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ を棄却する確率を α_k とすると次の関係が成り立つ.

$$\alpha_k = \alpha_1^* + \alpha_2^* + \dots + \alpha_k^*. \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \alpha_K &= \sum_{k=1}^K \alpha_k^* \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

また, (1.9) 式は次のように表すことができる.

$$\alpha = 1 - \Pr(|Z_1| \leq b_1, \dots, |Z_{K-1}| \leq b_{K-1}, |Z_K| \leq b_K | H_0).$$

この両側有意水準 α は, 帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ の下, $\mathbf{Z}_K = (Z_1, \dots, Z_K)'$ の同時分布を用いて次式のように計算する.

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - \Pr(|Z_1| \leq b_1, \dots, |Z_{K-1}| \leq b_{K-1}, |Z_K| \leq b_K | H_0) \\ &= 1 - \int_{-b_K}^{b_K} \int_{-b_{K-1}}^{b_{K-1}} \dots \int_{-b_1}^{b_1} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^K |\Sigma_K|}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{Z}'_K \Sigma_K^{-1} \mathbf{Z}_K} dz_1 \dots dz_{K-1} dz_K. \end{aligned}$$

ここで Σ_K は (1.6) 式で示した分散共分散行列である. この両側有意水準 α を満たす各段階で用いる棄却限界値 $b_1, \dots, b_K$ を多重積分で求めるが, Pocock(1977), O'Brien & Fleming(1979) および Lan & DeMets(1983) の棄却限界値 $b_1, \dots, b_K$ の設定方法を次に紹介する.

1.4.2.1 Pocock(1977)

Pocock(1977) では, 各段階で用いる棄却限界値 $b_1, \dots, b_K$ をすべて同じ値として $b_k = b_K$ ($k = 1, \dots, K$) としており, 両側有意水準 α は次のように計算される.

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - \Pr(|Z_1| \leq b_K, \dots, |Z_{K-1}| \leq b_K, |Z_K| \leq b_K | H_0) \\ &= 1 - \int_{-b_K}^{b_K} \int_{-b_K}^{b_K} \dots \int_{-b_K}^{b_K} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^K |\Sigma_K|}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{Z}'_K \Sigma_K^{-1} \mathbf{Z}_K} dz_1 \dots dz_{K-1} dz_K. \end{aligned}$$

両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 最大検定回数 $K = 2, \dots, 5$ としたときの棄却限界値 $b_1, \dots, b_K$ を計算した結果を表 1.12 に示す.

表 1.12: Pocock(1977) における両側有意水準 $\alpha = 0.05$ の棄却限界値 b_k

最大検定回数 K	棄却限界値				
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
2	2.1783	2.1783	-	-	-
3	2.2895	2.2895	2.2895	-	-
4	2.3613	2.3613	2.3613	2.3613	-
5	2.4132	2.4132	2.4132	2.4132	2.4132

1.4.2.2 O'Brien & Fleming(1979)

O'Brien & Fleming(1979) では, 各段階で用いる棄却限界値 $b_1, \dots, b_K$ は K 段階の b_K を段階数で重み付けした $b_k = \sqrt{K/k} \cdot b_K$ ($k = 1, \dots, K$) としており, 両側有意水準 α は次のように計算される.

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - \Pr(|Z_1| \leq \sqrt{K} b_K, \dots, |Z_{K-1}| \leq \sqrt{\frac{K}{K-1}} b_K, |Z_K| \leq b_K | H_0) \\ &= 1 - \int_{-b_K}^{b_K} \int_{-\sqrt{\frac{K}{K-1}} b_K}^{\sqrt{\frac{K}{K-1}} b_K} \dots \int_{-\sqrt{K} b_K}^{\sqrt{K} b_K} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^K |\Sigma_K|}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{Z}'_K \Sigma_K^{-1} \mathbf{Z}_K} dz_1 \dots dz_{K-1} dz_K. \end{aligned}$$

両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 最大検定回数 $K = 2, \dots, 5$ としたときの棄却限界値 $b_1, \dots, b_K$ を計算した結果を表 1.13 に示す.

表 1.13: O'Brien & Fleming(1979) における両側有意水準 $\alpha = 0.05$ の棄却限界値 b_k

最大検定回数 K	棄却限界値				
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
2	2.7965	1.9774	-	-	-
3	3.4711	2.4544	2.0040	-	-
4	4.0486	2.8628	2.3374	2.0243	-
5	4.5617	3.2256	2.6337	2.2809	2.0401

1.4.2.3 Lan & DeMets(1983)

Pocock(1977) および O'Brien & Fleming(1979) は各段階で用いる棄却限界値 b_k 間の関係と有意水準 α を考慮して棄却限界値 b_k を決めていたが, Lan & DeMets(1983) では, 各段階までに消費する有意水準である (1.10) 式で示した α_k を事前に決め, この α_k を満たす棄却限界値 b_k を決定する. 各段階までに消費する有意水準 α_k を決める Lan & DeMets(1983) の 3 種類の α 消費関数を次に示す.

- Normal 法

$$\alpha_k = 2 \left\{ 1 - \Phi \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{K}{k}} \right) \right\}, k = 1, \dots, K.$$

ここで Φ は標準正規分布 $N(0, 1)$ の分布関数, $z_{\frac{\alpha}{2}}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ の上側 $100 \times \frac{\alpha}{2} \%$ 点である.

- Log 法

$$\alpha_k = \alpha \cdot \log \left\{ 1 + (e - 1) \frac{k}{K} \right\}, k = 1, \dots, K.$$

- αt 法

$$\alpha_k = \alpha \cdot \frac{k}{K}, k = 1, \dots, K.$$

k 段階までの検定統計量ベクトル $\mathbf{Z}_k = (Z_1, \dots, Z_k)'$ は, 帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ の下で, (1.8) 式の平均ベクトル $\mathbf{0}$, 分散共分散行列 Σ_k の k 変量正規分布に従う. このことから各段階で用いる棄却限界値 $b_1, \dots, b_K$ は以下のように順次計算して, 決定する.

- 1 段階

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1 - \Pr(|Z_1| \leq b_1 | H_0) \\ &= 1 - \int_{-b_1}^{b_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z_1^2} dz_1. \end{aligned}$$

- $k(k = 2, \dots, K - 1)$ 段階

$$\begin{aligned} \alpha_k &= 1 - \Pr(|Z_1| \leq b_1, \dots, |Z_{k-1}| \leq b_{k-1}, |Z_k| \leq b_k | H_0) \\ &= 1 - \int_{-b_k}^{b_k} \int_{-b_{k-1}}^{b_{k-1}} \dots \int_{-b_1}^{b_1} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k |\Sigma_k|}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{Z}_k' \Sigma_k^{-1} \mathbf{Z}_k} dz_1 \dots dz_{k-1} dz_k. \end{aligned}$$

- K 段階

$$\begin{aligned} \alpha_K &= \alpha \\ &= 1 - \Pr(|Z_1| \leq b_1, \dots, |Z_{K-1}| \leq b_{K-1}, |Z_K| \leq b_K | H_0) \\ &= 1 - \int_{-b_K}^{b_K} \int_{-b_{K-1}}^{b_{K-1}} \dots \int_{-b_1}^{b_1} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^K |\Sigma_K|}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{Z}_K' \Sigma_K^{-1} \mathbf{Z}_K} dz_1 \dots dz_{K-1} dz_K. \end{aligned}$$

両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 最大検定回数 $K = 2, \dots, 5$ としたときの Normal 法, Log 法, αt 法の棄却限界値 $b_1, \dots, b_K$ を計算した結果を表 1.14 に示す.

表 1.14: Lan & DeMets(1983) における両側有意水準 $\alpha = 0.05$ の棄却限界値 b_k

手法	最大検定回数 K	棄却限界値				
		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
Normal 法	2	2.7718	1.9793	-	-	-
	3	3.3948	2.4068	2.0152	-	-
	4	3.9218	2.7740	2.2983	2.0426	-
	5	4.3997	3.0999	2.5534	2.2539	2.0635
Log 法	2	2.1570	2.2010	-	-	-
	3	2.2794	2.2949	2.2959	-	-
	4	2.3683	2.3676	2.3582	2.3500	-
	5	2.4380	2.4268	2.4102	2.3967	2.3860
αt 法	2	2.2414	2.1251	-	-	-
	3	2.3940	2.2938	2.1999	-	-
	4	2.4977	2.4072	2.3209	2.2448	-
	5	2.5758	2.4920	2.4108	2.3392	2.2755

1.4.2.4 各手法の比較

Pocock(1977), O'Brien & Fleming(1979) および Lan & DeMets(1983) の各手法における棄却限界値 b_k について, 以下のことがわかる.

- Pocock(1977) と Lan & DeMets(1983) の Log 法が似た傾向を示し, 段階が増えても Pocock(1977) は棄却限界値 b_k は変わらないが, Lan & DeMets(1983) の Log 法は棄却限界値 b_k が $K = 2, 3$ までは微増し, $K = 4, 5$ では微減する.
- O'Brien & Fleming(1979) と Lan & DeMets(1983) の Normal 法が似た傾向を示し, 1 段階の棄却限界値 b_1 が他の手法より大きく, 段階が増えると棄却限界値 b_k は減少する.
- Lan & DeMets(1983) の αt 法は, Pocock(1977) および Lan & DeMets(1983) の Log 法に似ているが, 1 段階の棄却限界値 b_1 はこれら手法よりも大きな値を示すが, 段階が増えると棄却限界値 b_k は微減し, これら手法よりも小さい値となる.

また, 各手法において k 段階までに棄却される有意水準 $\alpha_k (k = 1, \dots, K)$ の推移を計算した結果を表 1.15 から 1.18, 最大検定回数 $K = 5$ のときの推移を計算した結果を図 1.2 に示す.

表 1.15: 各手法における両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 最大検定回数 $K = 2$ の k 段階までの有意水準 α_k

手法	有意水準	
	α_1	α_2
Pocock(1977)	0.0294	0.0500
O'Brien & Fleming(1979)	0.0052	0.0500
Lan & DeMets(1983) Normal 法	0.0056	0.0500
Lan & DeMets(1983) Log 法	0.0310	0.0500
Lan & DeMets(1983) αt 法	0.0250	0.0500

表 1.16: 各手法における両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 最大検定回数 $K = 3$ の k 段階までの有意水準 α_k
 (池谷 他 (2019) 表 2.3 に Pocock(1977) および O'Brien & Fleming(1979) を追加して改変.
 元表の転載については出版元の許諾済み.)

手法	有意水準		
	α_1	α_2	α_3
Pocock(1977)	0.0221	0.0379	0.0500
O'Brien & Fleming(1979)	0.0005	0.0143	0.0500
Lan & DeMets(1983) Normal 法	0.0007	0.0164	0.0500
Lan & DeMets(1983) Log 法	0.0226	0.0382	0.0500
Lan & DeMets(1983) αt 法	0.0167	0.0333	0.0500

表 1.17: 各手法における両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 最大検定回数 $K = 4$ の k 段階までの有意水準 α_k

手法	有意水準			
	α_1	α_2	α_3	α_4
Pocock(1977)	0.0182	0.0315	0.0418	0.0500
O'Brien & Fleming(1979)	0.0001	0.0042	0.0209	0.0500
Lan & DeMets(1983) Normal 法	0.0001	0.0056	0.0236	0.0500
Lan & DeMets(1983) Log 法	0.0179	0.0310	0.0414	0.0500
Lan & DeMets(1983) αt 法	0.0125	0.0250	0.0375	0.0500

表 1.18: 各手法における両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 最大検定回数 $K = 5$ の k 段階までの有意水準 α_k
 (池谷 他 (2023) 表 2 に Pocock(1977) および O'Brien & Fleming(1979) を追加して改変.
 元表の転載については出版元の許諾済み.)

手法	有意水準				
	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
Pocock(1977)	0.0158	0.0275	0.0365	0.0439	0.0500
O'Brien & Fleming(1979)	0.0000	0.0013	0.0089	0.0256	0.0500
Lan & DeMets(1983) Normal 法	0.0000	0.0019	0.0114	0.0284	0.0500
Lan & DeMets(1983) Log 法	0.0148	0.0262	0.0354	0.0432	0.0500
Lan & DeMets(1983) αt 法	0.0100	0.0200	0.0300	0.0400	0.0500

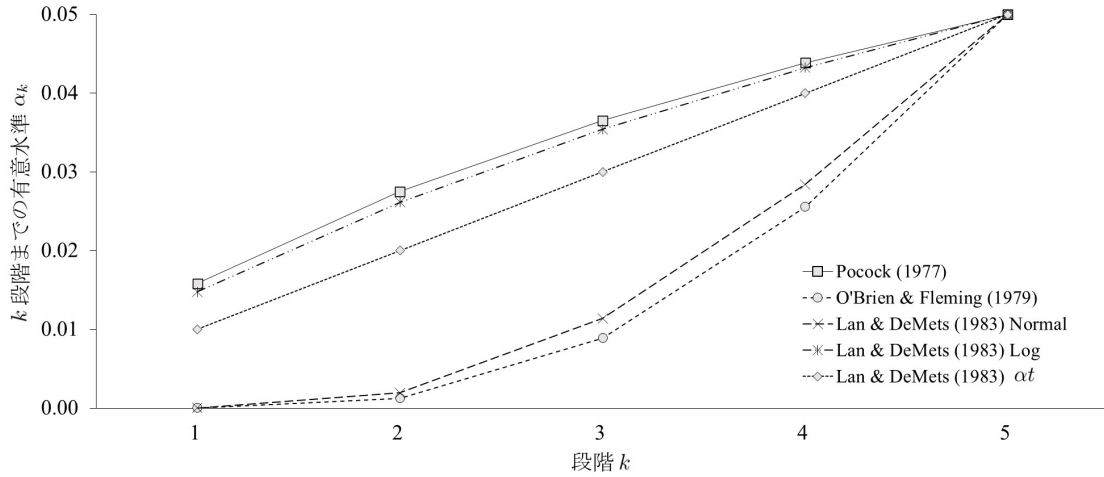


図 1.2: 各手法における両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 最大検定回数 $K = 5$ の k 段階までの有意水準 α_k (池谷 他 (2023) 図 1 を数値積分による計算結果に改変し, Pocock(1977) および O'Brien & Fleming(1979) を追加して改変. 元表の転載については出版元の許諾済み.)

k 段階までの有意水準 α_k について, 以下のことがわかる.

- Pocock(1977) と Lan & DeMets(1983) の Log 法が似た傾向を示し, 他の手法に比べて 1 段階での有意水準 α_1 が大きく, 前半で有意水準を消費し, 段階が増えるにつれて徐々に有意水準 α に近づく. これは棄却限界値 b_k が他の手法に比べて 1 段階で小さく, 段階が増えてもあまり変わらないと言う棄却限界値 b_k の変化が影響していると考えられる.
- O'Brien & Fleming(1979) と Lan & DeMets(1983) の Normal 法が似た傾向を示し, 他の手法に比べて 1 段階での有意水準 α_1 が小さく, 段階が増えるにつれて後半で有意水準を消費することから, 有意水準 α に急激に近づく. これは棄却限界値 b_k が他の手法に比べて 1 段階で大きく, 徐々に小さくなるという棄却限界値 b_k の変化が影響していると考えられる.
- Lan & DeMets(1983) の αt 法は, 各段階で消費する有意水準である α_k^* が均等になっていることから段階が増えるごとに消費される有意水準は一定となっている.

1.4.3 決定規則

群逐次検定では, k 段階までに得られた 2 群における群間および群内で互いに独立な n_k 個の反応データ $x_{11}, \dots, x_{1n_k}$ と $x_{21}, \dots, x_{2n_k}$ から検定統計量 Z_k の実現値 z_k を求め, 事前に決めた両側有意水準 α に対応した棄却限界値 b_k を用いて, 以下のように判断する.

- $k(k = 1, \dots, K - 1)$ 段階
 - $|z_k| > b_k$ ならば, 帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ を棄却し, 母平均 μ_1 と μ_2 は異なるとして, 検定を終了する.
 - $|z_k| \leq b_k$ ならば, 判断を保留し, $k + 1$ 段階までに得られた反応データを基に $k + 1$ 段階で検定を行う.
- K 段階
 - $|z_K| > b_K$ ならば, 帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ を棄却し, 母平均 μ_1 と μ_2 は異なるとして, 検定を終了する.
 - $|z_K| \leq b_K$ ならば, 帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ を受容し, 母平均 μ_1 と μ_2 は異なるとは言えないとして, 検定を終了する.

1.4.4 検出力

群逐次検定の検出力は対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ の下, 次式で示す確率となる.

$$\begin{aligned}
 1 - \beta &= \Pr(|Z_1| > b_1 | H_1) + \Pr(|Z_1| \leq b_1, |Z_2| > b_2 | H_1) \\
 &\quad + \dots + \Pr(|Z_1| \leq b_1, \dots, |Z_{k-1}| \leq b_{k-1}, |Z_k| > b_k | H_1) \\
 &\quad + \dots + \Pr(|Z_1| \leq b_1, \dots, |Z_{K-1}| \leq b_{K-1}, |Z_K| > b_K | H_1) \\
 &= 1 - \Pr(|Z_1| \leq b_1, \dots, |Z_{K-1}| \leq b_{K-1}, |Z_K| \leq b_K | H_1).
 \end{aligned}$$

対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ の下, 母平均 μ_1 と μ_2 との差を $\delta = \mu_2 - \mu_1$, δ を母標準偏差 σ で除した $\Delta = \delta/\sigma$ とすると, (1.7) 式より検定統計量ベクトル $\mathbf{Z}_K = (Z_1, \dots, Z_K)'$ は次の K 変量正規分布に従う.

$$\mathbf{Z}_K|H_1 \sim N_K(\boldsymbol{\mu}_K, \boldsymbol{\Sigma}_K),$$

$$\boldsymbol{\mu}_K = \frac{\Delta}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{n_1} \\ \sqrt{n_2} \\ \vdots \\ \sqrt{n_{K-1}} \\ \sqrt{n_K} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\Sigma}_K = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\frac{1}{2}} & \cdots & \sqrt{\frac{1}{K-1}} & \sqrt{\frac{1}{K}} \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & 1 & \cdots & \sqrt{\frac{2}{K-1}} & \sqrt{\frac{2}{K}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sqrt{\frac{1}{K-1}} & \sqrt{\frac{2}{K-1}} & \cdots & 1 & \sqrt{\frac{K-1}{K}} \\ \sqrt{\frac{1}{K}} & \sqrt{\frac{2}{K}} & \cdots & \sqrt{\frac{K-1}{K}} & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

このことから検出力 $1 - \beta$ は次式で求めることができる.

$$\begin{aligned} 1 - \beta &= 1 - \Pr(|Z_1| \leq b_1, \dots, |Z_{K-1}| \leq b_{K-1}, |Z_K| \leq b_K | H_1) \\ &= 1 - \int_{-b_K}^{b_K} \int_{-b_{K-1}}^{b_{K-1}} \cdots \int_{-b_1}^{b_1} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^K |\boldsymbol{\Sigma}_K|}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{Z}_K - \boldsymbol{\mu}_K)' \boldsymbol{\Sigma}_K^{-1} (\mathbf{Z}_K - \boldsymbol{\mu}_K)} dz_1 \cdots dz_{K-1} dz_K. \end{aligned} \quad (1.12)$$

また, 対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ の下, $k(k = 1, \dots, K)$ 段階までに帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ を棄却する確率を π_k , k 段階で初めて帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ を棄却する確率を π_k^* とすると次式が成り立つ.

$$\begin{aligned} \pi_k &= \Pr(|Z_1| > b_1 | H_1) + \Pr(|Z_1| \leq b_1, |Z_2| > b_2 | H_1) \\ &\quad + \cdots + \Pr(|Z_1| \leq b_1, \dots, |Z_{k-1}| \leq b_{k-1}, |Z_k| > b_k | H_1) \\ &= 1 - \Pr(|Z_1| \leq b_1, \dots, |Z_{k-1}| \leq b_{k-1}, |Z_k| \leq b_k | H_1) \\ &= 1 - \int_{-b_k}^{b_k} \int_{-b_{k-1}}^{b_{k-1}} \cdots \int_{-b_1}^{b_1} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k |\boldsymbol{\Sigma}_k|}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{Z}_k - \boldsymbol{\mu}_k)' \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1} (\mathbf{Z}_k - \boldsymbol{\mu}_k)} dz_1 \cdots dz_{k-1} dz_k, k = 1, \dots, K. \\ \pi_k^* &= \Pr(|Z_1| \leq b_1, \dots, |Z_{k-1}| \leq b_{k-1}, |Z_k| > b_k | H_1) \\ &= \pi_k - \pi_{k-1}, \pi_0 = 0, k = 1, \dots, K. \\ 1 - \beta &= \pi_K \\ &= \sum_{k=1}^K \pi_k^*. \end{aligned}$$

ここで平均ベクトル $\boldsymbol{\mu}_k$ および分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}_k$ は, (1.11) 式より次式となる.

$$\boldsymbol{\mu}_k = \frac{\Delta}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{n_1} \\ \sqrt{n_2} \\ \vdots \\ \sqrt{n_{k-1}} \\ \sqrt{n_k} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\Sigma}_k = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\frac{1}{2}} & \cdots & \sqrt{\frac{1}{k-1}} & \sqrt{\frac{1}{k}} \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & 1 & \cdots & \sqrt{\frac{2}{k-1}} & \sqrt{\frac{2}{k}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sqrt{\frac{1}{k-1}} & \sqrt{\frac{2}{k-1}} & \cdots & 1 & \sqrt{\frac{k-1}{k}} \\ \sqrt{\frac{1}{k}} & \sqrt{\frac{2}{k}} & \cdots & \sqrt{\frac{k-1}{k}} & 1 \end{pmatrix}.$$

検出力 $1 - \beta$ の計算には, 両側有意水準 α , 棄却限界値 $b_1, \dots, b_K$, 母平均 μ_1 と μ_2 との差 δ の想定値, 既知の母分散 σ^2 , 各群の各段階の標本サイズ m が必要となる.

1.4.5 必要標本サイズ

群逐次検定の対象となるデータの収集計画を立てるとき, 両側有意水準 α および検出力 $1 - \beta$ を考慮した各群の各段階の標本サイズ m を決める必要があり, その手順を以下に示す.

1. 最大検定回数 K , 使用する手法, 両側有意水準 α , 目標とする検出力 $1 - \beta$ を決める.
2. 2 群間の母平均の差の想定値を $\delta_0 = \mu_2 - \mu_1$ とする.
3. 手法に合わせた棄却限界値 $b_1, \dots, b_K$ を算出する,

4. 各群の各段階の仮の標本サイズ $m_0 = 2$ を与える.
5. 両側有意水準 α , 棄却限界値 $b_1, \dots, b_K$, 各群の各段階の仮の標本サイズ m_0 , 2 群間の母平均の差の想定値 δ_0 , 既知の母分散 σ^2 を用いて (1.12) 式より算出した検出力を $1 - \beta_0$ とする.
6. $1 - \beta_0 < 1 - \beta$ なら各群の各段階の仮の標本サイズ $m_0 = m_0 + 1$ として手順 5 に戻り, $1 - \beta_0 \geq 1 - \beta$ ならば m_0 を各群の各段階の標本サイズ m とする.

また, 群逐次検定では途中で帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ を棄却し, 最大検定回数である K 段階までの各群の累積標本サイズ n_K の反応データを収集しないことがある. このことから試験全体で標本サイズが平均的にどのくらいになるかを示す指標として平均標本サイズ $E(n_k)$ があり, 次式で求めることができる.

$$E(n_k) = \sum_{k=1}^{K-1} n_k \cdot \pi_k^* + n_K \cdot (1 - \pi_{K-1}). \quad (1.13)$$

1.4.6 シミュレーションと数値例

1.4.6.1 帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ の下でのシミュレーション

群逐次検定の各手法において帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = 0$, 既知の母分散 $\sigma^2 = 1.0$ の下で, 各群の各段階の標本サイズ m のいくつかのパターンで $N(0, 1)$ の正規分布に従う正規乱数を各群の各段階で m 個ずつ発生させ, 両側有意水準 $\alpha = 0.05$ で仮説検定を行うシミュレーションを行う. シミュレーション回数に対して帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ を棄却した割合から両側有意水準 α が設定通りになっているか $K = 2$ および 5 として評価した結果を表 1.19 および 1.20 に示す.

表 1.19: 帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = 0$ の下でのシミュレーション結果
両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 最大検定回数 $K = 2$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$

手法	各段階の標本サイズ/群 m	シミュレーション 回数	帰無仮説 H_0 を棄却	
			回数	割合
Pocock(1977)	5	10000	520	0.0520
	10	10000	491	0.0491
	30	10000	469	0.0469
O'Brien & Fleming(1979)	5	10000	489	0.0489
	10	10000	491	0.0491
	30	10000	513	0.0513
Lan & DeMets(1983) Normal 法	5	10000	473	0.0473
	10	10000	477	0.0477
	30	10000	478	0.0478
Lan & DeMets(1983) Log 法	5	10000	526	0.0526
	10	10000	462	0.0462
	30	10000	487	0.0487
Lan & DeMets(1983) αt 法	5	10000	516	0.0516
	10	10000	483	0.0483
	30	10000	500	0.0500

表 1.20: 帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = 0$ の下でのシミュレーション結果
両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 最大検定回数 $K = 5$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$

手法	各段階の標本サイズ/群 m	シミュレーション 回数	帰無仮説 H_0 を棄却	
			回数	割合
Pocock(1977)	5	10000	520	0.0520
	10	10000	504	0.0504
	30	10000	498	0.0498
O'Brien & Fleming(1979)	5	10000	536	0.0536
	10	10000	560	0.0560
	30	10000	503	0.0503
Lan & DeMets(1983) Normal 法	5	10000	532	0.0532
	10	10000	485	0.0485
	30	10000	502	0.0502
Lan & DeMets(1983) Log 法	5	10000	512	0.0512
	10	10000	492	0.0492
	30	10000	533	0.0533
Lan & DeMets(1983) αt 法	5	10000	530	0.0530
	10	10000	491	0.0491
	30	10000	515	0.0515

表 1.19 および 1.20 に示した結果から帰無仮説 H_0 の下では、各群の各段階の標本サイズ m によらず両側有意水準 α が保たれていることがわかる。

1.4.6.2 対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ の下でのシミュレーション

次に各手法において 2 群間の母平均の差 δ を 0.1 から 0.1 ごとに 1.0 までとする対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$, 既知の母分散 $\sigma^2 = 1.0$ の下で、各群の各段階の標本サイズ m のいくつかのパターンで両側有意水準 $\alpha = 0.05$ としたときの検出力 $1 - \beta$ を計算した結果を示す。また、群 1 および群 2 でそれぞれ $N(\mu_1, 1), N(\mu_2, 1)$ の正規分布に従う正規乱数を各群の各段階で m 個ずつ発生させ、両側有意水準 $\alpha = 0.05$ で仮説検定を行うシミュレーションを行い、シミュレーション回数に対して帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ を棄却した割合から検出力 $1 - \beta$ と同様になっているか評価した最大検定回数 $K = 5$ の結果を表 1.21 から 1.35 に示す。

表 1.21: 対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 (\mu_2 - \mu_1 = \delta)$ の下でのシミュレーション結果
両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 最大検定回数 $K = 5$, 各段階の標本サイズ/群 $m = 5$
Pocock(1977)

母平均		差 $\Delta = \delta/\sigma$	検出力 $1 - \beta$	シミュレーション 回数	帰無仮説 H_0 を棄却	
μ_1	μ_2				回数	割合
0.0	0.1	0.1	0.0599	10000	573	0.0573
0.0	0.2	0.2	0.0908	10000	905	0.0905
0.0	0.3	0.3	0.1461	10000	1454	0.1454
0.0	0.4	0.4	0.2283	10000	2239	0.2239
0.0	0.5	0.5	0.3362	10000	3405	0.3405
0.0	0.6	0.6	0.4624	10000	4720	0.4720
0.0	0.7	0.7	0.5945	10000	5997	0.5997
0.0	0.8	0.8	0.7177	10000	7199	0.7199
0.0	0.9	0.9	0.8201	10000	8225	0.8225
0.0	1.0	1.0	0.8957	10000	8989	0.8989

表 1.22: 対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 (\mu_2 - \mu_1 = \delta)$ の下でのシミュレーション結果
 両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 最大検定回数 $K = 5$, 各段階の標本サイズ/群 $m = 5$
 O'Brien & Fleming(1979)

母平均		差	検出力	シミュレーション	帰無仮説 H_0 を棄却	
μ_1	μ_2	$\Delta = \delta/\sigma$	$1 - \beta$	回数	回数	割合
0.0	0.1	0.1	0.0638	10000	674	0.0674
0.0	0.2	0.2	0.1066	10000	1059	0.1059
0.0	0.3	0.3	0.1803	10000	1774	0.1774
0.0	0.4	0.4	0.2844	10000	2865	0.2865
0.0	0.5	0.5	0.4124	10000	4137	0.4137
0.0	0.6	0.6	0.5510	10000	5545	0.5545
0.0	0.7	0.7	0.6838	10000	6802	0.6802
0.0	0.8	0.8	0.7965	10000	8025	0.8025
0.0	0.9	0.9	0.8810	10000	8836	0.8836
0.0	1.0	1.0	0.9372	10000	9410	0.9410

表 1.23: 対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 (\mu_2 - \mu_1 = \delta)$ の下でのシミュレーション結果
 両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 最大検定回数 $K = 5$, 各段階の標本サイズ/群 $m = 5$
 Lan & DeMets(1983) Normal 法

母平均		差	検出力	シミュレーション	帰無仮説 H_0 を棄却	
μ_1	μ_2	$\Delta = \delta/\sigma$	$1 - \beta$	回数	回数	割合
0.0	0.1	0.1	0.0636	10000	619	0.0619
0.0	0.2	0.2	0.1058	10000	1073	0.1073
0.0	0.3	0.3	0.1786	10000	1873	0.1873
0.0	0.4	0.4	0.2816	10000	2715	0.2715
0.0	0.5	0.5	0.4086	10000	4049	0.4049
0.0	0.6	0.6	0.5467	10000	5462	0.5462
0.0	0.7	0.7	0.6796	10000	6829	0.6829
0.0	0.8	0.8	0.7928	10000	7971	0.7971
0.0	0.9	0.9	0.8783	10000	8747	0.8747
0.0	1.0	1.0	0.9354	10000	9336	0.9336

表 1.24: 対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 (\mu_2 - \mu_1 = \delta)$ の下でのシミュレーション結果
 両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 最大検定回数 $K = 5$, 各段階の標本サイズ/群 $m = 5$
 Lan & DeMets(1983) Log 法

母平均		差	検出力	シミュレーション	帰無仮説 H_0 を棄却	
μ_1	μ_2	$\Delta = \delta/\sigma$	$1 - \beta$	回数	回数	割合
0.0	0.1	0.1	0.0601	10000	599	0.0599
0.0	0.2	0.2	0.0918	10000	878	0.0878
0.0	0.3	0.3	0.1484	10000	1470	0.1470
0.0	0.4	0.4	0.2321	10000	2301	0.2301
0.0	0.5	0.5	0.3416	10000	3372	0.3372
0.0	0.6	0.6	0.4690	10000	4718	0.4718
0.0	0.7	0.7	0.6014	10000	6002	0.6002
0.0	0.8	0.8	0.7240	10000	7221	0.7221
0.0	0.9	0.9	0.8252	10000	8302	0.8302
0.0	1.0	1.0	0.8993	10000	9007	0.9007

表 1.25: 対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 (\mu_2 - \mu_1 = \delta)$ の下でのシミュレーション結果
 両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 最大検定回数 $K = 5$, 各段階の標本サイズ/群 $m = 5$
 Lan & DeMets(1983) αt 法

母平均		差	検出力	シミュレーション	帰無仮説 H_0 を棄却	
μ_1	μ_2	$\Delta = \delta/\sigma$	$1 - \beta$	回数	回数	割合
0.0	0.1	0.1	0.0612	10000	600	0.0600
0.0	0.2	0.2	0.0962	10000	927	0.0927
0.0	0.3	0.3	0.1580	10000	1617	0.1617
0.0	0.4	0.4	0.2483	10000	2456	0.2456
0.0	0.5	0.5	0.3640	10000	3594	0.3594
0.0	0.6	0.6	0.4956	10000	5029	0.5029
0.0	0.7	0.7	0.6289	10000	6342	0.6342
0.0	0.8	0.8	0.7489	10000	7461	0.7461
0.0	0.9	0.9	0.8450	10000	8411	0.8411
0.0	1.0	1.0	0.9131	10000	9116	0.9116

表 1.26: 対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 (\mu_2 - \mu_1 = \delta)$ の下でのシミュレーション結果
 両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 最大検定回数 $K = 5$, 各段階の標本サイズ/群 $m = 10$
 Pocock(1977)

母平均		差	検出力	シミュレーション	帰無仮説 H_0 を棄却	
μ_1	μ_2	$\Delta = \delta/\sigma$	$1 - \beta$	回数	回数	割合
0.0	0.1	0.1	0.0699	10000	704	0.0704
0.0	0.2	0.2	0.1347	10000	1276	0.1276
0.0	0.3	0.3	0.2523	10000	2560	0.2560
0.0	0.4	0.4	0.4177	10000	4174	0.4174
0.0	0.5	0.5	0.6037	10000	6118	0.6118
0.0	0.6	0.6	0.7705	10000	7742	0.7742
0.0	0.7	0.7	0.8893	10000	8929	0.8929
0.0	0.8	0.8	0.9562	10000	9538	0.9538
0.0	0.9	0.9	0.9860	10000	9875	0.9875
0.0	1.0	1.0	0.9964	10000	9963	0.9963

表 1.27: 対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 (\mu_2 - \mu_1 = \delta)$ の下でのシミュレーション結果
 両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 最大検定回数 $K = 5$, 各段階の標本サイズ/群 $m = 10$
 O'Brien & Fleming(1979)

母平均		差	検出力	シミュレーション	帰無仮説 H_0 を棄却	
μ_1	μ_2	$\Delta = \delta/\sigma$	$1 - \beta$	回数	回数	割合
0.0	0.1	0.1	0.0779	10000	779	0.0779
0.0	0.2	0.2	0.1654	10000	1658	0.1658
0.0	0.3	0.3	0.3137	10000	3147	0.3147
0.0	0.4	0.4	0.5032	10000	5106	0.5106
0.0	0.5	0.5	0.6926	10000	6965	0.6965
0.0	0.6	0.6	0.8412	10000	8393	0.8393
0.0	0.7	0.7	0.9327	10000	9290	0.9290
0.0	0.8	0.8	0.9769	10000	9783	0.9783
0.0	0.9	0.9	0.9936	10000	9941	0.9941
0.0	1.0	1.0	0.9986	10000	9983	0.9983

表 1.28: 対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 (\mu_2 - \mu_1 = \delta)$ の下でのシミュレーション結果
 両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 最大検定回数 $K = 5$, 各段階の標本サイズ/群 $m = 10$
 Lan & DeMets(1983) Normal 法

母平均		差	検出力	シミュレーション	帰無仮説 H_0 を棄却	
μ_1	μ_2	$\Delta = \delta/\sigma$	$1 - \beta$	回数	回数	割合
0.0	0.1	0.1	0.0775	10000	777	0.0777
0.0	0.2	0.2	0.1639	10000	1618	0.1618
0.0	0.3	0.3	0.3106	10000	3127	0.3127
0.0	0.4	0.4	0.4991	10000	5108	0.5108
0.0	0.5	0.5	0.6884	10000	6851	0.6851
0.0	0.6	0.6	0.8380	10000	8362	0.8362
0.0	0.7	0.7	0.9308	10000	9289	0.9289
0.0	0.8	0.8	0.9761	10000	9766	0.9766
0.0	0.9	0.9	0.9933	10000	9938	0.9938
0.0	1.0	1.0	0.9985	10000	9988	0.9988

表 1.29: 対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 (\mu_2 - \mu_1 = \delta)$ の下でのシミュレーション結果
 両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 最大検定回数 $K = 5$, 各段階の標本サイズ/群 $m = 10$
 Lan & DeMets(1983) Log 法

母平均		差	検出力	シミュレーション	帰無仮説 H_0 を棄却	
μ_1	μ_2	$\Delta = \delta/\sigma$	$1 - \beta$	回数	回数	割合
0.0	0.1	0.1	0.0705	10000	668	0.0668
0.0	0.2	0.2	0.1368	10000	1348	0.1348
0.0	0.3	0.3	0.2565	10000	2590	0.2590
0.0	0.4	0.4	0.4239	10000	4243	0.4243
0.0	0.5	0.5	0.6106	10000	6092	0.6092
0.0	0.6	0.6	0.7763	10000	7731	0.7731
0.0	0.7	0.7	0.8931	10000	8899	0.8899
0.0	0.8	0.8	0.9582	10000	9539	0.9539
0.0	0.9	0.9	0.9868	10000	9874	0.9874
0.0	1.0	1.0	0.9966	10000	9973	0.9973

表 1.30: 対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 (\mu_2 - \mu_1 = \delta)$ の下でのシミュレーション結果
 両側有意水準 $\alpha = 0.05$ 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 最大検定回数 $K = 5$, 各段階の標本サイズ/群 $m = 10$
 Lan & DeMets(1983) αt 法

母平均		差	検出力	シミュレーション	帰無仮説 H_0 を棄却	
μ_1	μ_2	$\Delta = \delta/\sigma$	$1 - \beta$	回数	回数	割合
0.0	0.1	0.1	0.0727	10000	701	0.0701
0.0	0.2	0.2	0.1454	10000	1463	0.1463
0.0	0.3	0.3	0.2743	10000	2758	0.2758
0.0	0.4	0.4	0.4494	10000	4496	0.4496
0.0	0.5	0.5	0.6380	10000	6394	0.6394
0.0	0.6	0.6	0.7989	10000	8025	0.8025
0.0	0.7	0.7	0.9075	10000	9051	0.9051
0.0	0.8	0.8	0.9653	10000	9670	0.9670
0.0	0.9	0.9	0.9895	10000	9900	0.9900
0.0	1.0	1.0	0.9974	10000	9982	0.9982

表 1.31: 対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 (\mu_2 - \mu_1 = \delta)$ の下でのシミュレーション結果
 両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 最大検定回数 $K = 5$, 各段階の標本サイズ/群 $m = 30$
 Pocock(1977)

母平均		差	検出力	シミュレーション	帰無仮説 H_0 を棄却	
μ_1	μ_2	$\Delta = \delta/\sigma$	$1 - \beta$	回数	回数	割合
0.0	0.1	0.1	0.1124	10000	1103	0.1103
0.0	0.2	0.2	0.3243	10000	3274	0.3274
0.0	0.3	0.3	0.6392	10000	6357	0.6357
0.0	0.4	0.4	0.8826	10000	8850	0.8850
0.0	0.5	0.5	0.9789	10000	9805	0.9805
0.0	0.6	0.6	0.9980	10000	9971	0.9971
0.0	0.7	0.7	0.9999	10000	9997	0.9997
0.0	0.8	0.8	1.0000	10000	10000	1.0000
0.0	0.9	0.9	1.0000	10000	10000	1.0000
0.0	1.0	1.0	1.0000	10000	10000	1.0000

表 1.32: 対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 (\mu_2 - \mu_1 = \delta)$ の下でのシミュレーション結果
 両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 最大検定回数 $K = 5$, 各段階の標本サイズ/群 $m = 30$
 O'Brien & Fleming(1979)

母平均		差	検出力	シミュレーション	帰無仮説 H_0 を棄却	
μ_1	μ_2	$\Delta = \delta/\sigma$	$1 - \beta$	回数	回数	割合
0.0	0.1	0.1	0.1358	10000	1395	0.1395
0.0	0.2	0.2	0.3987	10000	4006	0.4006
0.0	0.3	0.3	0.7259	10000	7264	0.7264
0.0	0.4	0.4	0.9279	10000	9299	0.9299
0.0	0.5	0.5	0.9899	10000	9902	0.9902
0.0	0.6	0.6	0.9993	10000	9988	0.9988
0.0	0.7	0.7	1.0000	10000	10000	1.0000
0.0	0.8	0.8	1.0000	10000	10000	1.0000
0.0	0.9	0.9	1.0000	10000	10000	1.0000
0.0	1.0	1.0	1.0000	10000	10000	1.0000

表 1.33: 対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 (\mu_2 - \mu_1 = \delta)$ の下でのシミュレーション結果
 両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 最大検定回数 $K = 5$, 各段階の標本サイズ/群 $m = 30$
 Lan & DeMets(1983) Normal 法

母平均		差	検出力	シミュレーション	帰無仮説 H_0 を棄却	
μ_1	μ_2	$\Delta = \delta/\sigma$	$1 - \beta$	回数	回数	割合
0.0	0.1	0.1	0.1346	10000	1389	0.1389
0.0	0.2	0.2	0.3950	10000	3908	0.3908
0.0	0.3	0.3	0.7219	10000	7262	0.7262
0.0	0.4	0.4	0.9260	10000	9246	0.9246
0.0	0.5	0.5	0.9895	10000	9888	0.9888
0.0	0.6	0.6	0.9992	10000	9988	0.9988
0.0	0.7	0.7	1.0000	10000	10000	1.0000
0.0	0.8	0.8	1.0000	10000	10000	1.0000
0.0	0.9	0.9	1.0000	10000	10000	1.0000
0.0	1.0	1.0	1.0000	10000	10000	1.0000

表 1.34: 対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 (\mu_2 - \mu_1 = \delta)$ の下でのシミュレーション結果
 両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 最大検定回数 $K = 5$, 各段階の標本サイズ/群 $m = 30$
 Lan & DeMets(1983) Log 法

母平均		差	検出力	シミュレーション	帰無仮説 H_0 を棄却	
μ_1	μ_2	$\Delta = \delta/\sigma$	$1 - \beta$	回数	回数	割合
0.0	0.1	0.1	0.1140	10000	1153	0.1153
0.0	0.2	0.2	0.3295	10000	3316	0.3316
0.0	0.3	0.3	0.6459	10000	6406	0.6406
0.0	0.4	0.4	0.8866	10000	8906	0.8906
0.0	0.5	0.5	0.9799	10000	9768	0.9768
0.0	0.6	0.6	0.9981	10000	9989	0.9989
0.0	0.7	0.7	0.9999	10000	10000	1.0000
0.0	0.8	0.8	1.0000	10000	10000	1.0000
0.0	0.9	0.9	1.0000	10000	10000	1.0000
0.0	1.0	1.0	1.0000	10000	10000	1.0000

表 1.35: 対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 (\mu_2 - \mu_1 = \delta)$ の下でのシミュレーション結果
 両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 最大検定回数 $K = 5$, 各段階の標本サイズ/群 $m = 30$
 Lan & DeMets(1983) αt 法

母平均		差	検出力	シミュレーション	帰無仮説 H_0 を棄却	
μ_1	μ_2	$\Delta = \delta/\sigma$	$1 - \beta$	回数	回数	割合
0.0	0.1	0.1	0.1205	10000	1199	0.1199
0.0	0.2	0.2	0.3513	10000	3589	0.3589
0.0	0.3	0.3	0.6729	10000	6758	0.6758
0.0	0.4	0.4	0.9016	10000	9001	0.9001
0.0	0.5	0.5	0.9838	10000	9848	0.9848
0.0	0.6	0.6	0.9986	10000	9991	0.9991
0.0	0.7	0.7	0.9999	10000	10000	1.0000
0.0	0.8	0.8	1.0000	10000	10000	1.0000
0.0	0.9	0.9	1.0000	10000	10000	1.0000
0.0	1.0	1.0	1.0000	10000	10000	1.0000

表 1.21 から 1.35 に示した結果から次のことがわかる。

- シミュレーションにより帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ を棄却する割合から検出力 $1 - \beta$ は保たれている。
- 手法ごとに各群の各段階の標本サイズ m を固定した場合, 2 群間の母平均の差 δ が大きくなるにつれて検出力 $1 - \beta$ は高くなる。
- 手法ごとに 2 群間の母平均の差 δ を固定した場合, 標本サイズ m が増加するにつれて検出力 $1 - \beta$ は高くなる。
- 2 群間の母平均の差 δ および標本サイズ m を固定した場合, 検出力 $1 - \beta$ は O'Brien & Fleming(1979) と Lan & DeMets(1983) の Normal 法で高く, 次に Lan & DeMets(1983) の αt 法が高く, Pocock(1977) と Lan & DeMets(1983) の Log 法がこれら手法の中では最も低い。ただし, 2 群間の母平均の差 δ が大きくなると手法間で検出力 $1 - \beta$ はほとんど変わらない。

1.4.6.3 対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ の下での標本サイズ設計とシミュレーション

最後に 2 群間の母平均の差 δ を 0.1 から 0.1 ごとに 1.0 までとする対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$, 既知の母分散 $\sigma^2 = 1.0$ の下で, 両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 検出力 $1 - \beta = 0.80, 0.90$ を満たす各群の各段階の標本サイズ m および平均標本サイズ $E(n_k)$ を計算した結果を示す。また, 群 1 および群 2 でそれぞれ $N(\mu_1, 1), N(\mu_2, 1)$ の正規分布に従う正規乱数を各群の各段階で m 個ずつ発生させ, 両側有意水準

$\alpha = 0.05$ で仮説検定を行うシミュレーションを行い, シミュレーション回数に対して帰無仮説 $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ を棄却した割合が検出力 $1 - \beta$ と同様になっているか, および平均標本サイズ $E(n_k)$ が同様になっているかを評価した最大検定回数 $K = 5$ の結果を表 1.36 から 1.45 に示し, 差 Δ 別の標本サイズ m および平均標本サイズ $E(n_k)$ の推移をそれぞれ図 1.3 から 1.6 に示す.

表 1.36: 対立仮説 $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 (\mu_2 - \mu_1 = \delta)$ の下でのシミュレーション結果
両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 最大検定回数 $K = 5$, 検出力 $1 - \beta = 0.80$
Pocock(1977)

母平均		差	標本サイズ/群		シミュレーション
μ_1	μ_2	$\Delta = \delta/\sigma$	各段階 m	平均 $E(n_k)$	平均標本サイズ/群
0.0	0.1	0.1	386	1254.8	1255.0
0.0	0.2	0.2	97	314.6	313.3
0.0	0.3	0.3	43	139.6	139.1
0.0	0.4	0.4	25	80.0	80.1
0.0	0.5	0.5	16	51.2	50.9
0.0	0.6	0.6	11	35.4	35.6
0.0	0.7	0.7	8	25.8	26.0
0.0	0.8	0.8	7	21.2	21.2
0.0	0.9	0.9	5	15.9	16.0
0.0	1.0	1.0	4	12.8	12.8

表 1.37: 対立仮説 $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 (\mu_2 - \mu_1 = \delta)$ の下でのシミュレーション結果
両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 最大検定回数 $K = 5$, 検出力 $1 - \beta = 0.80$
O'Brien & Fleming(1979)

母平均		差	標本サイズ/群		シミュレーション
μ_1	μ_2	$\Delta = \delta/\sigma$	各段階 m	平均 $E(n_k)$	平均標本サイズ/群
0.0	0.1	0.1	323	1283.8	1284.4
0.0	0.2	0.2	81	321.7	321.5
0.0	0.3	0.3	36	143.0	143.2
0.0	0.4	0.4	21	82.6	83.0
0.0	0.5	0.5	13	51.6	51.5
0.0	0.6	0.6	9	35.7	35.7
0.0	0.7	0.7	7	27.4	27.3
0.0	0.8	0.8	6	22.7	22.5
0.0	0.9	0.9	4	15.9	15.9
0.0	1.0	1.0	4	15.0	15.0

表 1.38: 対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 (\mu_2 - \mu_1 = \delta)$ の下でのシミュレーション結果
 両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 最大検定回数 $K = 5$, 検出力 $1 - \beta = 0.80$
 Lan & DeMets(1983) Normal 法

母平均		差	標本サイズ/群		シミュレーション
μ_1	μ_2	$\Delta = \delta/\sigma$	各段階 m	平均 $E(n_k)$	平均標本サイズ/群
0.0	0.1	0.1	326	1271.7	1272.8
0.0	0.2	0.2	82	319.4	318.5
0.0	0.3	0.3	37	143.5	143.3
0.0	0.4	0.4	21	81.2	81.2
0.0	0.5	0.5	14	53.5	53.5
0.0	0.6	0.6	10	37.9	37.9
0.0	0.7	0.7	7	26.9	26.9
0.0	0.8	0.8	6	22.3	22.3
0.0	0.9	0.9	5	18.3	18.2
0.0	1.0	1.0	4	14.7	14.7

表 1.39: 対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 (\mu_2 - \mu_1 = \delta)$ の下でのシミュレーション結果
 両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 最大検定回数 $K = 5$, 検出力 $1 - \beta = 0.80$
 Lan & DeMets(1983) Log 法

母平均		差	標本サイズ/群		シミュレーション
μ_1	μ_2	$\Delta = \delta/\sigma$	各段階 m	平均 $E(n_k)$	平均標本サイズ/群
0.0	0.1	0.1	381	1249.5	1253.4
0.0	0.2	0.2	96	313.8	311.7
0.0	0.3	0.3	43	140.1	139.7
0.0	0.4	0.4	24	78.4	78.8
0.0	0.5	0.5	16	51.3	51.5
0.0	0.6	0.6	11	35.5	35.5
0.0	0.7	0.7	8	25.9	25.9
0.0	0.8	0.8	6	19.6	19.7
0.0	0.9	0.9	5	16.0	16.0
0.0	1.0	1.0	4	12.8	12.8

表 1.40: 対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 (\mu_2 - \mu_1 = \delta)$ の下でのシミュレーション結果
 両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 最大検定回数 $K = 5$, 検出力 $1 - \beta = 0.80$
 Lan & DeMets(1983) αt 法

母平均		差	標本サイズ/群		シミュレーション
μ_1	μ_2	$\Delta = \delta/\sigma$	各段階 m	平均 $E(n_k)$	平均標本サイズ/群
0.0	0.1	0.1	361	1232.1	1236.9
0.0	0.2	0.2	91	309.6	310.3
0.0	0.3	0.3	41	138.7	138.0
0.0	0.4	0.4	23	77.9	77.7
0.0	0.5	0.5	15	50.4	50.5
0.0	0.6	0.6	11	36.1	36.2
0.0	0.7	0.7	8	26.4	26.3
0.0	0.8	0.8	6	20.0	20.1
0.0	0.9	0.9	5	16.3	16.2
0.0	1.0	1.0	4	13.1	13.1

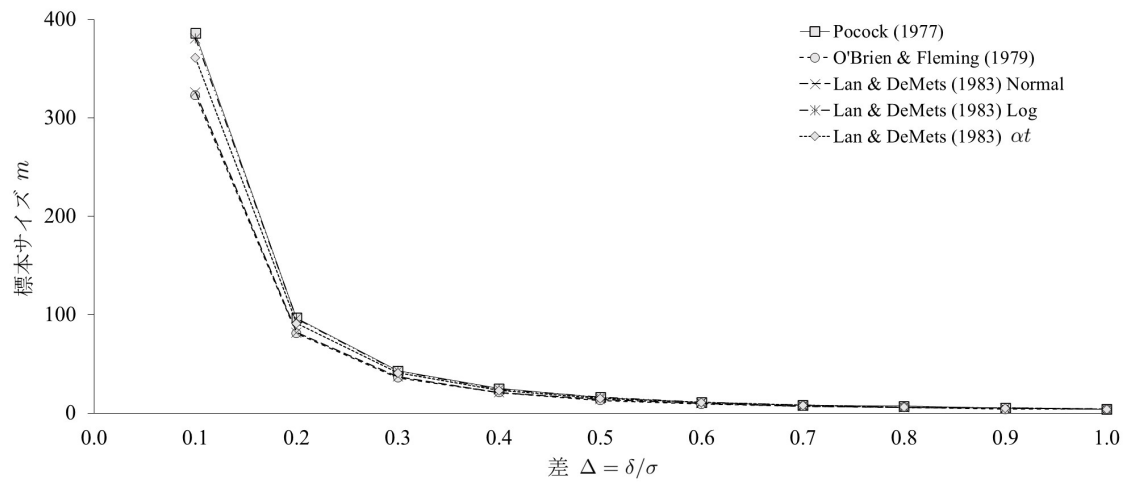


図 1.3: 差 Δ 別の各段階の必要標本サイズ m /群
両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 最大検定回数 $K = 5$, 検出力 $1 - \beta = 0.80$

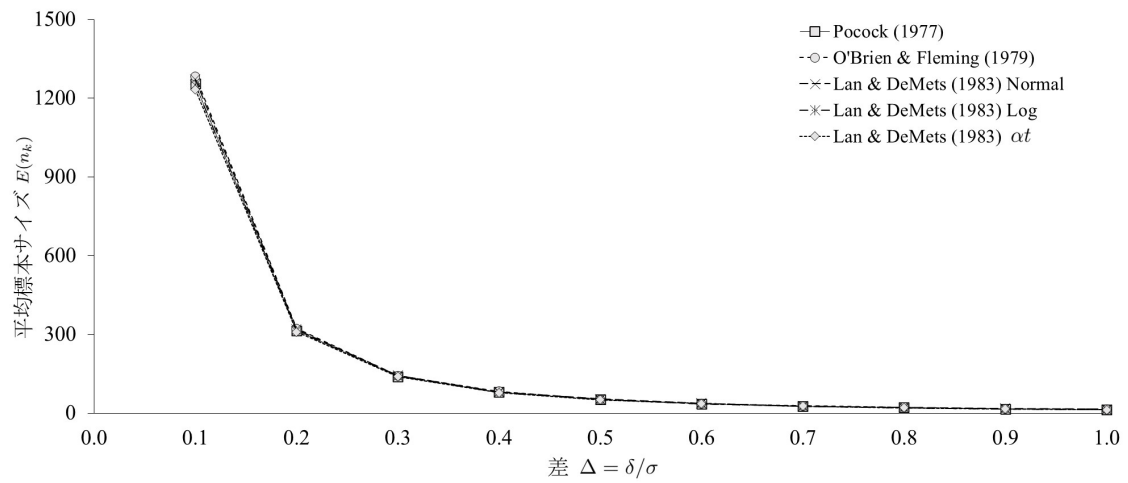


図 1.4: 差 Δ 別の平均標本サイズ $E(n_k)$ /群
両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 最大検定回数 $K = 5$, 検出力 $1 - \beta = 0.80$

表 1.41: 対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 (\mu_2 - \mu_1 = \delta)$ の下でのシミュレーション結果
 両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 最大検定回数 $K = 5$, 検出力 $1 - \beta = 0.90$
 Pocock(1977)

母平均		差	標本サイズ/群		シミュレーション
μ_1	μ_2	$\Delta = \delta/\sigma$	各段階 m	平均 $E(n_k)$	平均標本サイズ/群
0.0	0.1	0.1	508	1440.4	1441.7
0.0	0.2	0.2	127	360.1	359.5
0.0	0.3	0.3	57	160.8	160.4
0.0	0.4	0.4	32	90.3	90.2
0.0	0.5	0.5	21	58.5	58.5
0.0	0.6	0.6	15	41.1	41.1
0.0	0.7	0.7	11	30.2	30.0
0.0	0.8	0.8	8	22.6	22.5
0.0	0.9	0.9	7	18.7	18.6
0.0	1.0	1.0	6	15.5	15.5

表 1.42: 対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 (\mu_2 - \mu_1 = \delta)$ の下でのシミュレーション結果
 両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 最大検定回数 $K = 5$, 検出力 $1 - \beta = 0.90$
 O'Brien & Fleming(1979)

母平均		差	標本サイズ/群		シミュレーション
μ_1	μ_2	$\Delta = \delta/\sigma$	各段階 m	平均 $E(n_k)$	平均標本サイズ/群
0.0	0.1	0.1	432	1578.1	1580.6
0.0	0.2	0.2	108	394.5	394.8
0.0	0.3	0.3	48	175.3	173.7
0.0	0.4	0.4	27	98.6	98.6
0.0	0.5	0.5	18	64.9	65.1
0.0	0.6	0.6	12	43.8	44.0
0.0	0.7	0.7	9	32.7	32.8
0.0	0.8	0.8	7	25.3	25.2
0.0	0.9	0.9	6	21.1	21.0
0.0	1.0	1.0	5	17.4	17.2

表 1.43: 対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 (\mu_2 - \mu_1 = \delta)$ の下でのシミュレーション結果
 両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 最大検定回数 $K = 5$, 検出力 $1 - \beta = 0.90$
 Lan & DeMets(1983) Normal 法

母平均		差	標本サイズ/群		シミュレーション
μ_1	μ_2	$\Delta = \delta/\sigma$	各段階 m	平均 $E(n_k)$	平均標本サイズ/群
0.0	0.1	0.1	436	1556.4	1556.2
0.0	0.2	0.2	109	389.1	390.3
0.0	0.3	0.3	49	174.2	173.7
0.0	0.4	0.4	28	99.0	99.2
0.0	0.5	0.5	18	63.6	63.5
0.0	0.6	0.6	13	45.3	45.2
0.0	0.7	0.7	9	32.0	32.0
0.0	0.8	0.8	7	24.8	24.7
0.0	0.9	0.9	6	20.6	20.7
0.0	1.0	1.0	5	17.0	17.0

表 1.44: 対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 (\mu_2 - \mu_1 = \delta)$ の下でのシミュレーション結果
 両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 最大検定回数 $K = 5$, 検出力 $1 - \beta = 0.90$
 Lan & DeMets(1983) Log 法

母平均		差	標本サイズ/群		シミュレーション
μ_1	μ_2	$\Delta = \delta/\sigma$	各段階 m	平均 $E(n_k)$	平均標本サイズ/群
0.0	0.1	0.1	502	1438.5	1438.3
0.0	0.2	0.2	126	360.3	360.3
0.0	0.3	0.3	56	160.1	158.9
0.0	0.4	0.4	32	90.7	90.4
0.0	0.5	0.5	21	58.7	58.8
0.0	0.6	0.6	14	40.0	39.9
0.0	0.7	0.7	11	30.3	30.3
0.0	0.8	0.8	8	22.7	22.7
0.0	0.9	0.9	7	18.7	18.9
0.0	1.0	1.0	6	15.5	15.6

表 1.45: 対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 (\mu_2 - \mu_1 = \delta)$ の下でのシミュレーション結果
 両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 最大検定回数 $K = 5$, 検出力 $1 - \beta = 0.90$
 Lan & DeMets(1983) αt 法

母平均		差	標本サイズ/群		シミュレーション
μ_1	μ_2	$\Delta = \delta/\sigma$	各段階 m	平均 $E(n_k)$	平均標本サイズ/群
0.0	0.1	0.1	478	1437.3	1451.1
0.0	0.2	0.2	120	360.1	361.4
0.0	0.3	0.3	54	161.0	161.0
0.0	0.4	0.4	30	90.0	89.7
0.0	0.5	0.5	20	58.8	59.1
0.0	0.6	0.6	14	41.0	40.7
0.0	0.7	0.7	10	29.7	29.6
0.0	0.8	0.8	8	23.2	23.2
0.0	0.9	0.9	6	17.9	18.0
0.0	1.0	1.0	5	14.7	14.7

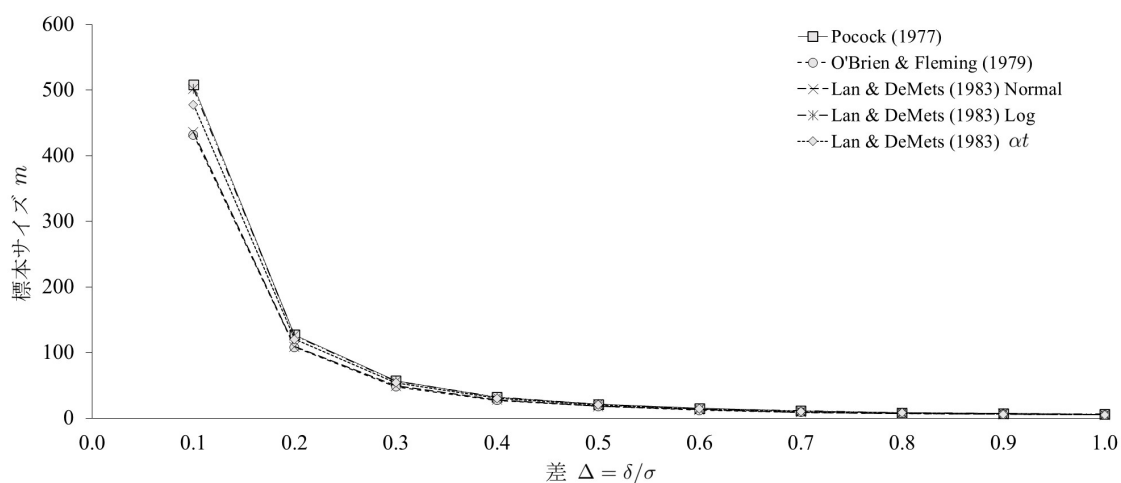


図 1.5: 差 Δ 別の各段階の必要標本サイズ m /群
 両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 最大検定回数 $K = 5$, 検出力 $1 - \beta = 0.90$

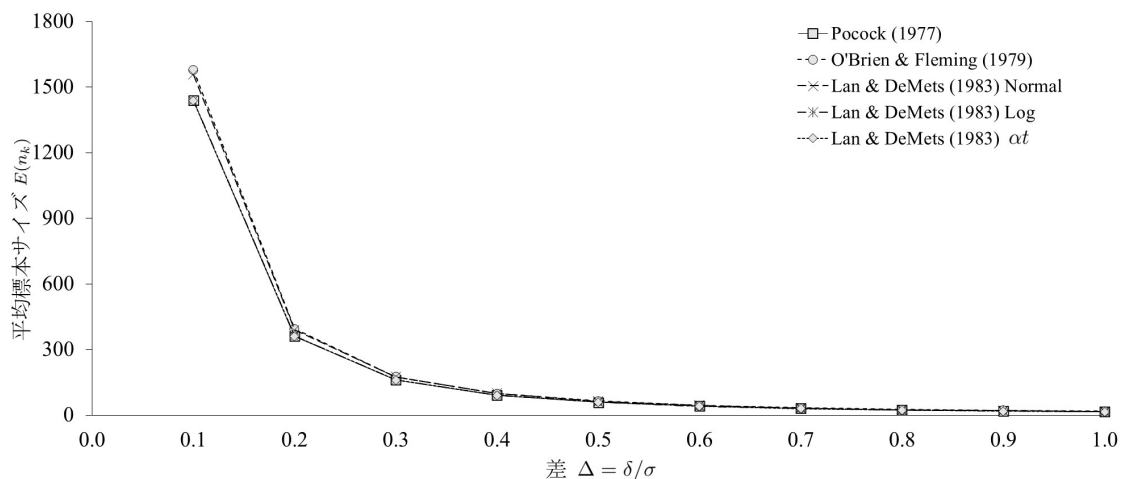


図 1.6: 差 Δ 別の平均標本サイズ $E(n_k)$ /群
両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 最大検定回数 $K = 5$, 検出力 $1 - \beta = 0.90$

表 1.36 から 1.45 および図 1.3 から 1.6 に示した結果から次のことがわかる。

- 仮説検定で帰無仮説 $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ を棄却する割合から検出力 $1 - \beta$ は保たれている。
- 2 群間の母平均の差 δ が小さくなるにつれて、検出力 $1 - \beta$ を満たす各群の各段階の必要標本サイズ m は大きくなる。
- 手法ごとに 2 群間の母平均の差 δ を固定した場合、目標とする検出力 $1 - \beta$ が高い方が各群の各段階の必要標本サイズ m は大きくなる。
- 平均標本サイズ $E(n_k)$ は、理論値とシミュレーションの結果は同様の値を示す。
- 検出力 $1 - \beta$ および 2 群間の母平均の差 δ を固定した場合、各群の各段階の必要標本サイズ m は O'Brien & Fleming(1979) と Lan & DeMets(1983) の Normal 法で小さく、次に Lan & DeMets(1983) の αt 法が小さく、Pocock(1977) と Lan & DeMets(1983) の Log 法がこれら手法の中で大きい、ただし、2 群間の母平均の差 δ が大きくなると手法間で各群の各段階の必要標本サイズ m はほとんど変わらない。
- 母分散既知の場合の 2 標本の仮説検定の結果である表 1.9 および 1.10 の各群の標本サイズ n に比べ、群逐次検定の平均標本サイズ $E(n_k)$ は小さいことから、群逐次検定では平均的に標本サイズを減らすことができる。

2 線形傾向を検出するための逐次検定

多くの分野で用量の増加に伴い、反応データがどのような傾向を示すか確認する用量反応試験が実施されている。この用量反応試験では反応データに回帰分析を適用することがある。小林 (1982) は 1 元配置分散分析で主効果が有意になった際、用量の増加に伴う反応データの傾向を 1 次式、2 次式、3 次式、... で表せる変動部分に分解する直交多項式分解を説明している。この直交多項式分解は直交多項式により対比係数とした標本平均間の直交対比を基にした統計量を用いている。この方法はあらかじめ決めていたすべての用量で得られた反応データが必要になるため、用量の低い方からいくつかの用量の反応データで傾向がみられたとしても途中で意思決定ができない。例えば、用量反応試験に使用する材料が高価であり、より少ない用量までの反応データで結論を得たいときには途中段階で統計学的に意思決定ができると効率的である。そこで逐次的な用量反応試験において、用量の増加に伴い、反応データの母平均の反応が線形かつ増加傾向であるか否かを調べるための検定方法を提案する。

いま、用量反応試験において D 個の用量に自然な順序があり、それらが等間隔に配置され、用量の低い方から用量番号 $1, 2, \dots, D$ とし、反応データを順次得ることを考え、各用量の反応データはその都度 m 個収集すると仮定する。用量番号 i ($i = 1, \dots, D, D \geq 3$) における反応データを $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}$ とし、各用量間で互いに独立で、それぞれ $N(\mu_i, \sigma^2)$ の正規分布に従うと仮定し、用量の 3 種類目から各用量の反応データが得られる都度それまでに観測された反応データを基に線形的な増加傾向があるか否かを検定することとする。

表 2.1: 用量反応試験の用量ごとの反応データの概要

(池谷 他 (2019) 表 2.1 を改変。元表の転載については出版元の許諾済み。)

用量番号	標本サイズ	累積標本サイズ	反応データ	母平均	母分散
i	m	n_i	x_{ij}	μ_i	σ^2
1	m	m	$x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1m}$	μ_1	σ^2
2	m	$2m$	$x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2m}$	μ_2	σ^2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	m	im	$x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}$	μ_i	σ^2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
D	m	Dm	$x_{D1}, x_{D2}, \dots, x_{Dm}$	μ_D	σ^2

Scheffé(1953) は興味のある母平均の比較の組み合わせを対比の形で表し、母平均の差を検定する多重比較法を提案している。中村 & 道家 (2011) は、複数の水準を持つ 2 群を仮定し、2 群間の効果の差を逐次的に比較するため、水準を順次取り込んだ母平均の対比を用いた仮説を逐次的に検定する多重比較法を議論している。また、中村 他 (2015) は、用量反応試験によって得られた 2 元表に対して、 2×2 対比を順次用いながら、2 群間の反応の平行性を逐次的に調べ、交互作用が存在する最小用量を検出するための検定を提案しており、これらの研究成果を本検定方法に応用する。本検定方法では逐次的に検定を行うことから、有意水準の調整には Lan & DeMets (1983) の α 消費関数を用いる。

ここでは表 2.1 に示す反応データにおいて用量番号 3 の反応が得られた段階を 1 段階とし、以降各用量の反応データが得られる k 段階 ($k = 1, \dots, K, K = D - 2$) までに得られた各用量の反応データの母平均 μ_i ($i = 1, \dots, k+2$) および対比係数 a_{ki} ($i = 1, \dots, k+2, \sum_{i=1}^{k+2} a_{ki} = 0$) を用いた $\sum_{i=1}^{k+2} a_{ki}\mu_i$ を基にした検定における仮説、検定統計量、Lan & DeMets(1983) の α 消費関数を用いた有意水準とそれに伴い決められる棄却限界値、決定規則、検出力および検出力を保つための標本サイズの決め方を説明する。有意水準、検出力および標本サイズについては、3 種類の α 消費関数それぞれに対して正規乱数を用いたモンテカルロシミュレーションを行い、理論値と実際に仮説検定を行った結果が同様の傾向を示すことを確認する。最後に事例研究として中村 他 (2007) の用量反応試験データに本提案手法を適用した結果を示す。

2.1 検定統計量

用量の低い方から番号を $i = 1, \dots, D$ 、各用量における反応データの標本サイズを m としたとき、確率変数 X_{ij} ($i = 1, \dots, D, j = 1, \dots, m$) が独立にそれぞれ同一の $N(\mu_i, \sigma^2)$ の正規分布に従うと仮定する。用量番号 3 までの母平均 μ_1, μ_2, μ_3 の傾向が線形的かつ増加傾向を示すかどうか検定を行い、この段階を 1 段階、以降次の用量の反応データが得られた段階を k ($k = 1, \dots, K, K = D - 2$) 段階とし、同様の検定を行うことを考える。検定の仮説は、各段階までに得られた反応データの母

平均 $\mu_1, \dots, \mu_{k+2}$ が線形かつ増加傾向を示す対立仮説 $H_1^{(k)}$ および水平である帰無仮説 $H_0^{(k)}$ とし,
 $\sum_{i=1}^{k+2} a_{ki} = 0$ を満たす対比係数 a_{ki} を用いて次のように表す.

$$\begin{aligned}
 &1 \text{ 段階} \quad \text{帰無仮説 } H_0^{(1)} : \sum_{i=1}^3 a_{1i} \mu_i = 0, \\
 &\quad \quad \quad \text{対立仮説 } H_1^{(1)} : \sum_{i=1}^3 a_{1i} \mu_i > 0, \\
 &2 \text{ 段階} \quad \text{帰無仮説 } H_0^{(2)} : \sum_{i=1}^4 a_{2i} \mu_i = 0, \\
 &\quad \quad \quad \text{対立仮説 } H_1^{(2)} : \sum_{i=1}^4 a_{2i} \mu_i > 0, \\
 &\quad \quad \quad \vdots \\
 &k \text{ 段階} \quad \text{帰無仮説 } H_0^{(k)} : \sum_{i=1}^{k+2} a_{ki} \mu_i = 0, \\
 &\quad \quad \quad \text{対立仮説 } H_1^{(k)} : \sum_{i=1}^{k+2} a_{ki} \mu_i > 0, \\
 &\quad \quad \quad \vdots \\
 &K \text{ 段階} \quad \text{帰無仮説 } H_0^{(K)} : \sum_{i=1}^{K+2} a_{Ki} \mu_i = 0, \\
 &\quad \quad \quad \text{対立仮説 } H_1^{(K)} : \sum_{i=1}^{K+2} a_{Ki} \mu_i > 0.
 \end{aligned}$$

ここで線形傾向を表す対比係数として、表 2.2 に示す 1 次の直交多項式による対比係数を a_{ki} として用いる.

表 2.2: 1 次の直交多項式を用いた対比係数

(池谷 他 (2019) 表 2.2 を改変. 元表の転載については出版元の許諾済み.)

反応データを得た 用量の個数	段階 k	対比係数						
		a_{k1}	a_{k2}	a_{k3}	a_{k4}	a_{k5}	a_{k6}	a_{k7}
3	1	-1	0	1	-	-	-	-
4	2	-3	-1	1	3	-	-	-
5	3	-2	-1	0	1	2	-	-
6	4	-5	-3	-1	1	3	5	-
7	5	-3	-2	-1	0	1	2	3

この対比係数を用いた 1 段階から 5 段階までの帰無仮説 $H_0^{(k)}$ および対立仮説 $H_1^{(k)}$ は、次のようになる.

$$\begin{aligned}
 &1 \text{ 段階} \quad \text{帰無仮説 } H_0^{(1)} : -\mu_1 + \mu_3 = 0, \\
 &\quad \quad \quad \text{対立仮説 } H_1^{(1)} : -\mu_1 + \mu_3 > 0, \\
 &2 \text{ 段階} \quad \text{帰無仮説 } H_0^{(2)} : -3\mu_1 - \mu_2 + \mu_3 + 3\mu_4 = 0, \\
 &\quad \quad \quad \text{対立仮説 } H_1^{(2)} : -3\mu_1 - \mu_2 + \mu_3 + 3\mu_4 > 0, \\
 &3 \text{ 段階} \quad \text{帰無仮説 } H_0^{(3)} : -2\mu_1 - \mu_2 + \mu_4 + 2\mu_5 = 0, \\
 &\quad \quad \quad \text{対立仮説 } H_1^{(3)} : -2\mu_1 - \mu_2 + \mu_4 + 2\mu_5 > 0, \\
 &4 \text{ 段階} \quad \text{帰無仮説 } H_0^{(4)} : -5\mu_1 - 3\mu_2 - \mu_3 + \mu_4 + 3\mu_5 + 5\mu_6 = 0, \\
 &\quad \quad \quad \text{対立仮説 } H_1^{(4)} : -5\mu_1 - 3\mu_2 - \mu_3 + \mu_4 + 3\mu_5 + 5\mu_6 > 0, \\
 &5 \text{ 段階} \quad \text{帰無仮説 } H_0^{(5)} : -3\mu_1 - 2\mu_2 - \mu_3 + \mu_5 + 2\mu_6 + 3\mu_7 = 0, \\
 &\quad \quad \quad \text{対立仮説 } H_1^{(5)} : -3\mu_1 - 2\mu_2 - \mu_3 + \mu_5 + 2\mu_6 + 3\mu_7 > 0.
 \end{aligned}$$

用量番号 $i (i = 1, \dots, D)$ での標本平均 $\bar{X}_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m X_{ij}$ は $N\left(\mu_i, \frac{\sigma^2}{m}\right)$ の正規分布に従う。また、 $k (k = 1, \dots, K, K = D - 2)$ 段階での標本平均 $\bar{X}_i (i = 1, \dots, k + 2)$ を用いた直交対比 $\sum_{i=1}^{k+2} a_{ki} \bar{X}_i$ は次の正規分布に従う。

$$\sum_{i=1}^{k+2} a_{ki} \bar{X}_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{k+2} a_{ki} \mu_i, \frac{\sigma^2}{m} \sum_{i=1}^{k+2} a_{ki}^2\right), k = 1, \dots, K.$$

このことから統計量 $Y_k = \sqrt{m/\sigma^2} \sum_{i=1}^{k+2} a_{ki} \bar{X}_i / \sqrt{\sum_{i=1}^{k+2} a_{ki}^2}$ は次の正規分布に従う。

$$Y_k = \sqrt{\frac{m}{\sigma^2}} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{k+2} a_{ki} \bar{X}_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{k+2} a_{ki}^2}} \sim N\left(\sqrt{\frac{m}{\sigma^2}} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{k+2} a_{ki} \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{k+2} a_{ki}^2}}, 1\right), k = 1, \dots, K. \quad (2.1)$$

次に統計量 Y_k をベクトルまたは行列で表現するため、 $k (k = 1, \dots, K)$ 段階までの各用量番号における反応データの標本平均 $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_{k+2}$ 、母平均 $\mu_1, \dots, \mu_{k+2}$ 、統計量 Y_k 、直交対比係数 $a_{k1}, \dots, a_{kk+2}$ を次のようにベクトルで表現する。

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{X}}_k &= (\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_{k+2})', \boldsymbol{\mu}_k = (\mu_1, \dots, \mu_{k+2})', \\ \mathbf{Y}_k &= (Y_1, \dots, Y_k)', \mathbf{a}_k = (a_{k1}, \dots, a_{kk+2})', k = 1, \dots, K. \end{aligned}$$

このとき $\mathbf{I}_{k+2}$ を $(k + 2)$ 次の単位行列とすると標本平均ベクトル $\bar{\mathbf{X}}_k$ は次のように表すことができる。

$$\bar{\mathbf{X}}_k \sim N_{k+2}\left(\boldsymbol{\mu}_k, \frac{\sigma^2}{m} \mathbf{I}_{k+2}\right), k = 1, \dots, K.$$

ここで直交対比係数ベクトル $\mathbf{a}_k$ を用いて係数ベクトル $\mathbf{c}_k$ および係数行列 $\mathbf{C}_k (k \times (k + 2))$ を次のように表す。

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_k (k \times 1) &= \frac{\mathbf{a}_k}{\sqrt{\mathbf{a}_k' \mathbf{a}_k}} \\ &= (c_{k1}, \dots, c_{kk+2})', \\ \mathbf{C}_k (k \times (k + 2)) &= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ c_{k-11} & c_{k-12} & c_{k-13} & c_{k-14} & \cdots & c_{k-1k+1} & 0 \\ c_{k1} & c_{k2} & c_{k3} & c_{k4} & \cdots & c_{kk+1} & c_{kk+2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

この係数ベクトル $\mathbf{c}_k$ および係数行列 $\mathbf{C}_k$ を用いて、(2.1) 式で示した統計量 Y_k 、その統計量ベクトル $\mathbf{Y}_k$ は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} Y_k &= \sqrt{\frac{m}{\sigma^2}} \mathbf{c}_k' \bar{\mathbf{X}}_k \sim N\left(\sqrt{\frac{m}{\sigma^2}} \mathbf{c}_k' \boldsymbol{\mu}_k, \mathbf{c}_k' \mathbf{c}_k\right) \equiv N\left(\sqrt{\frac{m}{\sigma^2}} \mathbf{c}_k' \boldsymbol{\mu}_k, 1\right) \quad k = 1, \dots, K. \\ \mathbf{Y}_k &= \sqrt{\frac{m}{\sigma^2}} \mathbf{C}_k \bar{\mathbf{X}}_k \\ &= \sqrt{\frac{m}{\sigma^2}} (\mathbf{c}_1' \bar{\mathbf{X}}_1, \dots, \mathbf{c}_k' \bar{\mathbf{X}}_k)' \sim N_k\left(\sqrt{\frac{m}{\sigma^2}} \mathbf{C}_k \boldsymbol{\mu}_k, \mathbf{C}_k \mathbf{C}_k'\right), \quad k = 1, \dots, K. \end{aligned} \quad (2.2)$$

$Y_l, Y_p (1 \leq l, p \leq k)$ の共分散 $Cov(Y_l, Y_p)$, 統計量ベクトル $\mathbf{Y}_k$ の分散共分散行列 $\mathbf{C}_k \mathbf{C}_k'$ はそれぞれ次のようになる。

$$Cov(Y_l, Y_p) = \begin{cases} \frac{\sum_{j=1}^{l+2} a_{lj} a_{pj}}{\sqrt{\left(\sum_{j=1}^{l+2} a_{lj}^2\right) \left(\sum_{j=1}^{p+2} a_{pj}^2\right)}}, & (l < p), \\ 1, & (l = p), \\ \frac{\sum_{j=1}^{p+2} a_{lj} a_{pj}}{\sqrt{\left(\sum_{j=1}^{l+2} a_{lj}^2\right) \left(\sum_{j=1}^{p+2} a_{pj}^2\right)}}, & (l > p). \end{cases}$$

$$\mathbf{C}_k \mathbf{C}_k' (k \times k) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sum_{j=1}^3 a_{1j} a_{2j}}{\sqrt{\left(\sum_{j=1}^3 a_{1j}^2\right) \left(\sum_{j=1}^4 a_{2j}^2\right)}} & \cdots & \frac{\sum_{j=1}^3 a_{1j} a_{kj}}{\sqrt{\left(\sum_{j=1}^3 a_{1j}^2\right) \left(\sum_{j=1}^{k+2} a_{kj}^2\right)}} \\ \frac{\sum_{j=1}^3 a_{1j} a_{2j}}{\sqrt{\left(\sum_{j=1}^3 a_{1j}^2\right) \left(\sum_{j=1}^4 a_{2j}^2\right)}} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{\sum_{j=1}^{k+1} a_{k-1j} a_{kj}}{\sqrt{\left(\sum_{j=1}^{k+1} a_{k-1j}^2\right) \left(\sum_{j=1}^{k+2} a_{kj}^2\right)}} \\ \frac{\sum_{j=1}^3 a_{1j} a_{kj}}{\sqrt{\left(\sum_{j=1}^3 a_{1j}^2\right) \left(\sum_{j=1}^{k+2} a_{kj}^2\right)}} & \cdots & \frac{\sum_{j=1}^{k+1} a_{k-1j} a_{kj}}{\sqrt{\left(\sum_{j=1}^{k+1} a_{k-1j}^2\right) \left(\sum_{j=1}^{k+2} a_{kj}^2\right)}} & 1 \end{pmatrix}.$$

用量番号 $i (i = 1, \dots, D)$ における反応データの不偏分散をそれぞれ

$$S_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^m (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}{m-1}, i = 1, \dots, D$$

とすると、次に示す統計量 U_i は自由度 $m-1$ の χ^2 分布に従う。

$$U_i = \frac{m-1}{\sigma^2} S_i^2 \sim \chi_{m-1}^2, i = 1, \dots, D.$$

また、用量間では独立性が成り立つところから統計量 U_i の用量番号 3 までの和を統計量 V_1 , 用量番号 $k+2 (k = 2, \dots, K)$ までの和を統計量 V_k とすると、 $V_k (k = 1, \dots, K)$ は次のように自由度 $(k+2)(m-1)$ の χ^2 分布に従う。

$$V_1 = \sum_{i=1}^3 U_i \sim \chi_{3(m-1)}^2,$$

$$V_k = V_1 + \sum_{i=4}^{k+2} U_i \sim \chi_{(k+2)(m-1)}^2, k = 2, \dots, K$$

統計量 Y_k および V_k を用いて、 $k (k = 1, \dots, K)$ 段階での統計量 T_k は次のような統計量を考える。帰無仮説 $H_0^{(k)}$ の下で、統計量 Y_k は標準正規分布 $N(0, 1)$, 統計量 V_k は自由度 $(k+2)(m-1)$ の χ^2 分布に従い、統計量は T_k は自由度 $(k+2)(m-1)$ の t 分布に従うことから、 T_k を k 段階での検定統計量とする。

$$T_k = \frac{Y_k}{\sqrt{\frac{V_k}{(k+2)(m-1)}}} \sim t_{(k+2)(m-1)}, k = 1, \dots, K.$$

2.2 有意水準と棄却限界値

この検定は群逐次検定と同様に最大で事前に決めた K 回の検定を繰り返すことから、有意水準 α は帰無仮説 $H_0^{(1)}$ から $H_0^{(K)}$ の下、1 段階から K 段階のいずれかで帰無仮説 $H_0^{(k)}$ を棄却する以下の確

率となる. なお, この検定は線形的な増加傾向があるか否かを確認するため, 片側検定となる.

$$\begin{aligned}
\alpha &= \Pr \left\{ (H_0^{(1)} \text{を棄却} \mid \sum_{i=1}^3 a_{1i}\mu_i = 0) \cup \left(H_0^{(1)} \text{を棄却せず, } H_0^{(2)} \text{を棄却} \mid \sum_{i=1}^4 a_{2i}\mu_i = 0 \right) \cup \cdots \cup \right. \\
&\quad \left(H_0^{(k-1)} \text{まで棄却せず, } H_0^{(k)} \text{を棄却} \mid \sum_{i=1}^{k+2} a_{ki}\mu_i = 0 \right) \cup \cdots \cup \\
&\quad \left. \left(H_0^{(K-1)} \text{まで棄却せず, } H_0^{(K)} \text{を棄却} \mid \sum_{i=1}^{K+2} a_{Ki}\mu_i = 0 \right) \right\} \\
&= \Pr \{ (T_1 > b_1) \cup (T_1 \leq b_1, T_2 > b_2) \cup \cdots \cup \\
&\quad (T_1 \leq b_1, \dots, T_{k-1} \leq b_{k-1}, T_k > b_k) \cup \cdots \cup \\
&\quad (T_1 \leq b_1, \dots, T_{K-1} \leq b_{K-1}, T_K > b_K) \} \\
&= \Pr(T_1 > b_1) + \Pr(T_1 \leq b_1, T_2 > b_2) + \cdots + \\
&\quad \Pr(T_1 \leq b_1, \dots, T_{k-1} \leq b_{k-1}, T_k > b_k) + \cdots + \\
&\quad \Pr(T_1 \leq b_1, \dots, T_{K-1} \leq b_{K-1}, T_K > b_K).
\end{aligned}$$

有意水準 α を満たす棄却限界値 $b_1, \dots, b_K$ を決める必要があるが, k 段階で初めて帰無仮説 $H_0^{(k)}$ を棄却する確率を $\alpha_k^* = \Pr(T_1 \leq b_1, \dots, T_{k-1} \leq b_{k-1}, T_k > b_k)$ としたとき, 群逐次検定と同様に次式を満たすように決めることができる.

$$\alpha_k = \alpha_1^* + \alpha_2^* + \cdots + \alpha_k^*, k = 1, \dots, K.$$

$$\begin{aligned}
\alpha_K &= \sum_{k=1}^K \alpha_k^* \\
&= \alpha,
\end{aligned}$$

$$\alpha = 1 - \Pr(T_1 \leq b_1, \dots, T_{K-1} \leq b_{K-1}, T_K \leq b_K).$$

実際に棄却限界値 $b_1, \dots, b_K$ を計算するには, 群逐次検定の Lan & DeMets(1983) と同様に k 段階までに消費する有意水準 $\alpha_k (k = 1, \dots, K)$ を決めて, 順次計算する必要がある. k 段階までに消費する有意水準 $\alpha_k (k = 1, \dots, K)$ の決め方は, 「1.4.2.3 Lan & DeMets(1983)」と同様に Normal 法, Log 法および αt 法の 3 種類の α 消費関数を用いることとし, 棄却限界値 $b_1, \dots, b_K$ の計算方法を次に示す.

$k (k = 1, \dots, K)$ 段階での検定統計量 T_k は自由度 $(k+2)(m-1)$ の t 分布に従い, 統計量ベクトル $\mathbf{Y}_k = (Y_1, \dots, Y_k)'$ は, (2.2) 式より帰無仮説 $H_0^{(k)}$ の下で平均ベクトル $\mathbf{0}$, 分散共分散行列 $\mathbf{C}_k \mathbf{C}_k'$ の k 変量正規分布に従う. このことから各段階で用いる棄却限界値 $b_1, \dots, b_K$ は, 次のように決めることができる.

- 1 段階

帰無仮説 $H_0^{(1)}$ の下, 検定統計量 T_1 は自由度 $3(m-1)$ の t 分布に従うことから, 自由度 $3(m-1)$ の t 分布の確率密度関数を用いて, 1 段階で帰無仮説 $H_0^{(1)}$ を棄却する確率 α_1 を満たす棄却限界値 b_1 を決める.

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= 1 - \Pr(T_1 \leq b_1) \\
&= 1 - \int_{-\infty}^{b_1} \frac{\Gamma\left(\frac{3(m-1)+1}{2}\right)}{\sqrt{3(m-1)}\pi\Gamma\left(\frac{3(m-1)}{2}\right)} \left(1 + \frac{t_1^2}{3(m-1)}\right)^{-\frac{3(m-1)+1}{2}} dt_1. \quad (2.3)
\end{aligned}$$

- $k (k = 2, \dots, K)$ 段階

帰無仮説 $H_0^{(1)}, \dots, H_0^{(k)}$ の下, 各段階の検定統計量 $T_1, \dots, T_k$ はそれぞれ自由度 $(i+2)(m-1) (i = 1, \dots, k)$ の t 分布に従う. この各段階の検定統計量 $T_1, \dots, T_k$ を構成する統計量ベクトル $\mathbf{Y}_k$ は平均ベクトル $\mathbf{0}$, 分散共分散行列 $\mathbf{C}_k \mathbf{C}_k'$ の k 変量正規分布に従い, 統計量 V_1 は自由度 $3(m-1)$ の χ^2 分布, 統計量 $U_4, \dots, U_{k+2}$ はそれぞれ自由度 $m-1$ の χ^2 分布に従うことから, k 変量正規分布 $N_k(\mathbf{0}, \mathbf{C}_k \mathbf{C}_k')$ の同時確率密度関数, 自由度 $3(m-1)$ および自由度 $m-1$ の χ^2 分布の確率密度関数を用いて, k 段階までに帰無仮説 $H_0^{(1)}, \dots, H_0^{(k)}$ のいずれかを棄却する確

率 α_k を満たす棄却限界値 b_k を決める.

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= 1 - \Pr(T_1 \leq b_1, \dots, T_k \leq b_k) \\
&= 1 - \Pr\left(\frac{Y_1}{\sqrt{\frac{V_1}{3(m-1)}}} \leq b_1, \dots, \frac{Y_k}{\sqrt{\frac{V_k}{(k+2)(m-1)}}} \leq b_k\right) \\
&= 1 - \Pr\left(Y_1 \leq b_1 \sqrt{\frac{V_1}{3(m-1)}}, \dots, Y_k \leq b_k \sqrt{\frac{V_k}{(k+2)(m-1)}}\right) \\
&= 1 - \Pr\left(Y_1 \leq b_1 \sqrt{\frac{V_1}{3(m-1)}}, \dots, Y_k \leq b_k \sqrt{\frac{V_1 + \sum_{i=4}^{k+2} U_i}{(k+2)(m-1)}}\right) \\
&= 1 - \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \int_0^\infty \Pr\left(Y_1 \leq b_1 \sqrt{\frac{v_1}{3(m-1)}}, \dots, Y_k \leq b_k \sqrt{\frac{v_1 + \sum_{i=4}^{k+2} u_i}{(k+2)(m-1)}}\right) \\
&\quad \times \frac{v_1^{\frac{3(m-1)}{2}-1} e^{-\frac{v_1}{2}}}{2^{\frac{3(m-1)}{2}} \Gamma\left(\frac{3(m-1)}{2}\right)} \times \frac{u_4^{\frac{m-1}{2}-1} e^{-\frac{u_4}{2}}}{2^{\frac{m-1}{2}} \Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \times \cdots \times \frac{u_{k+2}^{\frac{m-1}{2}-1} e^{-\frac{u_{k+2}}{2}}}{2^{\frac{m-1}{2}} \Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} dv_1 du_4 \cdots du_{k+2} \\
&= 1 - \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \int_0^\infty \left\{ \int_{-\infty}^{b_k \sqrt{\frac{v_1 + \sum_{i=4}^{k+2} u_i}{(k+2)(m-1)}}} \cdots \int_{-\infty}^{b_1 \sqrt{\frac{v_1}{3(m-1)}}} \frac{e^{-\frac{1}{2} \mathbf{y}_k' (\mathbf{C}_k \mathbf{C}_k')^{-1} \mathbf{y}_k}}{\sqrt{(2\pi)^k |\mathbf{C}_k \mathbf{C}_k'|}} dy_1 \cdots dy_k \right\} \\
&\quad \times \frac{v_1^{\frac{3(m-1)}{2}-1} e^{-\frac{v_1}{2}}}{2^{\frac{3(m-1)}{2}} \Gamma\left(\frac{3(m-1)}{2}\right)} \times \frac{u_4^{\frac{m-1}{2}-1} e^{-\frac{u_4}{2}}}{2^{\frac{m-1}{2}} \Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \times \cdots \times \frac{u_{k+2}^{\frac{m-1}{2}-1} e^{-\frac{u_{k+2}}{2}}}{2^{\frac{m-1}{2}} \Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} dv_1 du_4 \cdots du_{k+2}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

片側有意水準 $\alpha = 0.05$, 用量の個数 $D = 5$, 最大検定回数 $K = 3$, 各用量の標本サイズ $m = 5, 10, 20, 30, 40$ としたときの Normal 法, Log 法, αt 法の棄却限界値 $b_1, \dots, b_3$ を計算した結果を表 2.3 および図 2.1 から 2.5 に示す.

表 2.3: 片側有意水準 $\alpha = 0.05$, 用量の個数 $D = 5$, 最大検定回数 $K = 3$ の棄却限界値 b_k
(池谷 他 (2019) 表 3.1 へ $m = 5$ を追加して改変. 元表の転載については出版元の許諾済み.)

手法	各用量の標本サイズ m	棄却限界値		
		b_1	b_2	b_3
Normal 法	5	4.1388	2.3469	1.8143
	10	3.5672	2.2293	1.7650
	20	3.3652	2.1832	1.7451
	30	3.3066	2.1692	1.7391
	40	3.2787	2.1625	1.7362
Log 法	5	2.2340	2.1879	2.1937
	10	2.0992	2.0956	2.1211
	20	2.0470	2.0591	2.0921
	30	2.0312	2.0481	2.0833
	40	2.0237	2.0427	2.0790
αt 法	5	2.4030	2.1881	2.0644
	10	2.2426	2.0945	2.0009
	20	2.1809	2.0575	1.9755
	30	2.1624	2.0463	1.9678
	40	2.1535	2.0408	1.9641

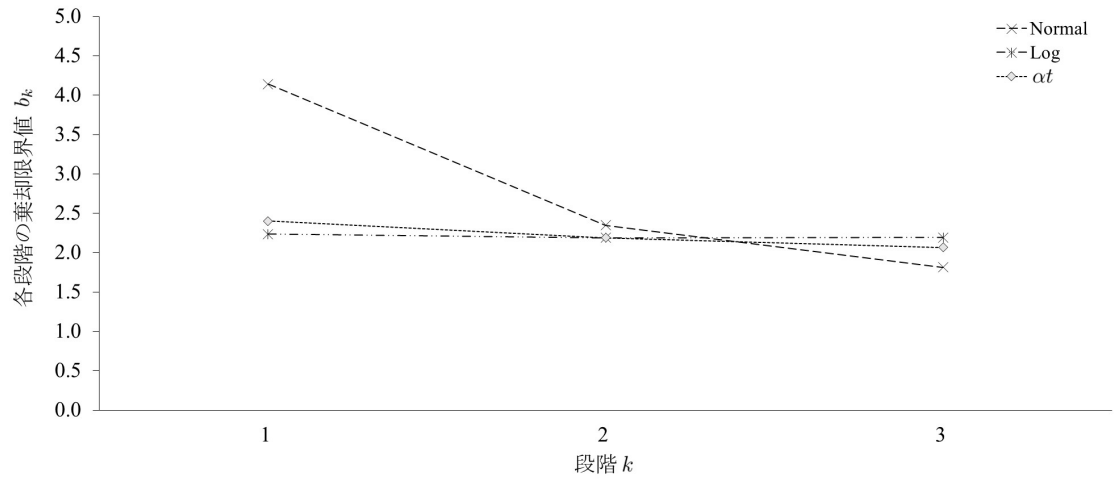


図 2.1: Normal 法, Log 法, αt 法の棄却限界値 b_k
片側有意水準 $\alpha = 0.05$, 用量の個数 $D = 5$, 最大検定回数 $K = 3$, 各用量の標本サイズ $m = 5$

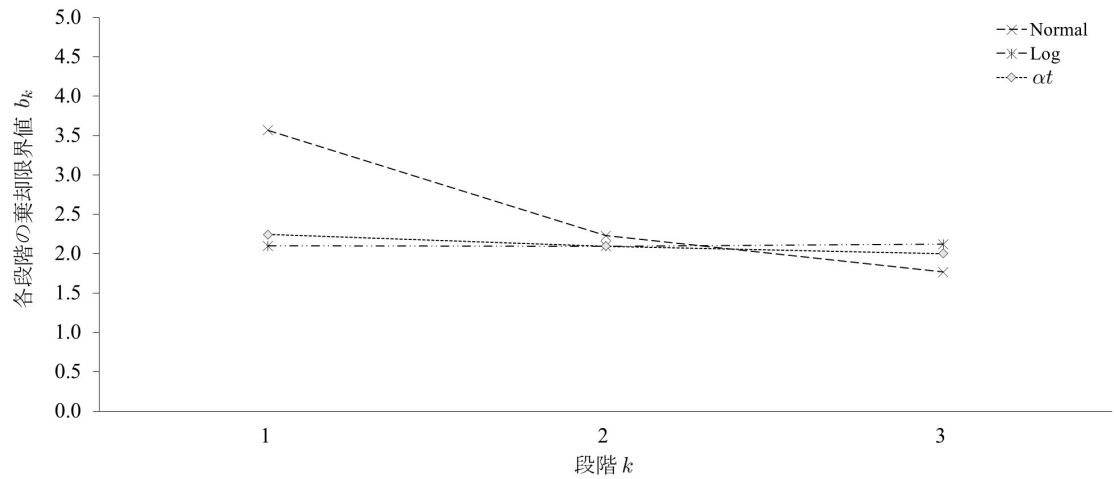


図 2.2: Normal 法, Log 法, αt 法の棄却限界値 b_k
片側有意水準 $\alpha = 0.05$, 用量の個数 $D = 5$, 最大検定回数 $K = 3$, 各用量の標本サイズ $m = 10$
(池谷 他 (2019) 図 3.1 を改変. 元表の転載については出版元の許諾済み.)

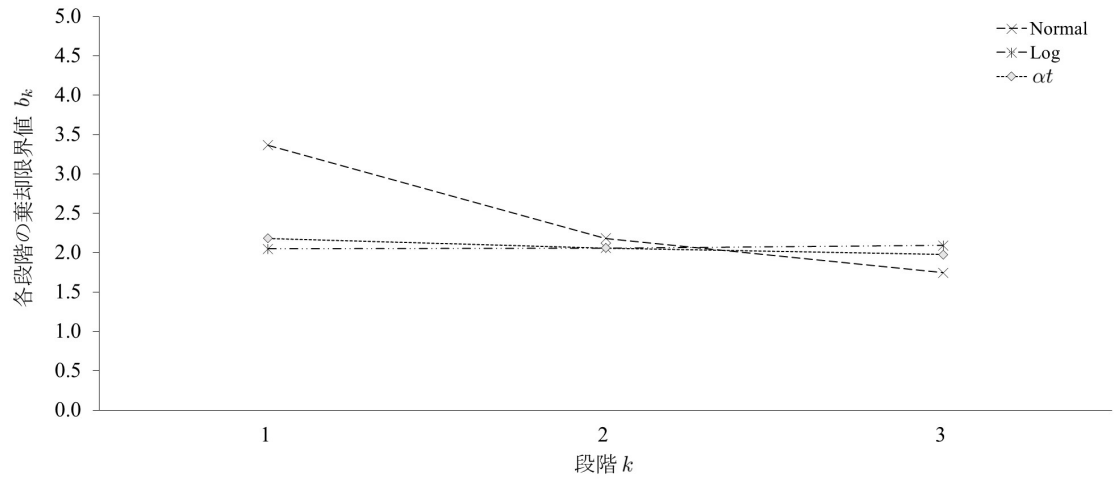


図 2.3: Normal 法, Log 法, αt 法の棄却限界値 b_k

片側有意水準 $\alpha = 0.05$, 用量の個数 $D = 5$, 最大検定回数 $K = 3$, 各用量の標本サイズ $m = 20$
(池谷 他 (2019) 図 3.2 を改変. 元表の転載については出版元の許諾済み.)

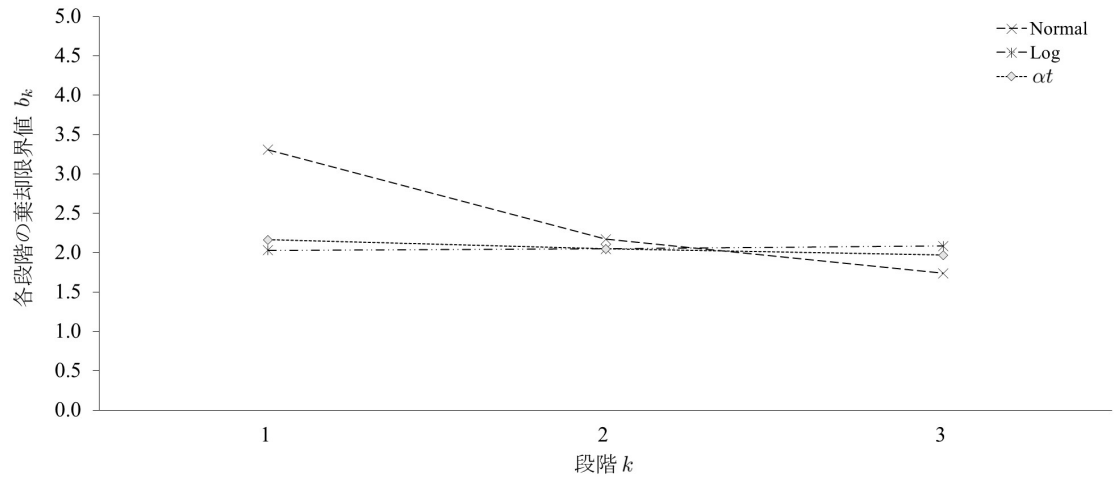


図 2.4: Normal 法, Log 法, αt 法の棄却限界値 b_k

片側有意水準 $\alpha = 0.05$, 用量の個数 $D = 5$, 最大検定回数 $K = 3$, 各用量の標本サイズ $m = 30$
(池谷 他 (2019) 図 3.3 を改変. 元表の転載については出版元の許諾済み.)

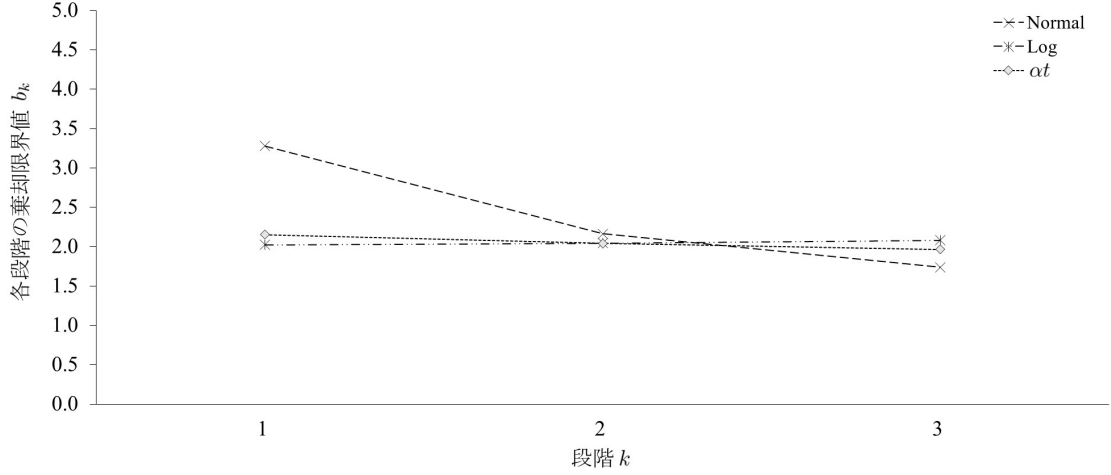


図 2.5: Normal 法, Log 法, αt 法の棄却限界値 b_k

片側有意水準 $\alpha = 0.05$, 用量の個数 $D = 5$, 最大検定回数 $K = 3$, 各用量の標本サイズ $m = 40$ (池谷 他 (2019) 図 3.4 を改変. 元表の転載については出版元の許諾済み.)

表 2.3 および図 2.1 から 2.5 により, 棄却限界値 b_k について, 以下のことがわかる.

- 標本サイズ m を固定した場合, 棄却限界値 b_1 は前半の段階で有意水準を消費しない手法である Normal 法が 3 手法の中で最も大きく, 次いで αt 法が大きく, 前半で有意水準を消費する手法である Log 法が 3 手法の中で最も小さくなっている. また, 段階が進むにつれて Normal 法は小さくなり, Log 法と αt 法ではほとんど変わらないが, 3 段階で Log 法と αt 法の大きさが入れ替わり, 各手法の有意水準の消費の仕方の特徴が棄却限界値 b_k に表れている.
- いずれの手法も標本サイズ m が増加するにつれて, 各段階の棄却限界値 b_k は小さくなっている. これは検定統計量が t 分布に従い, 標本サイズ m が増加するに伴いその自由度が増加したことによるものと考えられる.

2.3 決定規則

この提案手法において, 用量番号 1 から 2 までの反応データが収集され, 用量番号 3 以降では反応データを収集次第, $k(k = 1, \dots, K)$ 段階まで互いに独立な $n_k = (k+2)m$ 個の反応データ $x_{11}, \dots, x_{k+2m}$ から検定統計量 T_k の実現値 t_k を求め, 事前に決めた片側有意水準 α に対応した棄却限界値 b_k を用いて, 以下のように判断する.

• 1 段階

- $t_1 > b_1$ ならば, 帰無仮説 $H_0^{(1)} : \sum_{i=1}^3 a_{1i}\mu_i = 0$ を棄却し, 線形傾向を検出したとして, 検定を終了する.
- $t_1 \leq b_1$ ならば, 決定を保留し, 次の用量番号の反応データを収集し, t_2 を基に 2 段階で検定を行う.

• $k(k = 2, \dots, K-1)$ 段階

- $t_k > b_k$ ならば, 帰無仮説 $H_0^{(k)} : \sum_{i=1}^{k+2} a_{ki}\mu_i = 0$ を棄却し, 線形傾向を検出したとして, 検定を終了する.
- $t_k \leq b_k$ ならば, 決定を保留し, 次の用量番号の反応データを収集し, t_{k+1} を基に $(k+1)$ 段階で検定を行う.

• K 段階

- $t_K > b_K$ ならば, 帰無仮説 $H_0^{(K)} : \sum_{i=1}^{K+2} a_{Ki}\mu_i = 0$ を棄却し, 線形傾向を検出したとして, 検定を終了する.
- $t_K \leq b_K$ ならば, 帰無仮説 $H_0^{(K)} : \sum_{i=1}^{K+2} a_{Ki}\mu_i = 0$ を受容し, 線形傾向を検出できなかったとし, 検定を終了する.

2.4 検出力

この提案手法の検出力を考えるため、対立仮説として用量番号 $r(r > 1)$ 以降のどこか 1 つ以上の用量で線形かつ増加傾向を示す次のような母平均の配置を考える。

$$\mu_1 = \cdots = \mu_{r-1} < \mu_r < \cdots < \mu_{s-1} < \mu_s = \mu_{s+1} = \cdots = \mu_D, r > 1, s \leq D. \quad (2.5)$$

また、線形的な増加であることから増加の仕方は c を定数とし、次のように仮定する。

$$\mu_i < \mu_{i+1} = \mu_i + c, r-1 \leq i \leq s-1.$$

ここで

$$\delta_k = \begin{cases} 0, & (r > 3, k = 1, \dots, r-3), \\ \sqrt{\frac{m}{\sigma^2}} \mathbf{c}'_k \boldsymbol{\mu}_k > 0, & (r > 3, k = r-2, \dots, K), \\ \sqrt{\frac{m}{\sigma^2}} \mathbf{c}'_k \boldsymbol{\mu}_k > 0, & (r \leq 3, k = 1, \dots, K) \end{cases}$$

とおくと、対立仮説である (2.5) の下、(2.1) および (2.2) 式は次のように表すことができる。

$$Y_k \sim N(\delta_k, 1), \quad k = 1, \dots, K.$$

$$\mathbf{Y}_k \sim N_k(\boldsymbol{\delta}_k, \mathbf{C}_k \mathbf{C}'_k), \quad k = 1, \dots, K. \quad (2.6)$$

ここで

$$\boldsymbol{\delta}_k = \begin{cases} (0, 0, \dots, 0)', & (r > 3, k = 1, \dots, r-3), \\ (0, 0, \dots, \delta_{r-2}, \dots, \delta_k)', & (r > 3, k = r-2, \dots, K), \\ (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k)', & (r \leq 3, k = 1, \dots, K) \end{cases}$$

である。提案手法の検出力 $1 - \beta$ は、対立仮説である (2.5) の下で帰無仮説 $H_0^{(1)}$ から $H_0^{(K)}$ のいずれかを棄却する次式で示す確率となり、統計量ベクトル $\mathbf{Y}_K$ は平均ベクトル $\boldsymbol{\delta}_K$ 、分散共分散行列 $\mathbf{C}_K \mathbf{C}'_K$ の K 変量正規分布に従い、統計量 V_1 は自由度 $3(m-1)$ の χ^2 分布、統計量 $U_4, \dots, U_{K+2}$ はそれぞれ自由度 $m-1$ の χ^2 分布に従うことから、 K 変量正規分布 $N_K(\boldsymbol{\delta}_K, \mathbf{C}_K \mathbf{C}'_K)$ の同時確率密度関数、自由度 $3(m-1)$ および自由度 $m-1$ の χ^2 分布の確率密度関数を用いて計算することができる。

$$1 - \beta = 1 - \Pr(T_1 \leq b_1, \dots, T_K \leq b_K | \boldsymbol{\delta}_K)$$

$$\begin{aligned} &= 1 - \Pr\left(\frac{Y_1}{\sqrt{\frac{V_1}{3(m-1)}}} \leq b_1, \dots, \frac{Y_K}{\sqrt{\frac{V_K}{(K+2)(m-1)}}} \leq b_K \middle| \boldsymbol{\delta}_K\right) \\ &= 1 - \Pr\left(Y_1 \leq b_1 \sqrt{\frac{V_1}{3(m-1)}}, \dots, Y_K \leq b_K \sqrt{\frac{V_K}{(K+2)(m-1)}} \middle| \boldsymbol{\delta}_K\right) \\ &= 1 - \Pr\left(Y_1 \leq b_1 \sqrt{\frac{V_1}{3(m-1)}}, \dots, Y_K \leq b_K \sqrt{\frac{V_1 + \sum_{i=4}^{K+2} U_i}{(K+2)(m-1)}} \middle| \boldsymbol{\delta}_K\right) \\ &= 1 - \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \int_0^\infty \Pr\left(Y_1 \leq b_1 \sqrt{\frac{v_1}{3(m-1)}}, \dots, Y_K \leq b_K \sqrt{\frac{v_1 + \sum_{i=4}^{K+2} u_i}{(K+2)(m-1)}} \middle| \boldsymbol{\delta}_K\right) \\ &\quad \times \frac{v_1^{\frac{3(m-1)}{2}-1} e^{-\frac{v_1}{2}}}{2^{\frac{3(m-1)}{2}} \Gamma\left(\frac{3(m-1)}{2}\right)} \times \frac{u_4^{\frac{m-1}{2}-1} e^{-\frac{u_4}{2}}}{2^{\frac{m-1}{2}} \Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \times \cdots \times \frac{u_{K+2}^{\frac{m-1}{2}-1} e^{-\frac{u_{K+2}}{2}}}{2^{\frac{m-1}{2}} \Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} dv_1 du_4 \cdots du_{K+2} \\ &= 1 - \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \int_0^\infty \left\{ \int_{-\infty}^{b_K \sqrt{\frac{v_1 + \sum_{i=4}^{K+2} u_i}{(K+2)(m-1)}}} \cdots \int_{-\infty}^{b_1 \sqrt{\frac{v_1}{3(m-1)}}} \frac{e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}_K - \boldsymbol{\delta}_K)'(\mathbf{C}_K \mathbf{C}'_K)^{-1}(\mathbf{y}_K - \boldsymbol{\delta}_K)}}{\sqrt{(2\pi)^K |\mathbf{C}_K \mathbf{C}'_K|}} dy_1 \cdots dy_K \right\} \\ &\quad \times \frac{v_1^{\frac{3(m-1)}{2}-1} e^{-\frac{v_1}{2}}}{2^{\frac{3(m-1)}{2}} \Gamma\left(\frac{3(m-1)}{2}\right)} \times \frac{u_4^{\frac{m-1}{2}-1} e^{-\frac{u_4}{2}}}{2^{\frac{m-1}{2}} \Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \times \cdots \times \frac{u_{K+2}^{\frac{m-1}{2}-1} e^{-\frac{u_{K+2}}{2}}}{2^{\frac{m-1}{2}} \Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} dv_1 du_4 \cdots du_{K+2}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

また、対立仮説である (2.5) の下で、 $k(k = 1, \dots, K)$ 段階までに帰無仮説 $H_0^{(1)}$ から $H_0^{(k)}$ のいずれかを棄却する確率を π_k 、 k 段階で初めて帰無仮説 $H_0^{(k)}$ を棄却する確率を π_k^* とすると次式が成り立ち、統計量ベクトル $\mathbf{Y}_k$ は平均ベクトル $\boldsymbol{\delta}_k$ 、分散共分散行列 $\mathbf{C}_k \mathbf{C}_k'$ の k 変量正規分布に従い、統計量 V_1 は自由度 $3(m-1)$ の χ^2 分布、統計量 $U_4, \dots, U_{k+2}$ はそれぞれ自由度 $m-1$ の χ^2 分布に従うことから、 k 変量正規分布 $N_k(\boldsymbol{\delta}_k, \mathbf{C}_k \mathbf{C}_k')$ の同時確率密度関数、自由度 $3(m-1)$ および自由度 $m-1$ の χ^2 分布の確率密度関数を用いて計算することができる。

$$\begin{aligned} \pi_k &= 1 - \Pr(T_1 \leq b_1, \dots, T_k \leq b_k | \boldsymbol{\delta}_k) \\ &= 1 - \Pr\left(\frac{Y_1}{\sqrt{\frac{V_1}{3(m-1)}}} \leq b_1, \dots, \frac{Y_k}{\sqrt{\frac{V_k}{(k+2)(m-1)}}} \leq b_k \middle| \boldsymbol{\delta}_k\right) \\ &= 1 - \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \int_0^\infty \left\{ \int_{-\infty}^{b_k \sqrt{\frac{v_1 + \sum_{i=4}^{k+2} u_i}{(k+2)(m-1)}}} \cdots \int_{-\infty}^{b_1 \sqrt{\frac{v_1}{3(m-1)}}} \frac{e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}_k - \boldsymbol{\delta}_k)'(\mathbf{C}_k \mathbf{C}_k')^{-1}(\mathbf{y}_k - \boldsymbol{\delta}_k)}}{\sqrt{(2\pi)^k |\mathbf{C}_k \mathbf{C}_k'|}} dy_1 \cdots dy_k \right\} \\ &\quad \times \frac{v_1^{\frac{3(m-1)}{2}-1} e^{-\frac{v_1}{2}}}{2^{\frac{3(m-1)}{2}} \Gamma\left(\frac{3(m-1)}{2}\right)} \times \frac{u_4^{\frac{m-1}{2}-1} e^{-\frac{u_4}{2}}}{2^{\frac{m-1}{2}} \Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \times \cdots \times \frac{u_{k+2}^{\frac{m-1}{2}-1} e^{-\frac{u_{k+2}}{2}}}{2^{\frac{m-1}{2}} \Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} dv_1 du_4 \cdots du_{k+2}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \pi_k^* &= \Pr(T_1 \leq b_1, \dots, T_k > b_k | \boldsymbol{\delta}_k) \\ &= \pi_k - \pi_{k-1}, \pi_0 = 0, k = 1, \dots, K. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 - \beta &= \pi_K \\ &= \sum_{k=1}^K \pi_k^*. \end{aligned}$$

検出力 $1 - \beta$ の計算には、片側有意水準 α 、棄却限界値 $b_1, \dots, b_K$ 、各用量の母平均の配置 $\mu_1, \dots, \mu_D$ の想定値、母分散 σ^2 の想定値、各用量の標本サイズ m が必要となる。

2.5 必要標本サイズ

提案手法の対象となるデータの収集計画を立てるとき、片側有意水準 α と検出力 $1 - \beta$ を考慮した各用量の標本サイズ m を決める必要があり、その手順を以下に示す。

1. 最大検定回数 K (用量の個数 $D - 2$)、使用する手法、片側有意水準 α 、目標とする検出力 $1 - \beta$ を決める。
2. 各用量の母平均の配置の想定値 $\mu_1, \dots, \mu_D$ を与える。
3. 各用量の標本サイズ $m_0 = 2$ を与え、手法に合わせた棄却限界値 $b_1, \dots, b_K$ を (2.3) および (2.4) 式より算出する、
4. 棄却限界値 $b_1, \dots, b_K$ 、各用量の仮の標本サイズ m_0 、各用量の母平均の配置の想定値 $\mu_1, \dots, \mu_D$ 、未知の母分散 σ^2 の想定値を用いて (2.7) 式より算出した検出力を $1 - \beta_0$ とする。
5. $1 - \beta_0 < 1 - \beta$ なら各用量の標本サイズ $m_0 = m_0 + 1$ として手順 3 に戻り、 $1 - \beta_0 \geq 1 - \beta$ ならば m_0 を各用量の標本サイズ m とする。

また、提案手法では途中段階で帰無仮説 $H_0^{(1)}, \dots, H_0^{(K-1)}$ のいずれかを棄却し、最大検定回数である K 段階までの各群の累積標本サイズ $n_K = (K + 2)m = Dm$ の反応データを収集しないことがある。このことから試験全体で標本サイズが平均的にどのくらいになるかを示す指標として群逐次検定と同様に平均標本サイズ $E(n_k)$ を考える。算出方法は群逐次検定と同様に (1.13) 式で求めることができる。

2.6 シミュレーションと数値例

2.6.1 帰無仮説 $H_0^{(3)}: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = 0$ の下でのシミュレーション

提案手法において最大検定回数 $K = 3$ (用量の個数 $D = 5$) として、帰無仮説 $H_0^{(3)}: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = 0$ 、母分散 $\sigma^2 = 5.0^2$ の下で、各用量の標本サイズ m のいくつかのパターンで $N(0, 5.0^2)$

の正規分布に従う正規乱数を各用量で m 個ずつ発生させ、片側有意水準 $\alpha = 0.05$ で仮説検定を行うシミュレーションを行う。シミュレーション回数に対して帰無仮説 $H_0^{(1)}$ から $H_0^{(3)}$ のいずれかを棄却した割合から片側有意水準 α が設定通りになっているか評価した結果を表 2.4 に示す。

表 2.4: 帰無仮説 $H_0^{(k)} : \sum_{i=1}^{k+2} a_{ki}\mu_i = 0, \mu_i = 0$ の下でのシミュレーション結果
片側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 5.0^2$, 用量の個数 $D = 5$, 最大検定回数 $K = 3$

手法	各用量の標本サイズ m	シミュレーション 回数	帰無仮説 $H_0^{(k)}$ を棄却	
			回数	割合
Normal 法	5	10000	528	0.0528
	10	10000	503	0.0503
	20	10000	486	0.0486
	30	10000	440	0.0440
	40	10000	478	0.0478
Log 法	5	10000	508	0.0508
	10	10000	492	0.0492
	20	10000	493	0.0493
	30	10000	531	0.0531
	40	10000	482	0.0482
αt 法	5	10000	505	0.0505
	10	10000	502	0.0502
	20	10000	520	0.0520
	30	10000	529	0.0529
	40	10000	482	0.0482

表 2.4 に示した結果から帰無仮説 $H_0^{(k)}$ の下では、各用量の標本サイズ m によらず片側有意水準 α が保たれていることがわかる。

2.6.2 対立仮説 $H_1^{(3)} : \sum_{i=1}^5 a_{3i}\mu_i > 0$ の下でのシミュレーション

次に最大検定回数 $K = 3$ (用量の個数 $D = 5$) として、対立仮説 $H_1^{(3)} : \sum_{i=1}^5 a_{3i}\mu_i > 0$, 母分散 $\sigma^2 = 5.0^2$ の下で、各用量の標本サイズ m のいくつかのパターンで片側有意水準 $\alpha = 0.05$ としたときの検出力 $1 - \beta$ を計算した結果を示す。対立仮説 $H_1^{(3)} : \sum_{i=1}^5 a_{3i}\mu_i > 0$ の下での各用量の母平均の配置 $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5$ は、表 2.5 に示すパターンを用いる。

表 2.5: 対立仮説 $H_1^{(3)} : \sum_{i=1}^5 a_{3i}\mu_i > 0$ として用いる母平均の配置のパターン

パターン No.	母平均の配置				
	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5
1	1.0	1.0	1.0	1.0	2.0
2	1.0	1.0	1.0	2.0	3.0
3	1.0	1.0	2.0	2.0	2.0
4	1.0	1.0	2.0	3.0	3.0
5	1.0	1.0	2.0	3.0	4.0
6	1.0	2.0	2.0	2.0	2.0
7	1.0	2.0	3.0	3.0	3.0
8	1.0	2.0	3.0	4.0	4.0
9	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0

また, 用量番号 $i (i = 1, \dots, 5)$ においてそれぞれ $N(\mu_i, 5.0^2)$ の正規分布に従う正規乱数を各用量で m 個ずつ発生させ, 片側有意水準 $\alpha = 0.05$ で仮説検定を行うシミュレーションを行い, 帰無仮説 $H_0^{(1)}$ から $H_0^{(3)}$ のいずれかを棄却した割合から検出力 $1 - \beta$ と同様になっているか評価した結果を表 2.6 から 2.14 および図 2.6 から 2.10 に示す.

表 2.6: 対立仮説 $H_1^{(3)} : \sum_{i=1}^5 a_{3i}\mu_i > 0$ の下でのシミュレーション結果

片側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 5.0^2$, 用量の個数 $D = 5$, 最大検定回数 $K = 3$

母平均の配置パターン 1: $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5) = (1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 2.0)$

(池谷 他 (2019) 表 3.2 から 3.4 へ $m = 5$ およびシミュレーション結果を追加して改変.

元表の転載については出版元の許諾済み.)

手法	各用量の標本サイズ	検出力 $1 - \beta$	シミュレーション 回数	帰無仮説 $H_0^{(k)}$ を棄却	
	m			回数	割合
Normal 法	5	0.0786	10000	771	0.0771
	10	0.0959	10000	940	0.0940
	20	0.1254	10000	1288	0.1288
	30	0.1524	10000	1537	0.1537
	40	0.1783	10000	1746	0.1746
Log 法	5	0.0631	10000	659	0.0659
	10	0.0720	10000	705	0.0705
	20	0.0881	10000	964	0.0964
	30	0.1040	10000	1067	0.1067
	40	0.1200	10000	1217	0.1217
at 法	5	0.0672	10000	626	0.0626
	10	0.0783	10000	773	0.0773
	20	0.0983	10000	1025	0.1025
	30	0.1174	10000	1161	0.1161
	40	0.1365	10000	1310	0.1310

表 2.7: 対立仮説 $H_1^{(3)} : \sum_{i=1}^5 a_{3i}\mu_i > 0$ の下でのシミュレーション結果

片側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 5.0^2$, 用量の個数 $D = 5$, 最大検定回数 $K = 3$
 母平均の配置パターン 2: $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5) = (1.0, 1.0, 1.0, 2.0, 3.0)$
 (池谷 他 (2019) 表 3.2 から 3.4 へ $m = 5$ およびシミュレーション結果を追加して改変.
 元表の転載については出版元の許諾済み.)

手法	各用量の標本サイズ m	検出力 $1 - \beta$	シミュレーション 回数	帰無仮説 $H_0^{(k)}$ を棄却	
				回数	割合
Normal 法	5	0.1553	10000	1556	0.1556
	10	0.2351	10000	2321	0.2321
	20	0.3775	10000	3818	0.3818
	30	0.5015	10000	4967	0.4967
	40	0.6066	10000	5956	0.5956
Log 法	5	0.1111	10000	1153	0.1153
	10	0.1646	10000	1696	0.1696
	20	0.2728	10000	2802	0.2802
	30	0.3798	10000	3725	0.3725
	40	0.4805	10000	4726	0.4726
αt 法	5	0.1239	10000	1292	0.1292
	10	0.1856	10000	1857	0.1857
	20	0.3056	10000	3046	0.3046
	30	0.4193	10000	4178	0.4178
	40	0.5228	10000	5307	0.5307

表 2.8: 対立仮説 $H_1^{(3)} : \sum_{i=1}^5 a_{3i}\mu_i > 0$ の下でのシミュレーション結果

片側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 5.0^2$, 用量の個数 $D = 5$, 最大検定回数 $K = 3$
 母平均の配置パターン 3: $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5) = (1.0, 1.0, 2.0, 2.0, 2.0)$
 (池谷 他 (2019) 表 3.2 から 3.4 へ $m = 5$ およびシミュレーション結果を追加して改変.
 元表の転載については出版元の許諾済み.)

手法	各用量の標本サイズ m	検出力 $1 - \beta$	シミュレーション 回数	帰無仮説 $H_0^{(k)}$ を棄却	
				回数	割合
Normal 法	5	0.1088	10000	1087	0.1087
	10	0.1476	10000	1519	0.1519
	20	0.2151	10000	2131	0.2131
	30	0.2768	10000	2786	0.2786
	40	0.3347	10000	3389	0.3389
Log 法	5	0.1035	10000	1060	0.1060
	10	0.1400	10000	1466	0.1466
	20	0.2033	10000	1996	0.1996
	30	0.2616	10000	2684	0.2684
	40	0.3168	10000	3159	0.3159
αt 法	5	0.1054	10000	1114	0.1114
	10	0.1431	10000	1466	0.1466
	20	0.2085	10000	2031	0.2031
	30	0.2686	10000	2684	0.2684
	40	0.3251	10000	3219	0.3219

表 2.9: 対立仮説 $H_1^{(3)} : \sum_{i=1}^5 a_{3i}\mu_i > 0$ の下でのシミュレーション結果

片側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 5.0^2$, 用量の個数 $D = 5$, 最大検定回数 $K = 3$
 母平均の配置パターン 4: $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5) = (1.0, 1.0, 2.0, 3.0, 3.0)$
 (池谷 他 (2019) 表 3.2 から 3.4 へ $m = 5$ およびシミュレーション結果を追加して改変.
 元表の転載については出版元の許諾済み.)

手法	各用量の標本サイズ m	検出力 $1 - \beta$	シミュレーション 回数	帰無仮説 $H_0^{(k)}$ を棄却	
				回数	割合
Normal 法	5	0.2001	10000	2011	0.2011
	10	0.3161	10000	3105	0.3105
	20	0.5097	10000	5117	0.5117
	30	0.6585	10000	6504	0.6504
	40	0.7677	10000	7592	0.7592
Log 法	5	0.1639	10000	1688	0.1688
	10	0.2595	10000	2537	0.2537
	20	0.4323	10000	4322	0.4322
	30	0.5784	10000	5738	0.5738
	40	0.6952	10000	7007	0.7007
αt 法	5	0.1753	10000	1762	0.1762
	10	0.2780	10000	2808	0.2808
	20	0.4586	10000	4545	0.4545
	30	0.6065	10000	6113	0.6113
	40	0.7214	10000	7233	0.7233

表 2.10: 対立仮説 $H_1^{(3)} : \sum_{i=1}^5 a_{3i}\mu_i > 0$ の下でのシミュレーション結果

片側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 5.0^2$, 用量の個数 $D = 5$, 最大検定回数 $K = 3$
 母平均の配置パターン 5: $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5) = (1.0, 1.0, 2.0, 3.0, 4.0)$
 (池谷 他 (2019) 表 3.2 から 3.4 へ $m = 5$ およびシミュレーション結果を追加して改変.
 元表の転載については出版元の許諾済み.)

手法	各用量の標本サイズ m	検出力 $1 - \beta$	シミュレーション 回数	帰無仮説 $H_0^{(k)}$ を棄却	
				回数	割合
Normal 法	5	0.2735	10000	2801	0.2801
	10	0.4494	10000	4444	0.4444
	20	0.7039	10000	7056	0.7056
	30	0.8516	10000	8530	0.8530
	40	0.9294	10000	9300	0.9300
Log 法	5	0.2071	10000	2138	0.2138
	10	0.3520	10000	3544	0.3544
	20	0.5988	10000	5998	0.5998
	30	0.7711	10000	7746	0.7746
	40	0.8772	10000	8757	0.8757
αt 法	5	0.2273	10000	2304	0.2304
	10	0.3832	10000	3798	0.3798
	20	0.6349	10000	6321	0.6321
	30	0.8003	10000	7983	0.7983
	40	0.8970	10000	8905	0.8905

表 2.11: 対立仮説 $H_1^{(3)} : \sum_{i=1}^5 a_{3i}\mu_i > 0$ の下でのシミュレーション結果

片側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 5.0^2$, 用量の個数 $D = 5$, 最大検定回数 $K = 3$
 母平均の配置パターン 6: $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5) = (1.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0)$
 (池谷 他 (2019) 表 3.2 から 3.4 へ $m = 5$ およびシミュレーション結果を追加して改変.
 元表の転載については出版元の許諾済み.)

手法	各用量の標本サイズ m	検出力 $1 - \beta$	シミュレーション 回数	帰無仮説 $H_0^{(k)}$ を棄却	
				回数	割合
Normal 法	5	0.0866	10000	812	0.0812
	10	0.1088	10000	1083	0.1083
	20	0.1458	10000	1480	0.1480
	30	0.1793	10000	1777	0.1777
	40	0.2109	10000	2099	0.2099
Log 法	5	0.0898	10000	940	0.0940
	10	0.1155	10000	1153	0.1153
	20	0.1585	10000	1536	0.1536
	30	0.1975	10000	1942	0.1942
	40	0.2345	10000	2285	0.2285
αt 法	5	0.0893	10000	887	0.0887
	10	0.1144	10000	1142	0.1142
	20	0.1567	10000	1607	0.1607
	30	0.1950	10000	1935	0.1935
	40	0.2313	10000	2271	0.2271

表 2.12: 対立仮説 $H_1^{(3)} : \sum_{i=1}^5 a_{3i}\mu_i > 0$ の下でのシミュレーション結果

片側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 5.0^2$, 用量の個数 $D = 5$, 最大検定回数 $K = 3$
 母平均の配置パターン 7: $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5) = (1.0, 2.0, 3.0, 3.0, 3.0)$
 (池谷 他 (2019) 表 3.2 から 3.4 へ $m = 5$ およびシミュレーション結果を追加して改変.
 元表の転載については出版元の許諾済み.)

手法	各用量の標本サイズ m	検出力 $1 - \beta$	シミュレーション 回数	帰無仮説 $H_0^{(k)}$ を棄却	
				回数	割合
Normal 法	5	0.1711	10000	1766	0.1766
	10	0.2631	10000	2621	0.2621
	20	0.4223	10000	4179	0.4179
	30	0.5551	10000	5541	0.5541
	40	0.6630	10000	6638	0.6638
Log 法	5	0.1686	10000	1674	0.1674
	10	0.2632	10000	2649	0.2649
	20	0.4266	10000	4186	0.4186
	30	0.5624	10000	5534	0.5534
	40	0.6720	10000	6745	0.6745
αt 法	5	0.1705	10000	1647	0.1647
	10	0.2659	10000	2583	0.2583
	20	0.4305	10000	4296	0.4296
	30	0.5667	10000	5643	0.5643
	40	0.6762	10000	6730	0.6730

表 2.13: 対立仮説 $H_1^{(3)} : \sum_{i=1}^5 a_{3i}\mu_i > 0$ の下でのシミュレーション結果

片側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 5.0^2$, 用量の個数 $D = 5$, 最大検定回数 $K = 3$
 母平均の配置パターン 8: $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5) = (1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 4.0)$
 (池谷 他 (2019) 表 3.2 から 3.4 へ $m = 5$ およびシミュレーション結果を追加して改変.
 元表の転載については出版元の許諾済み.)

手法	各用量の標本サイズ m	検出力 $1 - \beta$	シミュレーション 回数	帰無仮説 $H_0^{(k)}$ を棄却	
				回数	割合
Normal 法	5	0.2878	10000	2920	0.2920
	10	0.4723	10000	4727	0.4727
	20	0.7291	10000	7231	0.7231
	30	0.8704	10000	8663	0.8663
	40	0.9412	10000	9409	0.9409
Log 法	5	0.2478	10000	2506	0.2506
	10	0.4167	10000	4144	0.4144
	20	0.6731	10000	6639	0.6639
	30	0.8304	10000	8321	0.8321
	40	0.9169	10000	9169	0.9169
αt 法	5	0.2611	10000	2528	0.2528
	10	0.4363	10000	4408	0.4408
	20	0.6940	10000	6917	0.6917
	30	0.8459	10000	8459	0.8459
	40	0.9266	10000	9272	0.9272

表 2.14: 対立仮説 $H_1^{(3)} : \sum_{i=1}^5 a_{3i}\mu_i > 0$ の下でのシミュレーション結果

片側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 5.0^2$, 用量の個数 $D = 5$, 最大検定回数 $K = 3$
 母平均の配置パターン 9: $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5) = (1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0)$
 (池谷 他 (2019) 表 3.2 から 3.4 へ $m = 5$ およびシミュレーション結果を追加して改変.
 元表の転載については出版元の許諾済み.)

手法	各用量の標本サイズ m	検出力 $1 - \beta$	シミュレーション 回数	帰無仮説 $H_0^{(k)}$ を棄却	
				回数	割合
Normal 法	5	0.3729	10000	3722	0.3722
	10	0.6082	10000	6068	0.6068
	20	0.8658	10000	8637	0.8637
	30	0.9593	10000	9568	0.9568
	40	0.9887	10000	9876	0.9876
Log 法	5	0.3001	10000	3016	0.3016
	10	0.5172	10000	5133	0.5133
	20	0.8015	10000	7984	0.7984
	30	0.9290	10000	9310	0.9310
	40	0.9770	10000	9787	0.9787
αt 法	5	0.3230	10000	3221	0.3221
	10	0.5477	10000	5552	0.5552
	20	0.8249	10000	8242	0.8242
	30	0.9407	10000	9396	0.9396
	40	0.9817	10000	9839	0.9839

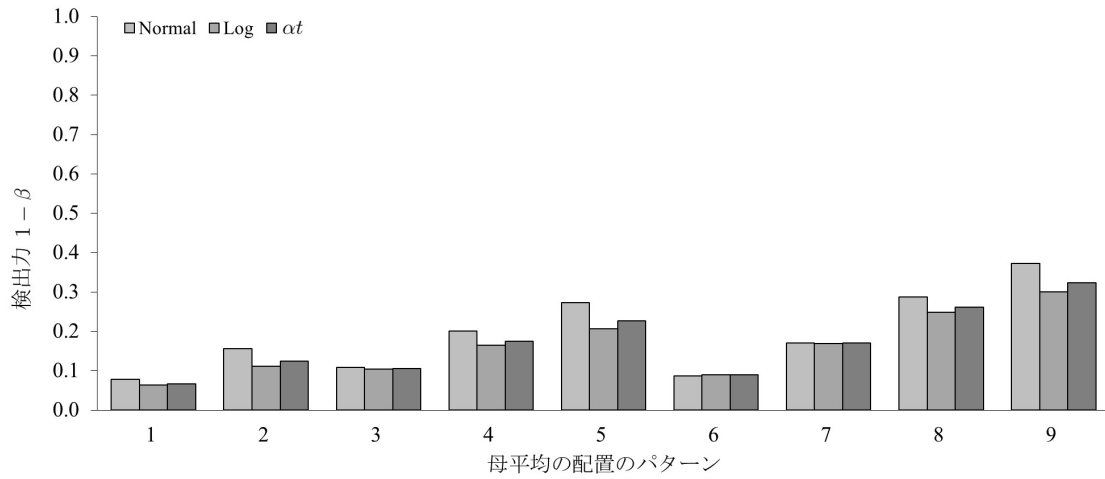


図 2.6: 各用量の標本サイズ $m = 5$ における母平均の配置パターン別の検出力 $1 - \beta$
 片側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 5.0^2$, 用量の個数 $D = 5$, 最大検定回数 $K = 3$

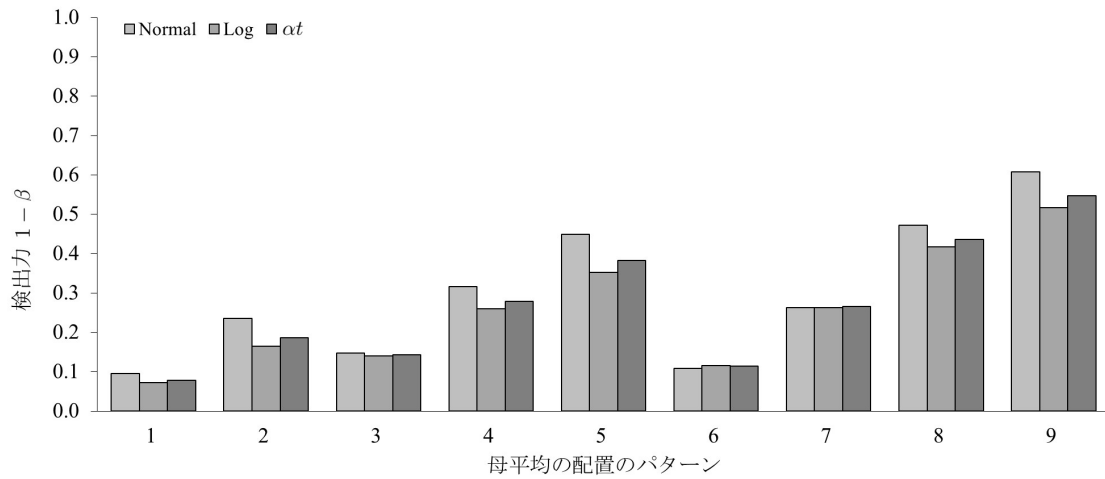


図 2.7: 各用量の標本サイズ $m = 10$ における母平均の配置パターン別の検出力 $1 - \beta$
 片側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 5.0^2$, 用量の個数 $D = 5$, 最大検定回数 $K = 3$
 (池谷 他 (2019) 図 3.5 を改変. 元表の転載については出版元の許諾済み.)

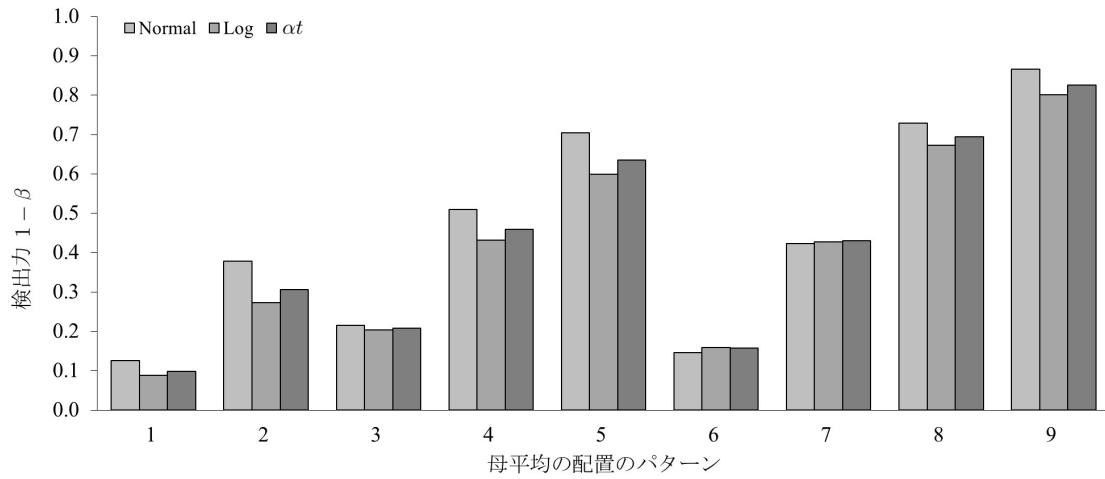


図 2.8: 各用量の標本サイズ $m = 20$ における母平均の配置パターン別の検出力 $1 - \beta$
 片側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 5.0^2$, 用量の個数 $D = 5$, 最大検定回数 $K = 3$
 (池谷 他 (2019) 図 3.6 を改変. 元表の転載については出版元の許諾済み.)

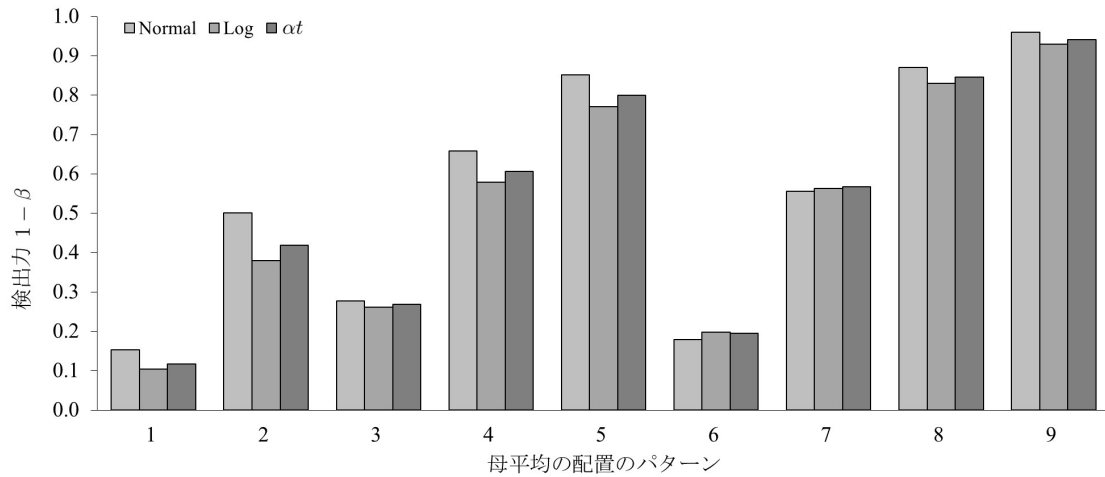


図 2.9: 各用量の標本サイズ $m = 30$ における母平均の配置パターン別の検出力 $1 - \beta$
 片側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 5.0^2$, 用量の個数 $D = 5$, 最大検定回数 $K = 3$
 (池谷 他 (2019) 図 3.7 を改変. 元表の転載については出版元の許諾済み.)

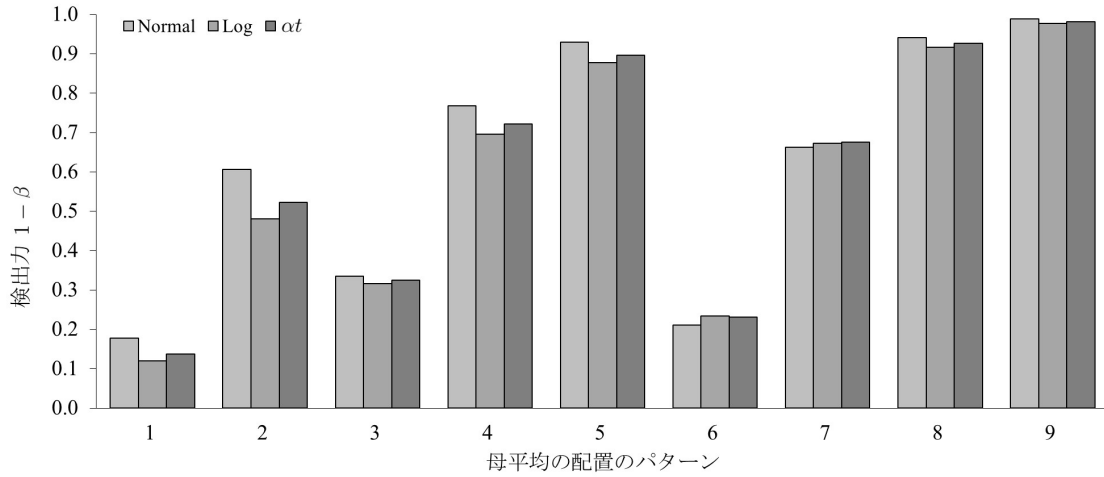


図 2.10: 各用量の標本サイズ $m = 40$ における母平均の配置パターン別の検出力 $1 - \beta$
 片側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 5.0^2$, 用量の個数 $D = 5$, 最大検定回数 $K = 3$
 (池谷 他 (2019) 図 3.8 を改変. 元表の転載については出版元の許諾済み.)

表 2.6 から 2.14 および図 2.6 から 2.10 に示した結果から次のことがわかる.

- シミュレーションによる帰無仮説 $H_0^{(1)}$ から $H_0^{(3)}$ のいずれかを棄却する割合から検出力 $1 - \beta$ は保たれている.
- 各用量の標本サイズ m を固定した場合, 母平均の配置が線形的な増加傾向を示すパターン 2, 4, 5, 7, 8, 9 ではいずれの手法も検出力が高くなっている. 一方, 線形的な増加傾向をあまり示さないパターン 1, 3, 6 では検出力が低くなっている.
- 各用量の標本サイズ m および母平均のパターンを固定した場合, 3 手法間では Normal 法の検出力が高い傾向があり, 次いで αt 法が高く, Log 法は低い傾向にあった. ただし, 低い用量で線形傾向を示し途中から変化のないパターン 6, 7 のような母平均の配置の場合は, 3 手法の中で Normal 法の検出力が最も低くなっている.
- 母平均の配置のパターンを固定した場合, 標本サイズ m が増加するにつれて検出力 $1 - \beta$ は高くなる. 特に線形的な増加傾向の強いパターン 8, 9 では 3 手法とも検出力 $1 - \beta$ は十分高く, 3 手法間でも差がほとんどみられない. 一方, 線形的な増加傾向をあまり示さないパターン 1, 3, 6 では標本サイズ m を増やしても検出力 $1 - \beta$ はほとんど変化しない.

2.6.3 対立仮説 $H_1^{(3)}: \sum_{i=1}^5 a_{3i}\mu_i > 0$ の下での標本サイズ設計とシミュレーション

最後に最大検定回数 $K = 3$ (用量の個数 $D = 5$) として, 対立仮説 $H_1^{(3)}: \sum_{i=1}^5 a_{3i}\mu_i > 0$, 母分散 $\sigma^2 = 5.0^2$ の下で, 片側有意水準 $\alpha = 0.05$ としたときの検出力 $1 - \beta = 0.80$ を満たす各用量の標本サイズ m および平均標本サイズ $E(n_k)$ を計算した結果を示す. また, 用量番号 $i (i = 1, \dots, 5)$ においてそれぞれ $N(\mu_i, 5.0^2)$ の正規分布に従う正規乱数を各用量 m 個ずつ発生させ, 片側有意水準 $\alpha = 0.05$ で仮説検定を行うシミュレーションを行い, 帰無仮説 $H_0^{(1)}$ から $H_0^{(3)}$ のいずれかを棄却した割合から検出力 $1 - \beta$ と同様になっているか, および平均標本サイズ $E(n_k)$ が同様になっているかを評価した結果を表 2.15 および 2.16 に示し, 母平均の配置パターン別の標本サイズ m および平均標本サイズ $E(n_k)$ をそれぞれ図 2.11 および 2.12 に示す.

表 2.15: 対立仮説 $H_1^{(3)} : \sum_{i=1}^5 a_{3i}\mu_i > 0$ の下での標本サイズのシミュレーション結果

片側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 5.0^2$, 用量の個数 $D = 5$, 最大検定回数 $K = 3$
 検出力 $1 - \beta = 0.80$

(池谷 他 (2019) 表 3.5 から最大必要標本サイズを除き, シミュレーション結果を追加して改変.
 元表の転載については出版元の許諾済み.)

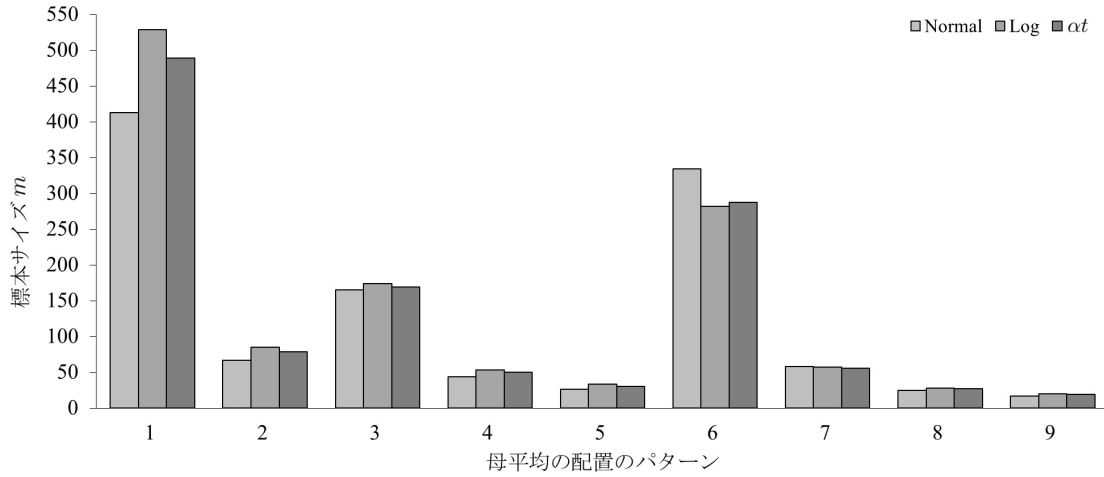
手法	パターン No.	母平均の配置 ($\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5$)	標本サイズ 各用量 m	シミュレーション 回数	帰無仮説 $H_0^{(k)}$ を棄却	
					回数	割合
Normal 法	1	(1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 2.0)	413	10000	8061	0.8061
	2	(1.0, 1.0, 1.0, 2.0, 3.0)	67	10000	8080	0.8080
	3	(1.0, 1.0, 2.0, 2.0, 2.0)	165	10000	8002	0.8002
	4	(1.0, 1.0, 2.0, 3.0, 3.0)	44	10000	8026	0.8026
	5	(1.0, 1.0, 2.0, 3.0, 4.0)	26	10000	8076	0.8076
	6	(1.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0)	334	10000	7967	0.7967
	7	(1.0, 2.0, 3.0, 3.0, 3.0)	58	10000	8045	0.8045
	8	(1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 4.0)	25	10000	8067	0.8067
	9	(1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0)	17	10000	8071	0.8071
Log 法	1	(1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 2.0)	529	10000	7975	0.7975
	2	(1.0, 1.0, 1.0, 2.0, 3.0)	85	10000	8067	0.8067
	3	(1.0, 1.0, 2.0, 2.0, 2.0)	174	10000	7966	0.7966
	4	(1.0, 1.0, 2.0, 3.0, 3.0)	53	10000	8148	0.8148
	5	(1.0, 1.0, 2.0, 3.0, 4.0)	33	10000	8169	0.8169
	6	(1.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0)	282	10000	7984	0.7984
	7	(1.0, 2.0, 3.0, 3.0, 3.0)	57	10000	8093	0.8093
	8	(1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 4.0)	28	10000	8025	0.8025
	9	(1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0)	20	10000	7984	0.7984
αt 法	1	(1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 2.0)	489	10000	8028	0.8028
	2	(1.0, 1.0, 1.0, 2.0, 3.0)	79	10000	8002	0.8002
	3	(1.0, 1.0, 2.0, 2.0, 2.0)	169	10000	7995	0.7995
	4	(1.0, 1.0, 2.0, 3.0, 3.0)	50	10000	8090	0.8090
	5	(1.0, 1.0, 2.0, 3.0, 4.0)	30	10000	7983	0.7983
	6	(1.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0)	287	10000	7994	0.7994
	7	(1.0, 2.0, 3.0, 3.0, 3.0)	56	10000	8045	0.8045
	8	(1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 4.0)	27	10000	8021	0.8021
	9	(1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0)	19	10000	8083	0.8083

表 2.16: 対立仮説 $H_1^{(3)} : \sum_{i=1}^5 a_{3i}\mu_i > 0$ の下での平均標本サイズのシミュレーション結果

片側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 5.0^2$, 用量の個数 $D = 5$, 最大検定回数 $K = 3$
 検出力 $1 - \beta = 0.80$

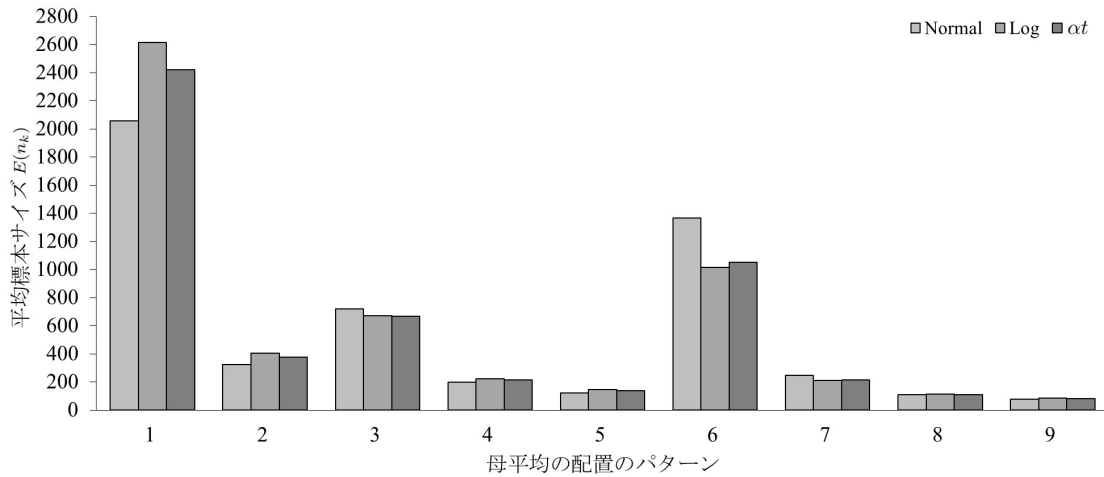
(池谷 他 (2019) 表 3.5 から最大必要標本サイズを除き, 表 3.6 へシミュレーション結果を追加して改変.
 元表の転載については出版元の許諾済み.)

手法	パターン No.	母平均の配置 ($\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5$)	標本サイズ		シミュレーション 平均標本サイズ
			各用量 m	平均 $E(n_k)$	
Normal 法	1	(1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 2.0)	413	2058.0	2057.9
	2	(1.0, 1.0, 1.0, 2.0, 3.0)	67	325.1	325.1
	3	(1.0, 1.0, 2.0, 2.0, 2.0)	165	718.4	719.8
	4	(1.0, 1.0, 2.0, 3.0, 3.0)	44	198.9	198.9
	5	(1.0, 1.0, 2.0, 3.0, 4.0)	26	122.4	122.3
	6	(1.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0)	334	1365.1	1367.8
	7	(1.0, 2.0, 3.0, 3.0, 3.0)	58	247.1	247.1
	8	(1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 4.0)	25	111.0	111.2
	9	(1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0)	17	78.4	78.5
Log 法	1	(1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 2.0)	529	2612.8	2613.6
	2	(1.0, 1.0, 1.0, 2.0, 3.0)	85	404.5	403.7
	3	(1.0, 1.0, 2.0, 2.0, 2.0)	174	671.8	672.3
	4	(1.0, 1.0, 2.0, 3.0, 3.0)	53	224.1	224.0
	5	(1.0, 1.0, 2.0, 3.0, 4.0)	33	147.3	147.1
	6	(1.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0)	282	1016.1	1017.9
	7	(1.0, 2.0, 3.0, 3.0, 3.0)	57	212.3	212.4
	8	(1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 4.0)	28	113.2	113.4
	9	(1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0)	20	85.2	85.1
αt 法	1	(1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 2.0)	489	2420.5	2421.1
	2	(1.0, 1.0, 1.0, 2.0, 3.0)	79	377.5	377.9
	3	(1.0, 1.0, 2.0, 2.0, 2.0)	169	666.9	665.0
	4	(1.0, 1.0, 2.0, 3.0, 3.0)	50	214.6	214.6
	5	(1.0, 1.0, 2.0, 3.0, 4.0)	30	135.8	135.8
	6	(1.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0)	287	1050.1	1050.6
	7	(1.0, 2.0, 3.0, 3.0, 3.0)	56	213.2	212.6
	8	(1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 4.0)	27	111.2	111.8
	9	(1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0)	19	82.3	82.6

図 2.11: 母平均の配置パターン別の必要標本サイズ m

片側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 5.0^2$, 用量の個数 $D = 5$, 最大検定回数 $K = 3$
 検出力 $1 - \beta = 0.80$

(池谷 他 (2019) 図 3.9 を改変. 元表の転載については出版元の許諾済み.)

図 2.12: 母平均の配置パターン別の平均標本サイズ $E(n_k)$

片側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 5.0^2$, 用量の個数 $D = 5$, 最大検定回数 $K = 3$
 検出力 $1 - \beta = 0.80$

(池谷 他 (2019) 表 3.6 を改変. 元表の転載については出版元の許諾済み.)

表 2.15, 図 2.11, および表 2.16, 図 2.12 に示した結果から次のことがわかる.

- 各母平均の配置に対して計算された各用量の必要標本サイズ m を用いたシミュレーションによる帰無仮説 $H_0^{(1)}$ から $H_0^{(5)}$ のいずれかを棄却する割合から, 目標とする検出力 $1 - \beta = 0.80$ は保たれている.
- 線形的に増加傾向を示す母平均の配置パターン 2, 4, 5, 7, 8, 9 では各手法の必要標本サイズ m は小さく, 3 手法間で差はみられない. 一方, 線形的な増加傾向をあまり示さない母平均の配置パターン 1, 3, 6 では, 各手法の必要標本サイズ m は大きく, 特にパターン 1 ではいずれの手法も各用量の標本サイズが 400 を超えており, 5 つの用量で標本サイズの合計が 2000 を超える. このような母平均の配置に対してはこの提案手法を使うことは実用的でない可能性がある.
- 概ね Normal 法の必要標本サイズ m が 3 手法の中では小さく, 次いで αt 法となり, Log 法が最も大きくなっている. 一方, 低い用量で線形的な増加傾向を示し途中から変化のないパターン 6, 7 では Normal 法が最も必要標本サイズ m が大きく, Log 法が小さくなっている.
- 平均標本サイズ $E(n_k)$ とシミュレーションによる平均標本サイズは同様であった.

- 平均標本サイズ $E(n_k)$ は必要標本サイズ m と同様の傾向であった。ただし、パターン 3 は各用量の標本サイズ m は Normal 法が最も小さかったが、平均標本サイズ $E(n_k)$ では αt 法が最も小さくなっている。これは Normal 法が後半の段階で有意水準を消費する手法であるため、後半まで検定が継続されたことで前半の段階で有意水準を消費する手法の Log 法や中間的な αt 法の各用量の標本サイズ m と各段階で棄却される確率のバランスにより平均標本サイズ $E(n_k)$ が逆転したものと考えられる。

2.7 事例研究

中村 他 (2007) のモルタルの流動性と混和剤の用量との関係を調べる用量反応試験のデータに本提案手法を適用する。この用量反応試験は、混和剤の用量の増加に伴い、混和剤の効果が表れる用量を見つけるために、ポルトランドセメント (5kg)、砂 (7.5kg, 5mm 以下)、水 (1.5kg) を固定し、ポルトランドセメントの用量 $C = 5\text{kg}$ に対して、混和材の用量を $0, C \times 0.4\%, C \times 0.8\%$ および $C \times 1.2\%$ と変化させたときのモルタルの広がりを表すフロー値を調べる試験となっている。用量試験の結果を表 2.17 に示すが、このフロー値が用量ごとに逐次得られたものと仮定する。

表 2.17: 中村 他 (2007) の用量反応試験の結果
(池谷 他 (2019) 表 4.1 より転載。元表の転載については出版元の許諾済み。)

用量 $C \times$	フロー値					標本平均
0	14.35	13.85	14.45	14.40	13.85	14.18
0.4%	13.80	14.30	14.20	13.70	14.45	14.09
0.8%	15.75	15.85	14.15	13.95	14.50	14.84
1.2%	19.90	18.65	19.65	18.40	19.70	19.27

用量の個数 $D = 4$, 最大検定回数 $K = 2$ とし、各段階での帰無仮説および対立仮説は「2.1 検定統計量」で示した仮説を用いる。また、片側有意水準 $\alpha = 0.05$, 各用量の標本サイズ $m = 5$ とした際の 1 段階および 2 段階での棄却限界値 b_1, b_2 を表 2.18 に示す。

表 2.18: 各手法の棄却限界値
(池谷 他 (2019) 表 4.2 を改変。元表の転載については出版元の許諾済み。)

手法	b_1	b_2
Normal 法	2.9960	1.7723
Log 法	2.0578	2.0592
αt 法	2.1788	1.9600

- 1 段階
混和材の用量 $0, C \times 0.4\%, C \times 0.8\%$ のフロー値から 1 段階での検定統計量 T_1 の実現値は $t_1 = 1.8025$ となり,
Normal 法:
 $t_1 \leq b_1 = 2.9960$ より決定を保留し、用量 $C \times 1.2\%$ のフロー値を得て 2 段階へ。
Log 法:
 $t_1 \leq b_1 = 2.0578$ より決定を保留し、用量 $C \times 1.2\%$ のフロー値を得て 2 段階へ。
 αt 法:
 $t_1 \leq b_1 = 2.1788$ より決定を保留し、用量 $C \times 1.2\%$ のフロー値を得て 2 段階へ。
- 2 段階
混和材の用量 $C \times 1.2\%$ のフロー値を得て、2 段階での検定統計量 T_2 の実現値は $t_2 = 13.2982$ となり,
Normal 法:
 $t_2 > b_2 = 1.7723$ より線形傾向を検出できたとし、検定を終了する。
Log 法:
 $t_2 > b_2 = 2.0592$ より線形傾向を検出できたとし、検定を終了する。

αt 法:

$t_2 > b_2 = 1.9600$ より線形傾向を検出できたとし, 検定を終了する.

いずれの手法も 2 段階で線形かつ増加傾向を検出して検定を終了した.

3 母平均の差を累積した逐次型多重比較法

いくつかの調査項目の反応データが正規分布に従っていると仮定し、あるグループにおいて各個体に対して各調査項目の反応データを収集することを考えたとき、各調査項目の母平均をプロットし、直線で結んだ推移図をプロファイルと呼ぶ。Johnson & Wichern(1992)では、2つのグループ間でこのプロファイルが等しいかどうかを検定するプロファイル分析を示している。このプロファイル分析は、グループ間で、(1)2つのプロファイルは平行か、(2)平行であるときに、2つのプロファイルは一致するか、(3)一致するときに、2つのプロファイルは水平か、を段階的に検定することになり、同一個体ですべての調査項目でのデータの収集が必要となる。一方、製造の場面では、破壊試験などにより同一個体ですべての調査項目の反応データを得ることが難しいことが考えられる。また、材料が高価な場合など、少ない標本サイズでプロファイルの差を検出することが求められることから、各調査項目に対する反応データを順次得て、途中段階で2つのプロファイルに差があるかどうか検定する手法を提案する。

いま、2群間で K 種類の調査項目において反応データを順次得ることを考え、各調査項目の反応データは、その都度各群から m 個ずつ収集し、これらは同一の単位で示せると仮定する。調査項目 $j(j = 1, \dots, K)$ における各群の反応データを $x_{1j1}, \dots, x_{1jm}, x_{2j1}, \dots, x_{2jm}$ とし、2群間および群内で互いに独立で、それぞれ $N(\mu_{1j}, \sigma^2), N(\mu_{2j}, \sigma^2)$ の正規分布に従うと仮定し、調査項目 k までの反応データが得られる都度それまでに観測された反応データの母平均が2群間で異なるか否かを検定することとする。

表 3.1: 2 群間の母平均の逐次的な比較に用いる調査項目ごとの反応データの概要
(池谷 他 (2023) 表 1 を改変。元表の転載については出版元の許諾済み。)

調査項目	群	標本サイズ	累積標本サイズ	反応データ	母平均	母分散
j	i	m	n_j	x_{ijh}	μ_{ij}	σ^2
1	1	m	m	$x_{111}, x_{112}, \dots, x_{11m}$	μ_{11}	σ^2
	2	m	m	$x_{211}, x_{212}, \dots, x_{21m}$	μ_{21}	σ^2
2	1	m	$2m$	$x_{121}, x_{122}, \dots, x_{12m}$	μ_{12}	σ^2
	2	m	$2m$	$x_{221}, x_{222}, \dots, x_{22m}$	μ_{22}	σ^2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	1	m	km	$x_{1k1}, x_{1k2}, \dots, x_{1km}$	μ_{1k}	σ^2
	2	m	km	$x_{2k1}, x_{2k2}, \dots, x_{2km}$	μ_{2k}	σ^2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
K	1	m	Km	$x_{1K1}, x_{1K2}, \dots, x_{1Km}$	μ_{1K}	σ^2
	2	m	Km	$x_{2K1}, x_{2K2}, \dots, x_{2Km}$	μ_{2K}	σ^2

Nakamura & Douke(2015) は、用量反応試験によって得られた 2×2 対比に対して、 2×2 対比を順次用いながら、2群間の反応の平行性を逐次的に調べ、交互作用が存在する最小用量を検出するための検定を提案していることから、本検定方法に応用する。本検定方法では逐次的に検定を行うことから、有意水準の調整には Lan & DeMets(1983) の α 消費関数を用いる。

ここでは表 3.1 に示す反応データにおける調査項目 j における母平均の差を $\theta_j = \mu_{2j} - \mu_{1j}$ とし、調査項目 1 から k まで累積した $\sum_{j=1}^k \theta_j$ を基にした検定における仮説、検定統計量、Lan & DeMets(1983)

の α 消費関数を用いた有意水準とそれに伴い決められる棄却限界値、決定規則、検出力および検出力を保つための標本サイズの決め方を説明する。有意水準、検出力および標本サイズについては、3 種類の α 消費関数それぞれに対して正規乱数を用いたモンテカルロシミュレーションを行い、理論値と実際に仮説検定を行った結果が同様の傾向を示すことを確認する。最後に事例研究として Montgomery(2012) の例題に本提案手法を適用した結果を示す。

3.1 検定統計量

群を $i = 1, 2$ 、調査項目を $j = 1, \dots, K$ 、反応データの標本サイズを m としたとき、確率変数 $X_{1jh}, X_{2jh}(j = 1, \dots, K, h = 1, \dots, m)$ が独立にそれぞれ同一の $N(\mu_{1j}, \sigma^2), N(\mu_{2j}, \sigma^2)$ の正規分布に従うとき、調査項目 j における母平均の差 $\theta_j = \mu_{2j} - \mu_{1j}$ を用いて、各調査項目までの母平均が一致しているかの仮説検定を行う。検定の仮説は、 k 段階までの各調査項目における母平均の差

$\theta_j (j = 1, \dots, k)$ の和である $\sum_{j=1}^k \theta_j$ を用いて、次の帰無仮説 $H_0^{(k)} : \sum_{j=1}^k \theta_j = 0$ および対立仮説 $H_1^{(k)} : \sum_{j=1}^k \theta_j \neq 0 (k = 1, \dots, K)$ を用いる。

$$\begin{aligned}
 &1 \text{ 段階} \quad \text{帰無仮説 } H_0^{(1)} : \theta_1 = 0, \\
 &\quad \text{対立仮説 } H_1^{(1)} : \theta_1 \neq 0, \\
 &2 \text{ 段階} \quad \text{帰無仮説 } H_0^{(2)} : \theta_1 + \theta_2 = 0, \\
 &\quad \text{対立仮説 } H_1^{(2)} : \theta_1 + \theta_2 \neq 0, \\
 &\quad \vdots \\
 &k \text{ 段階} \quad \text{帰無仮説 } H_0^{(k)} : \sum_{j=1}^k \theta_j = 0, \\
 &\quad \text{対立仮説 } H_1^{(k)} : \sum_{j=1}^k \theta_j \neq 0, \\
 &\quad \vdots \\
 &K \text{ 段階} \quad \text{帰無仮説 } H_0^{(K)} : \sum_{j=1}^K \theta_j = 0, \\
 &\quad \text{対立仮説 } H_1^{(K)} : \sum_{j=1}^K \theta_j \neq 0.
 \end{aligned}$$

調査項目 $j (j = 1, \dots, K)$ での標本平均 $\bar{X}_{1j} = \frac{1}{m} \sum_{h=1}^m X_{1jh}$, $\bar{X}_{2j} = \frac{1}{m} \sum_{h=1}^m X_{2jh}$ は、それぞれ $N\left(\mu_{1j}, \frac{\sigma^2}{m}\right)$, $N\left(\mu_{2j}, \frac{\sigma^2}{m}\right)$ の正規分布に従う。この標本平均を用いて調査項目 j での 2 群間の母平均の差 θ_j の推定値 $\hat{\theta}_j$ は、次式より $N(\theta_j, \frac{2\sigma^2}{m})$ の正規分布に従う。

$$\begin{aligned}
 \hat{\theta}_j &= \bar{X}_{2j} - \bar{X}_{1j} \sim N\left(\mu_{2j} - \mu_{1j}, \frac{2\sigma^2}{m}\right), \\
 &\equiv N\left(\theta_j, \frac{2\sigma^2}{m}\right), j = 1, \dots, K.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

また、調査項目 $k (k = 1, \dots, K)$ までの各調査項目における反応データの母平均の差の推定値 $\hat{\theta}_j (j = 1, \dots, K)$ の和 $\sum_{j=1}^k \hat{\theta}_j$ は次の正規分布に従う。

$$\sum_{j=1}^k \hat{\theta}_j \sim N\left(\sum_{j=1}^k \theta_j, \frac{2k\sigma^2}{m}\right), k = 1, \dots, K.$$

このことから統計量 $Y_k = \sqrt{m} \sum_{j=1}^k \hat{\theta}_j / \sqrt{2k\sigma^2}$ は次の正規分布に従う。

$$Y_k = \sqrt{\frac{m}{2k\sigma^2}} \sum_{j=1}^k \hat{\theta}_j \sim N\left(\sqrt{\frac{m}{2k\sigma^2}} \sum_{j=1}^k \theta_j, 1\right), k = 1, \dots, K. \tag{3.2}$$

次に統計量 Y_k をベクトルまたは行列で表現するため、各群の調査項目 $k (k = 1, \dots, K)$ までの各調査項目における反応データの標本平均 $\bar{X}_{11}, \dots, \bar{X}_{1k}, \bar{X}_{21}, \dots, \bar{X}_{2k}$, 母平均の差の推定値 $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k$, 母平均の差 $\theta_1, \dots, \theta_k$, 統計量 Y_k を次のようにベクトルで表現する。

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{X}}_{1k} &= (\bar{X}_{11}, \dots, \bar{X}_{1k})', \bar{\mathbf{X}}_{2k} = (\bar{X}_{21}, \dots, \bar{X}_{2k})', \\
 \hat{\boldsymbol{\theta}}_k &= (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k)', \boldsymbol{\theta}_k = (\theta_1, \dots, \theta_k)', \\
 \mathbf{Y}_k &= (Y_1, \dots, Y_k)', k = 1, \dots, K.
 \end{aligned}$$

(3.1) 式は、 $\mathbf{I}_k$ を k 次の単位行列とし、各群の調査項目 $k (k = 1, \dots, K)$ までの各調査項目における反応データの標本平均ベクトル $\bar{\mathbf{X}}_{1k}, \bar{\mathbf{X}}_{2k}$, 母平均の差の推定値ベクトル $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k$, 母平均の差ベクトル

θ_k を用いて次のように表すことができる.

$$\hat{\theta}_k = \bar{X}_{2k} - \bar{X}_{1k} \sim N_k \left(\theta_k, \frac{2\sigma^2}{m} \mathbf{I}_k \right), k = 1, \dots, K.$$

また, 次に示すベクトル $\mathbf{c}_k(k \times 1)$ および行列 $\mathbf{C}_k(k \times k)$ を用いて, (3.2) 式で示した統計量 Y_k , その統計量ベクトル $\mathbf{Y}_k$ は次のように表すことができる.

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_k(k \times 1) &= \left(\frac{1}{\sqrt{k}}, \frac{1}{\sqrt{k}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{k}} \right)', \\ \mathbf{C}_k(k \times k) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{k-1}} & \frac{1}{\sqrt{k-1}} & \frac{1}{\sqrt{k-1}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{k-1}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{k}} & \frac{1}{\sqrt{k}} & \frac{1}{\sqrt{k}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{k}} & \frac{1}{\sqrt{k}} \end{pmatrix}, k = 1, \dots, K. \\ Y_k &= \sqrt{\frac{m}{2\sigma^2}} \mathbf{c}_k' \hat{\theta}_k \sim N \left(\sqrt{\frac{m}{2\sigma^2}} \mathbf{c}_k' \theta_k, \mathbf{c}_k' \mathbf{c}_k \right), k = 1, \dots, K. \\ \mathbf{Y}_k &= \sqrt{\frac{m}{2\sigma^2}} \mathbf{C}_k \hat{\theta}_k \sim N_k \left(\sqrt{\frac{m}{2\sigma^2}} \mathbf{C}_k \theta_k, \mathbf{C}_k \mathbf{C}_k' \right), k = 1, \dots, K. \end{aligned} \quad (3.3)$$

$\mathbf{C}_k \mathbf{C}_k'$ は統計量ベクトル $\mathbf{Y}_k$ の分散共分散行列であり, 次のような行列となる.

$$\mathbf{C}_k \mathbf{C}_k'(k \times k) = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\frac{1}{2}} & \cdots & \sqrt{\frac{1}{k-1}} & \sqrt{\frac{1}{k}} \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & 1 & \cdots & \sqrt{\frac{2}{k-1}} & \sqrt{\frac{2}{k}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \sqrt{\frac{1}{k-1}} & \sqrt{\frac{2}{k-1}} & \cdots & 1 & \sqrt{\frac{k-1}{k}} \\ \sqrt{\frac{1}{k}} & \sqrt{\frac{2}{k}} & \cdots & \sqrt{\frac{k-1}{k}} & 1 \end{pmatrix}, k = 1, \dots, K.$$

各群の調査項目 j における反応データの不偏分散をそれぞれ

$$S_{1j}^2 = \frac{\sum_{h=1}^m (X_{1jh} - \bar{X}_{1j})^2}{m-1}, S_{2j}^2 = \frac{\sum_{h=1}^m (X_{2jh} - \bar{X}_{2j})^2}{m-1}, j = 1, \dots, K$$

とすると, 次に示す統計量 U_j は自由度 $2(m-1)$ の χ^2 分布に従う.

$$U_j = \frac{m-1}{\sigma^2} (S_{1j}^2 + S_{2j}^2) \sim \chi_{2(m-1)}^2, j = 1, \dots, K.$$

また, 調査項目間では独立性が成り立つことから統計量 U_j の調査項目 $k(k = 1, \dots, K)$ までの和を統計量 V_k とすると, V_k は次のように自由度 $2k(m-1)$ の χ^2 分布に従う.

$$V_k = \sum_{j=1}^k U_j \sim \chi_{2k(m-1)}^2, k = 1, \dots, K$$

調査項目 k での統計量 Y_k および V_k を用いて, $k(k = 1, \dots, K)$ 段階での統計量 T_k は次のような統計量を考える. 帰無仮説 $H_0^{(k)}$ の下で, 統計量 Y_k は標準正規分布 $N(0, 1)$, 統計量 V_k は自由度 $2k(m-1)$ の χ^2 分布に従い, 統計量 T_k は自由度 $2k(m-1)$ の t 分布に従うことから, T_k を k 段階での検定統計量とする.

$$T_k = \frac{Y_k}{\sqrt{\frac{V_k}{2k(m-1)}}} \sim t_{2k(m-1)}, k = 1, \dots, K.$$

3.2 有意水準と棄却限界値

この検定は群逐次検定と同様に最大で事前に決めた K 回の検定を繰り返すことから、有意水準 α は帰無仮説 $H_0^{(1)}$ から $H_0^{(K)}$ の下、1 段階から K 段階のいずれかで帰無仮説 $H_0^{(k)}$ を棄却する以下の確率となる。

$$\begin{aligned}
\alpha &= \Pr \left\{ (H_0^{(1)} \text{を棄却} \mid \theta_1 = 0) \cup \left(H_0^{(1)} \text{を棄却せず, } H_0^{(2)} \text{を棄却} \mid \sum_{j=1}^2 \theta_j = 0 \right) \cup \cdots \cup \right. \\
&\quad \left(H_0^{(k-1)} \text{まで棄却せず, } H_0^{(k)} \text{を棄却} \mid \sum_{j=1}^k \theta_j = 0 \right) \cup \cdots \cup \\
&\quad \left. \left(H_0^{(K-1)} \text{まで棄却せず, } H_0^{(K)} \text{を棄却} \mid \sum_{j=1}^K \theta_j = 0 \right) \right\} \\
&= \Pr \{ (|T_1| > b_1) \cup (|T_1| \leq b_1, |T_2| > b_2) \cup \cdots \cup \\
&\quad (|T_1| \leq b_1, \dots, |T_{k-1}| \leq b_{k-1}, |T_k| > b_k) \cup \cdots \cup \\
&\quad (|T_1| \leq b_1, \dots, |T_{K-1}| \leq b_{K-1}, |T_K| > b_K) \} \\
&= \Pr(|T_1| > b_1) + \Pr(|T_1| \leq b_1, |T_2| > b_2) + \cdots + \\
&\quad \Pr(|T_1| \leq b_1, \dots, |T_{k-1}| \leq b_{k-1}, |T_k| > b_k) + \cdots + \\
&\quad \Pr(|T_1| \leq b_1, \dots, |T_{K-1}| \leq b_{K-1}, |T_K| > b_K).
\end{aligned}$$

有意水準 α を満たす棄却限界値 $b_1, \dots, b_K$ を決める必要があるが、 k 段階で初めて帰無仮説 $H_0^{(k)}$ を棄却する確率を $\alpha_k^* = \Pr(|T_1| \leq b_1, \dots, |T_{k-1}| \leq b_{k-1}, |T_k| > b_k)$ としたとき、群逐次検定と同様に次式を満たすように決めることができる。

$$\alpha_k = \alpha_1^* + \alpha_2^* + \cdots + \alpha_k^*, k = 1, \dots, K.$$

$$\begin{aligned}
\alpha_K &= \sum_{k=1}^K \alpha_k^* \\
&= \alpha,
\end{aligned}$$

$$\alpha = 1 - \Pr(|T_1| \leq b_1, \dots, |T_{K-1}| \leq b_{K-1}, |T_K| \leq b_K).$$

実際に棄却限界値 $b_1, \dots, b_K$ を計算するには、群逐次検定の Lan & DeMets(1983) と同様に k 段階までに消費する有意水準 $\alpha_k (k = 1, \dots, K)$ を決めて、順次計算する必要がある。 k 段階までに消費する有意水準 $\alpha_k (k = 1, \dots, K)$ の決め方は、「1.4.2.3 Lan & DeMets(1983)」と同様に Normal 法, Log 法および αt 法の 3 種類の α 消費関数を用いることとし、棄却限界値 $b_1, \dots, b_K$ の計算方法を次に示す。

$k (k = 1, \dots, K)$ 段階での検定統計量 T_k は自由度 $2k(m-1)$ の t 分布に従い、統計量ベクトル $\mathbf{Y}_k = (Y_1, \dots, Y_k)'$ は、(3.3) 式より帰無仮説 $H_0^{(k)}$ の下で平均ベクトル $\mathbf{0}$ 、分散共分散行列 $\mathbf{C}_k \mathbf{C}_k'$ の k 変量正規分布に従う。このことから各段階で用いる棄却限界値 $b_1, \dots, b_K$ は、次のように決めることができる。

- 1 段階

帰無仮説 $H_0^{(1)}$ の下、検定統計量 T_1 は自由度 $2(m-1)$ の t 分布に従うことから、自由度 $2(m-1)$ の t 分布の確率密度関数を用いて、1 段階で帰無仮説 $H_0^{(1)}$ を棄却する確率 α_1 を満たす棄却限界値 b_1 を決める。

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= 1 - \Pr(|T_1| \leq b_1) \\
&= 1 - \int_{-b_1}^{b_1} \frac{\Gamma\left(\frac{2(m-1)+1}{2}\right)}{\sqrt{2(m-1)}\pi\Gamma\left(\frac{2(m-1)}{2}\right)} \left(1 + \frac{t_1^2}{2(m-1)}\right)^{-\frac{2(m-1)+1}{2}} dt_1. \quad (3.4)
\end{aligned}$$

- $k (k = 2, \dots, K)$ 段階

帰無仮説 $H_0^{(1)}, \dots, H_0^{(k)}$ の下、各段階の検定統計量 $T_1, \dots, T_k$ はそれぞれ自由度 $2j(m-1) (j = 1, \dots, k)$ の t 分布に従う。この各段階の検定統計量 $T_1, \dots, T_k$ を構成する統計量ベクトル $\mathbf{Y}_k$ は平均ベクトル $\mathbf{0}$ 、分散共分散行列 $\mathbf{C}_k \mathbf{C}_k'$ の k 変量正規分布に従い、統計量 $U_1, \dots, U_k$ はそれぞれ

自由度 $2(m-1)$ の χ^2 分布に従うことから, k 変量正規分布 $N_k(\mathbf{0}, \mathbf{C}_k \mathbf{C}_k')$ の同時確率密度関数および自由度 $2(m-1)$ の χ^2 分布の確率密度関数を用いて, k 段階までに帰無仮説 $H_0^{(1)}, \dots, H_0^{(k)}$ のいずれかを棄却する確率 α_k を満たす棄却限界値 b_k を決める.

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= 1 - \Pr(|T_1| \leq b_1, \dots, |T_k| \leq b_k) \\
&= 1 - \Pr\left(\left|\frac{Y_1}{\sqrt{\frac{V_1}{2(m-1)}}}\right| \leq b_1, \dots, \left|\frac{Y_k}{\sqrt{\frac{V_k}{2k(m-1)}}}\right| \leq b_k\right) \\
&= 1 - \Pr\left(|Y_1| \leq b_1 \sqrt{\frac{V_1}{2(m-1)}}, \dots, |Y_k| \leq b_k \sqrt{\frac{V_k}{2k(m-1)}}\right) \\
&= 1 - \Pr\left(|Y_1| \leq b_1 \sqrt{\frac{U_1}{2(m-1)}}, \dots, |Y_k| \leq b_k \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^k U_j}{2k(m-1)}}\right) \\
&= 1 - \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \Pr\left(|Y_1| \leq b_1 \sqrt{\frac{u_1}{2(m-1)}}, \dots, |Y_k| \leq b_k \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^k u_j}{2k(m-1)}}\right) \\
&\quad \times \frac{u_1^{\frac{2(m-1)}{2}-1} e^{-\frac{u_1}{2}}}{2^{\frac{2(m-1)}{2}} \Gamma\left(\frac{2(m-1)}{2}\right)} \times \dots \times \frac{u_k^{\frac{2(m-1)}{2}-1} e^{-\frac{u_k}{2}}}{2^{\frac{2(m-1)}{2}} \Gamma\left(\frac{2(m-1)}{2}\right)} du_1 \dots du_k \\
&= 1 - \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \left\{ \int_{-b_k \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^k u_j}{2k(m-1)}}}^{b_k \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^k u_j}{2k(m-1)}}} \dots \int_{-b_1 \sqrt{\frac{u_1}{2(m-1)}}}^{b_1 \sqrt{\frac{u_1}{2(m-1)}}} \frac{e^{-\frac{1}{2} \mathbf{y}'_k (\mathbf{C}_k \mathbf{C}_k')^{-1} \mathbf{y}_k}}{\sqrt{(2\pi)^k |\mathbf{C}_k \mathbf{C}_k'|}} dy_1 \dots dy_k \right\} \\
&\quad \times \frac{u_1^{\frac{2(m-1)}{2}-1} e^{-\frac{u_1}{2}}}{2^{\frac{2(m-1)}{2}} \Gamma\left(\frac{2(m-1)}{2}\right)} \times \dots \times \frac{u_k^{\frac{2(m-1)}{2}-1} e^{-\frac{u_k}{2}}}{2^{\frac{2(m-1)}{2}} \Gamma\left(\frac{2(m-1)}{2}\right)} du_1 \dots du_k.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 最大検定回数 $K = 5$, 各群の各調査項目の標本サイズ $m = 5, 10, 20, 30, 40$ としたときの Normal 法, Log 法, αt 法の棄却限界値 $b_1, \dots, b_5$ を計算した結果を表 3.2 および図 3.1 から 3.5 に示す.

表 3.2: 両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 調査項目数 $K = 5$ の棄却限界値 b_k
(池谷 他 (2023) 表 3 から $m = 15$ を除き, $m = 30, 40$ を追加して改変.
元表の転載については出版元の許諾済み.)

手法	各調査項目の標本サイズ/群 m	棄却限界値				
		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
Normal 法	5	9.5751	3.7029	2.7722	2.3715	2.1385
	10	5.9806	3.3466	2.6439	2.3089	2.0984
	20	5.0397	3.2113	2.5931	2.2839	2.0792
	30	4.7953	3.1739	2.5776	2.2766	2.0735
	40	4.6833	3.1535	2.5701	2.2739	2.0720
Log 法	5	3.0953	2.7281	2.6039	2.5352	2.4977
	10	2.6962	2.5517	2.4932	2.4597	2.4405
	20	2.5543	2.4845	2.4490	2.4299	2.4115
	30	2.5131	2.4646	2.4360	2.4206	2.4016
	40	2.4934	2.4544	2.4299	2.4180	2.4009
αt 法	5	3.3554	2.8168	2.6050	2.4701	2.3753
	10	2.8784	2.6265	2.4944	2.3994	2.3238
	20	2.7116	2.5540	2.4505	2.3721	2.2974
	30	2.6633	2.5326	2.4374	2.3639	2.2891
	40	2.6403	2.5217	2.4312	2.3621	2.2871

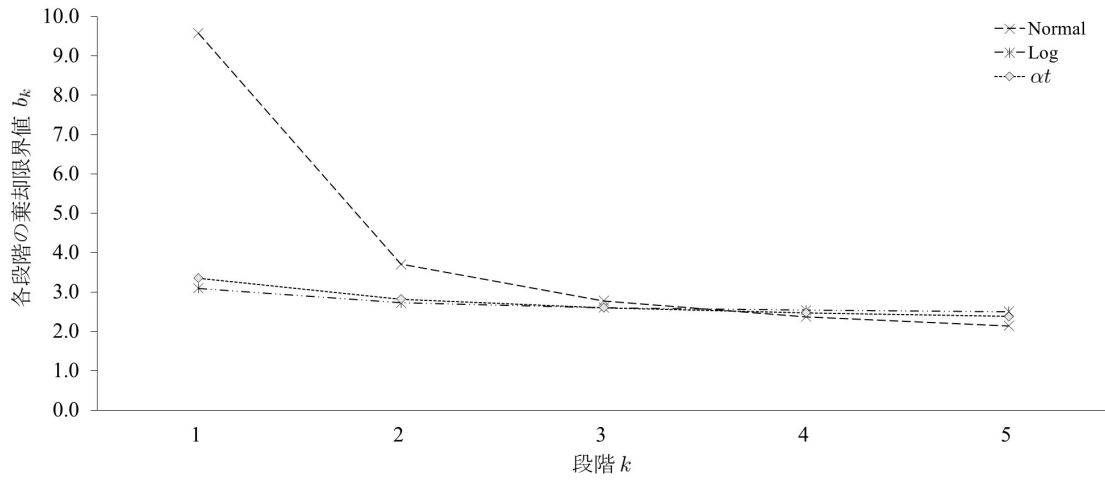


図 3.1: Normal 法, Log 法, αt 法の棄却限界値 b_k
 両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 最大検定回数 $K = 5$, 各調査項目での標本サイズ/群 $m = 5$
 (池谷 他 (2023) 図 2 を改変. 元表の転載については出版元の許諾済み.)

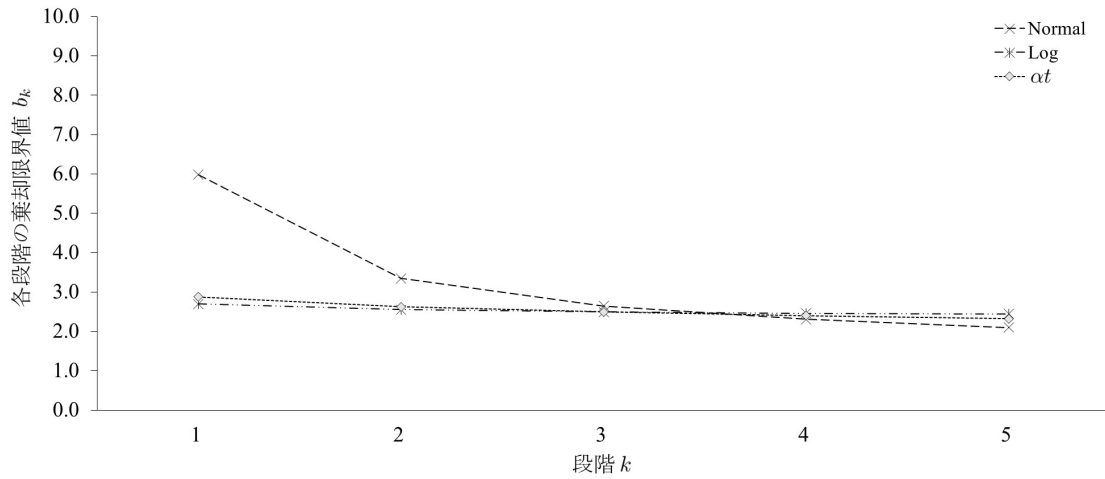


図 3.2: Normal 法, Log 法, αt 法の棄却限界値 b_k
 両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 最大検定回数 $K = 5$, 各調査項目での標本サイズ/群 $m = 10$
 (池谷 他 (2023) 図 3 を改変. 元表の転載については出版元の許諾済み.)

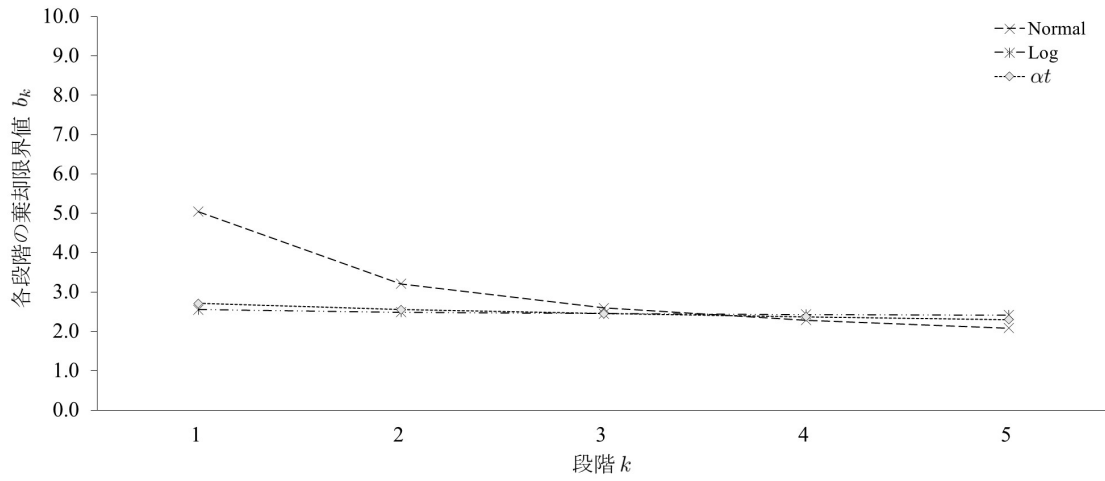


図 3.3: Normal 法, Log 法, αt 法の棄却限界値 b_k
 両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 最大検定回数 $K = 5$, 各調査項目での標本サイズ/群 $m = 20$
 (池谷 他 (2023) 図 5 を改変. 元表の転載については出版元の許諾済み.)

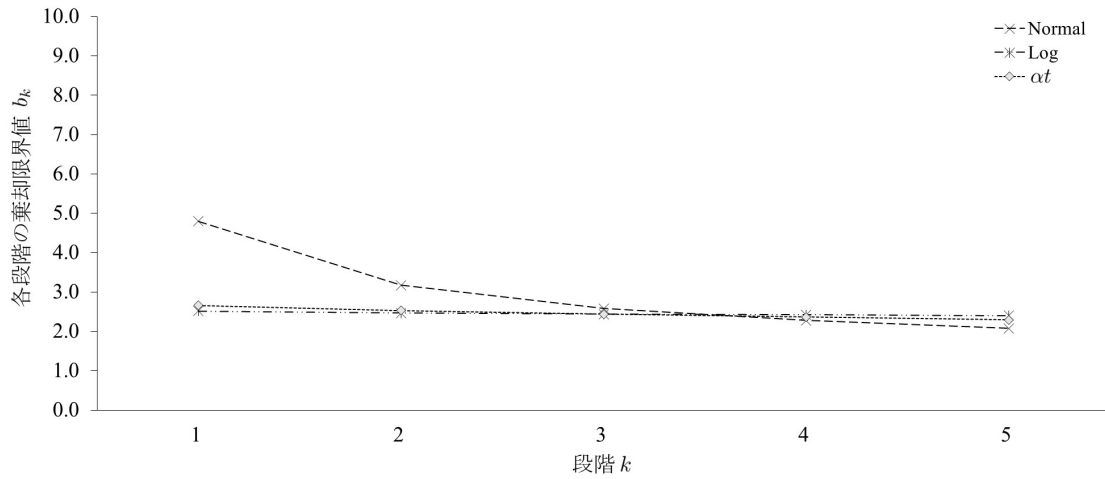


図 3.4: Normal 法, Log 法, αt 法の棄却限界値 b_k
 両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 最大検定回数 $K = 5$, 各調査項目での標本サイズ/群 $m = 30$

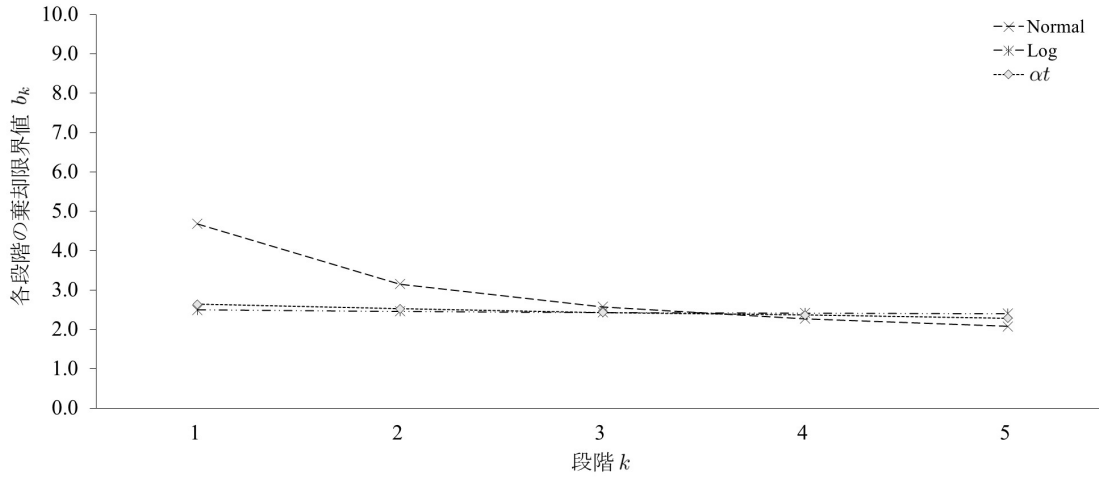


図 3.5: Normal 法, Log 法, αt 法の棄却限界値 b_k

両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 最大検定回数 $K = 5$, 各調査項目での標本サイズ/群 $m = 40$

表 3.2 および図 3.1 から 3.5 により, 棄却限界値 b_k について, 以下のことがわかる.

- 標本サイズ m を固定した場合, 棄却限界値 b_1 は前半の段階で有意水準を消費しない手法である Normal 法が 3 手法の中で最も大きく, 次いで αt 法が大きく, 前半で有意水準を消費する手法である Log 法が 3 手法の中で最も小さくなっている. また, 段階が進むにつれて Normal 法は小さくなり, Log 法と αt 法ではほとんど変わらないが, 4 段階で Log 法と αt 法の大きさが入れ替わり, 各手法の有意水準の消費の仕方の特徴が棄却限界値 b_k に表れている.
- いずれの手法も標本サイズ m が増加するにつれて, 各段階の棄却限界値 b_k は小さくなっている. これは検定統計量が t 分布に従い, 標本サイズ m が増加するに伴いその自由度が増加したことによるものと考えられる.

3.3 決定規則

この提案手法において, 調査項目 1 から反応データを順次収集し, 調査項目に対して反応データを収集次第, 2 群における群間および群内で互いに独立な各群 $n_k = km$ 個の反応データ $x_{111}, \dots, x_{1km}$ および $x_{211}, \dots, x_{2km}$ から検定統計量 T_k の実現値 t_k を求め, 事前に決めた両側有意水準 α に対応した棄却限界値 b_k を用いて, 以下のよう判断する.

- 1 段階
 - $|t_1| > b_1$ ならば, 帰無仮説 $H_0^{(1)}: \theta_1 = 0$ を棄却し, 2 群間の母平均が乖離したとして, 検定を終了する.
 - $|t_1| \leq b_1$ ならば, 帰無仮説 $H_0^{(1)}: \theta_1 = 0$ を受容し, $\theta_1 = 0$ を受容したとして, 新たに調査項目 2 で反応データを収集し, t_2 を基に 2 段階で検定を行う.
- $k(k = 2, \dots, K - 1)$ 段階
 - $|t_k| > b_k$ ならば, 帰無仮説 $H_0^{(k)}: \sum_{j=1}^k \theta_j = 0$ を棄却し, 2 群間の母平均が乖離したとして, 検定を終了する.
 - $|t_k| \leq b_k$ ならば, 帰無仮説 $H_0^{(k)}: \sum_{j=1}^k \theta_j = 0$ を受容し, $\theta_1 = \dots = \theta_k = 0$ を受容したとして, 新たに調査項目 $(k + 1)$ で反応データを収集し, t_{k+1} を基に $(k + 1)$ 段階で検定を行う.
- K 段階
 - $|t_K| > b_K$ ならば, 帰無仮説 $H_0^{(K)}: \sum_{j=1}^K \theta_j = 0$ を棄却し, 2 群間の母平均が乖離したとして, 検定を終了する.
 - $|t_K| \leq b_K$ ならば, 帰無仮説 $H_0^{(K)}: \sum_{j=1}^K \theta_j = 0$ を受容し, $\theta_1 = \dots = \theta_K = 0$ を受容したとして, 検定を終了する.

3.4 検出力

この提案手法の検出力を考えるため、対立仮説として調査項目 $r(r \geq 1)$ 以降のどこか 1 つ以上の調査項目で 2 群間の母平均に差がつく、次のような母平均の配置を考える。

$$\theta_j = \begin{cases} 0, & (j = 1, \dots, r-1), \\ \varepsilon_1 \neq 0, & (j = r, r \geq 1), \\ 0 \text{ または } \varepsilon_{j-r+1} \neq 0, & (j = r+1, \dots, K). \end{cases} \quad (3.6)$$

このような母平均の配置から、調査項目 $k(k = 1, \dots, K)$ までの母平均の差の和 $\sum_{j=1}^k \theta_j$ は次のように表すことができる。

$$\sum_{j=1}^k \theta_j \begin{cases} = 0, & (k = 1, \dots, r-1), \\ \neq 0, & (k = r, \dots, K). \end{cases}$$

また、

$$\delta_k = \sqrt{\frac{m}{2k\sigma^2}} \sum_{j=1}^k \theta_j, k = 1, \dots, K$$

とおくと、対立仮説である (3.6) の下、(3.2) および (3.3) 式は次のように表すことができる。

$$Y_k \sim N(\delta_k, 1), k = 1, \dots, K.$$

$$\mathbf{Y}_k \sim N_k(\boldsymbol{\delta}_k, \mathbf{C}_k \mathbf{C}_k'), k = 1, \dots, K.$$

ここで

$$\boldsymbol{\delta}_k = \begin{cases} (0, 0, \dots, 0)', & (k = 1, \dots, r-1), \\ (0, 0, \dots, \delta_r, \dots, \delta_k)', & (k = r, \dots, K) \end{cases}$$

であり、少なくとも 1 つ $\delta_j(j = r, \dots, K)$ で $\delta_j \neq 0$ である。提案手法の検出力 $1 - \beta$ は、対立仮説である (3.6) の下で帰無仮説 $H_0^{(1)}$ から $H_0^{(K)}$ のいずれかを棄却する次式で示す確率となり、統計量ベクトル $\mathbf{Y}_K$ は平均ベクトル $\boldsymbol{\delta}_K$ 、分散共分散行列 $\mathbf{C}_K \mathbf{C}_K'$ の K 変量正規分布に従い、統計量 $U_1, \dots, U_K$ はそれぞれ自由度 $2(m-1)$ の χ^2 分布に従うことから、 K 変量正規分布 $N_K(\boldsymbol{\delta}_K, \mathbf{C}_K \mathbf{C}_K')$ の同時確率密度関数および自由度 $2(m-1)$ の χ^2 分布の確率密度関数を用いて計算することができる。

$$1 - \beta = 1 - \Pr(|T_1| \leq b_1, \dots, |T_K| \leq b_K | \boldsymbol{\delta}_K)$$

$$\begin{aligned} &= 1 - \Pr\left(\left|\frac{Y_1}{\sqrt{\frac{V_1}{2(m-1)}}}\right| \leq b_1, \dots, \left|\frac{Y_K}{\sqrt{\frac{V_K}{2K(m-1)}}}\right| \leq b_K \mid \boldsymbol{\delta}_K\right) \\ &= 1 - \Pr\left(|Y_1| \leq b_1 \sqrt{\frac{V_1}{2(m-1)}}, \dots, |Y_K| \leq b_K \sqrt{\frac{V_K}{2K(m-1)}} \mid \boldsymbol{\delta}_K\right) \\ &= 1 - \Pr\left(|Y_1| \leq b_1 \sqrt{\frac{U_1}{2(m-1)}}, \dots, |Y_K| \leq b_K \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^K U_j}{2K(m-1)}} \mid \boldsymbol{\delta}_K\right) \\ &= 1 - \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \Pr\left(|Y_1| \leq b_1 \sqrt{\frac{u_1}{2(m-1)}}, \dots, |Y_K| \leq b_K \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^K u_j}{2K(m-1)}} \mid \boldsymbol{\delta}_K\right) \\ &\quad \times \frac{u_1^{\frac{2(m-1)}{2}-1} e^{-\frac{u_1}{2}}}{2^{\frac{2(m-1)}{2}} \Gamma\left(\frac{2(m-1)}{2}\right)} \times \dots \times \frac{u_K^{\frac{2(m-1)}{2}-1} e^{-\frac{u_K}{2}}}{2^{\frac{2(m-1)}{2}} \Gamma\left(\frac{2(m-1)}{2}\right)} du_1 \dots du_K \\ &= 1 - \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \left\{ \int_{-b_K \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^K u_j}{2K(m-1)}}}^{b_K \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^K u_j}{2K(m-1)}}} \dots \int_{-b_1 \sqrt{\frac{u_1}{2(m-1)}}}^{b_1 \sqrt{\frac{u_1}{2(m-1)}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}_K - \boldsymbol{\delta}_K)'(\mathbf{C}_K \mathbf{C}_K')^{-1}(\mathbf{y}_K - \boldsymbol{\delta}_K)} \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^K |\mathbf{C}_K \mathbf{C}_K'|}} dy_1 \dots dy_K \right\} \\ &\quad \times \frac{u_1^{\frac{2(m-1)}{2}-1} e^{-\frac{u_1}{2}}}{2^{\frac{2(m-1)}{2}} \Gamma\left(\frac{2(m-1)}{2}\right)} \times \dots \times \frac{u_K^{\frac{2(m-1)}{2}-1} e^{-\frac{u_K}{2}}}{2^{\frac{2(m-1)}{2}} \Gamma\left(\frac{2(m-1)}{2}\right)} du_1 \dots du_K. \end{aligned} \quad (3.7)$$

また、対立仮説である (3.6) の下で、 $k(k = 1, \dots, K)$ 段階までに帰無仮説 $H_0^{(1)}$ から $H_0^{(k)}$ のいずれかを棄却する確率を π_k 、 k 段階で初めて帰無仮説 $H_0^{(k)}$ を棄却する確率を π_k^* とすると次式が成り立ち、統計量ベクトル $\mathbf{Y}_k$ は平均ベクトル $\boldsymbol{\delta}_k$ 、分散共分散行列 $\mathbf{C}_k \mathbf{C}_k'$ の k 変量正規分布に従い、統計量 $U_1, \dots, U_k$ はそれぞれ自由度 $2(m-1)$ の χ^2 分布に従うことから、 k 変量正規分布 $N_k(\boldsymbol{\delta}_k, \mathbf{C}_k \mathbf{C}_k')$ の同時確率密度関数および自由度 $2(m-1)$ の χ^2 分布の確率密度関数を用いて計算することができる。

$$\begin{aligned} \pi_k &= 1 - \Pr(|T_1| \leq b_1, \dots, |T_k| \leq b_k | \boldsymbol{\delta}_k) \\ &= 1 - \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \left\{ \int_{-b_k \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^k u_j}{2k(m-1)}}}^{b_k \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^k u_j}{2k(m-1)}}} \cdots \int_{-b_1 \sqrt{\frac{u_1}{2(m-1)}}}^{b_1 \sqrt{\frac{u_1}{2(m-1)}}} \frac{e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}_k - \boldsymbol{\delta}_k)'(\mathbf{C}_k \mathbf{C}_k')^{-1}(\mathbf{y}_k - \boldsymbol{\delta}_k)}}{\sqrt{(2\pi)^k |\mathbf{C}_k \mathbf{C}_k'|}} dy_1 \cdots dy_k \right\} \\ &\quad \times \frac{u_1^{\frac{2(m-1)}{2}-1} e^{-\frac{u_1}{2}}}{2^{\frac{2(m-1)}{2}} \Gamma\left(\frac{2(m-1)}{2}\right)} \times \cdots \times \frac{u_k^{\frac{2(m-1)}{2}-1} e^{-\frac{u_k}{2}}}{2^{\frac{2(m-1)}{2}} \Gamma\left(\frac{2(m-1)}{2}\right)} du_1 \cdots du_k, k = 1, \dots, K. \\ \pi_k^* &= \Pr(|T_1| \leq b_1, \dots, |T_k| > b_k | \boldsymbol{\delta}_k) \\ &= \pi_k - \pi_{k-1}, \pi_0 = 0, k = 1, \dots, K. \\ 1 - \beta &= \pi_K \\ &= \sum_{k=1}^K \pi_k^*. \end{aligned}$$

検出力 $1 - \beta$ の計算には、両側有意水準 α 、棄却限界値 $b_1, \dots, b_K$ 、母平均の差の配置 $\theta_1, \dots, \theta_K$ の想定値、母分散 σ^2 の想定値、各群の各調査項目の標本サイズ m が必要となる。

3.5 必要標本サイズ

提案手法の対象となるデータの収集計画を立てるとき、両側有意水準 α および検出力 $1 - \beta$ を考慮した各群の各調査項目の標本サイズ m を決める必要があり、その手順を以下に示す。

1. 最大検定回数 (調査項目数) K 、使用する手法、両側有意水準 α 、目標とする検出力 $1 - \beta$ を決める。
2. 2 群間の母平均の差の配置の想定値 $\theta_1, \dots, \theta_K$ を与える。
3. 各群の各調査項目の仮の標本サイズ $m_0 = 2$ を与え、手法に合わせた棄却限界値 $b_1, \dots, b_K$ を (3.4) および (3.5) 式より算出する、
4. 棄却限界値 $b_1, \dots, b_K$ 、各群の各調査項目の仮の標本サイズ m_0 、2 群間の母平均の差の配置の想定値 $\theta_1, \dots, \theta_K$ 、未知の母分散 σ^2 の想定値を用いて (3.7) 式より算出した検出力を $1 - \beta_0$ とする。
5. $1 - \beta_0 < 1 - \beta$ なら各群の各調査項目の仮の標本サイズ $m_0 = m_0 + 1$ として手順 3 に戻り、 $1 - \beta_0 \geq 1 - \beta$ ならば m_0 を各群の各調査項目の標本サイズ m とする。

また、提案手法では途中で帰無仮説 $H_0^{(1)}, \dots, H_0^{(K-1)}$ のいずれかを棄却し、最大検定回数である K 段階までの各群の累積標本サイズ $n_K = Km$ の反応データを収集しないことがある。このことから試験全体で標本サイズが平均的にどのくらいになるかを示す指標として群逐次検定と同様に平均標本サイズ $E(n_k)$ を考える。算出方法は群逐次検定と同様に (1.13) 式で求めることができる。

3.6 シミュレーションと数値例

3.6.1 帰無仮説 $H_0^{(5)} : \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = \theta_5 = 0$ の下でのシミュレーション

提案手法において最大検定回数 (調査項目数) $K = 5$ として、帰無仮説 $H_0^{(5)} : \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = \theta_5 = 0 (\mu_{1j} = \mu_{2j} = 0, j = 1, \dots, 5)$ 、母分散 $\sigma^2 = 1.0$ の下で、各群の各調査項目の標本サイズ m のいくつかのパターンで $N(0, 1)$ の正規分布に従う正規乱数を各群の各段階で m 個ずつ発生させ、両側有意水準 $\alpha = 0.05$ で仮説検定を行うシミュレーションを行う。シミュレーション回数に対して帰無仮説 $H_0^{(1)}$ から $H_0^{(5)}$ のいずれかを棄却した割合から両側有意水準 α が設定通りになっているか評価した結果を表 3.3 に示す。

表 3.3: 帰無仮説 $H_0^{(k)} : \sum_{j=1}^k \theta_j = 0$ の下でのシミュレーション結果
 両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 最大検定回数 $K = 5$

手法	各調査項目の標本サイズ/群 m	シミュレーション 回数	帰無仮説 $H_0^{(k)}$ を棄却	
			回数	割合
Normal 法	5	10000	503	0.0503
	10	10000	515	0.0515
	20	10000	473	0.0473
	30	10000	492	0.0492
	40	10000	488	0.0488
Log 法	5	10000	531	0.0531
	10	10000	490	0.0490
	20	10000	507	0.0507
	30	10000	490	0.0490
	40	10000	486	0.0486
αt 法	5	10000	505	0.0505
	10	10000	499	0.0499
	20	10000	494	0.0494
	30	10000	470	0.0470
	40	10000	471	0.0471

表 3.3 に示した結果から帰無仮説 $H_0^{(k)}$ の下では, 各群の各調査項目の標本サイズ m によらず両側有意水準 α が保たれていることがわかる.

3.6.2 対立仮説 $H_1^{(5)} : \sum_{j=1}^5 \theta_j \neq 0$ の下でのシミュレーション

次に最大検定回数 (調査項目数) $K = 5$ として, 対立仮説 $H_1^{(5)} : \sum_{j=1}^5 \theta_j \neq 0$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$ の下で, 各群の各調査項目の標本サイズ m のいくつかのパターンで両側有意水準 $\alpha = 0.05$ としたときの検出力 $1 - \beta$ を計算した結果を示す. 対立仮説 $H_1^{(5)} : \sum_{j=1}^5 \theta_j \neq 0$ の下での母平均の差の配置 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$ は, 表 3.4 に示すパターンを用いる.

表 3.4: 対立仮説 $H_1^{(5)} : \sum_{j=1}^5 \theta_j \neq 0$ として用いる母平均の配置のパターン

パターン No.	母平均の差の配置				
	$\theta_1 = \mu_{21} - \mu_{11}$	$\theta_2 = \mu_{22} - \mu_{12}$	$\theta_3 = \mu_{23} - \mu_{13}$	$\theta_4 = \mu_{24} - \mu_{14}$	$\theta_5 = \mu_{25} - \mu_{15}$
1	0.0 = 0.0 - 0.0	0.0 = 0.0 - 0.0	0.0 = 0.0 - 0.0	0.0 = 0.0 - 0.0	1.0 = 1.0 - 0.0
2	0.0 = 0.0 - 0.0	0.0 = 0.0 - 0.0	0.0 = 0.0 - 0.0	0.0 = 0.0 - 0.0	1.5 = 1.5 - 0.0
3	0.0 = 0.0 - 0.0	0.0 = 0.0 - 0.0	0.0 = 0.0 - 0.0	1.0 = 1.0 - 0.0	0.0 = 0.0 - 0.0
4	0.0 = 0.0 - 0.0	0.0 = 0.0 - 0.0	0.0 = 0.0 - 0.0	1.0 = 1.0 - 0.0	1.0 = 1.0 - 0.0
5	0.0 = 0.0 - 0.0	0.0 = 0.0 - 0.0	0.0 = 0.0 - 0.0	1.5 = 1.5 - 0.0	1.5 = 1.5 - 0.0
6	0.0 = 0.0 - 0.0	0.0 = 0.0 - 0.0	1.0 = 1.0 - 0.0	0.0 = 0.0 - 0.0	0.0 = 0.0 - 0.0
7	0.0 = 0.0 - 0.0	0.0 = 0.0 - 0.0	1.0 = 1.0 - 0.0	1.0 = 1.0 - 0.0	0.0 = 0.0 - 0.0
8	0.0 = 0.0 - 0.0	0.0 = 0.0 - 0.0	1.5 = 1.5 - 0.0	1.5 = 1.5 - 0.0	0.0 = 0.0 - 0.0
9	0.0 = 0.0 - 0.0	1.0 = 1.0 - 0.0	0.0 = 0.0 - 0.0	0.0 = 0.0 - 0.0	0.0 = 0.0 - 0.0
10	0.0 = 0.0 - 0.0	1.0 = 1.0 - 0.0	1.0 = 1.0 - 0.0	0.0 = 0.0 - 0.0	0.0 = 0.0 - 0.0
11	0.0 = 0.0 - 0.0	1.5 = 1.5 - 0.0	1.5 = 1.5 - 0.0	0.0 = 0.0 - 0.0	0.0 = 0.0 - 0.0
12	1.0 = 1.0 - 0.0	0.0 = 0.0 - 0.0	0.0 = 0.0 - 0.0	0.0 = 0.0 - 0.0	0.0 = 0.0 - 0.0
13	1.0 = 1.0 - 0.0	1.0 = 1.0 - 0.0	0.0 = 0.0 - 0.0	0.0 = 0.0 - 0.0	0.0 = 0.0 - 0.0
14	1.5 = 1.5 - 0.0	1.5 = 1.5 - 0.0	0.0 = 0.0 - 0.0	0.0 = 0.0 - 0.0	0.0 = 0.0 - 0.0

また、各群の調査項目 $j (j = 1, \dots, 5)$ においてそれぞれ $N(\mu_{1j}, 1), N(\mu_{2j}, 1)$ の正規分布に従う正規乱数を各群の各調査項目で m 個ずつ発生させ、両側有意水準 $\alpha = 0.05$ で仮説検定を行うシミュレーションを行い、帰無仮説 $H_0^{(1)}$ から $H_0^{(5)}$ のいずれかを棄却した割合から検出力 $1 - \beta$ と同様になっているか評価した結果を表 3.5 から 3.18 および図 3.6 から 3.10 に示す。

表 3.5: 対立仮説 $H_1^{(5)} : \sum_{j=1}^5 \theta_j \neq 0$ の下でのシミュレーション結果

両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 最大検定回数 $K = 5$

母平均の差の配置パターン 1: $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5) = (0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0)$

(池谷 他 (2023) 表 4 から $m = 15$ を除き, $m = 30, 40$ およびシミュレーション結果を追加して改変。
元表の転載については出版元の許諾済み.)

手法	各調査項目の標本サイズ/群 m	検出力 $1 - \beta$	シミュレーション 回数	帰無仮説 $H_0^{(k)}$ を棄却	
				回数	割合
Normal 法	5	0.0994	10000	988	0.0988
	10	0.1548	10000	1550	0.1550
	20	0.2693	10000	2674	0.2674
	30	0.3817	10000	3858	0.3858
	40	0.4861	10000	4894	0.4894
Log 法	5	0.0751	10000	733	0.0733
	10	0.1079	10000	1108	0.1108
	20	0.1875	10000	1877	0.1877
	30	0.2771	10000	2776	0.2776
	40	0.3682	10000	3690	0.3690
ot 法	5	0.0819	10000	822	0.0822
	10	0.1217	10000	1199	0.1199
	20	0.2132	10000	2155	0.2155
	30	0.3113	10000	3145	0.3145
	40	0.4084	10000	4116	0.4116

表 3.6: 対立仮説 $H_1^{(5)} : \sum_{j=1}^5 \theta_j \neq 0$ の下でのシミュレーション結果両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 最大検定回数 $K = 5$ 母平均の差の配置パターン 2: $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5) = (0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.5)$ (池谷 他 (2023) 表 4 から $m = 15$ を除き, $m = 30, 40$ およびシミュレーション結果を追加して改変.
元表の転載については出版元の許諾済み.)

手法	各調査項目の標本サイズ/群 m	検出力 $1 - \beta$	シミュレーション 回数	帰無仮説 $H_0^{(k)}$ を棄却	
				回数	割合
Normal 法	5	0.1646	10000	1669	0.1669
	10	0.2933	10000	2909	0.2909
	20	0.5319	10000	5329	0.5329
	30	0.7141	10000	7201	0.7201
	40	0.8370	10000	8390	0.8390
Log 法	5	0.1137	10000	1142	0.1142
	10	0.2043	10000	1995	0.1995
	20	0.4102	10000	4124	0.4124
	30	0.5990	10000	5930	0.5930
	40	0.7445	10000	7484	0.7484
αt 法	5	0.1287	10000	1280	0.1280
	10	0.2323	10000	2381	0.2381
	20	0.4519	10000	4489	0.4489
	30	0.6406	10000	6399	0.6399
	40	0.7797	10000	7715	0.7715

表 3.7: 対立仮説 $H_1^{(5)} : \sum_{j=1}^5 \theta_j \neq 0$ の下でのシミュレーション結果両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 最大検定回数 $K = 5$ 母平均の差の配置パターン 3: $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5) = (0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0)$ (池谷 他 (2023) 表 4 から $m = 15$ を除き, $m = 30, 40$ およびシミュレーション結果を追加して改変.
元表の転載については出版元の許諾済み.)

手法	各調査項目の標本サイズ/群 m	検出力 $1 - \beta$	シミュレーション 回数	帰無仮説 $H_0^{(k)}$ を棄却	
				回数	割合
Normal 法	5	0.1101	10000	1080	0.1080
	10	0.1775	10000	1834	0.1834
	20	0.3139	10000	3183	0.3183
	30	0.4432	10000	4443	0.4443
	40	0.5583	10000	5591	0.5591
Log 法	5	0.0895	10000	875	0.0875
	10	0.1392	10000	1403	0.1403
	20	0.2521	10000	2544	0.2544
	30	0.3706	10000	3740	0.3740
	40	0.4833	10000	4904	0.4904
αt 法	5	0.0961	10000	936	0.0936
	10	0.1519	10000	1511	0.1511
	20	0.2735	10000	2711	0.2711
	30	0.3965	10000	3963	0.3963
	40	0.5108	10000	5059	0.5059

表 3.8: 対立仮説 $H_1^{(5)}: \sum_{j=1}^5 \theta_j \neq 0$ の下でのシミュレーション結果両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 最大検定回数 $K = 5$ 母平均の差の配置パターン 4: $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5) = (0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 1.0)$ (池谷 他 (2023) 表 4 から $m = 15$ を除き, $m = 30, 40$ およびシミュレーション結果を追加して改変.
元表の転載については出版元の許諾済み.)

手法	各調査項目の標本サイズ/群 m	検出力 $1 - \beta$	シミュレーション 回数	帰無仮説 $H_0^{(k)}$ を棄却	
				回数	割合
Normal 法	5	0.2520	10000	2546	0.2546
	10	0.4695	10000	4698	0.4698
	20	0.7782	10000	7853	0.7853
	30	0.9222	10000	9239	0.9239
	40	0.9764	10000	9773	0.9773
Log 法	5	0.1766	10000	1713	0.1713
	10	0.3549	10000	3546	0.3546
	20	0.6776	10000	6819	0.6819
	30	0.8680	10000	8691	0.8691
	40	0.9536	10000	9532	0.9532
αt 法	5	0.2002	10000	2068	0.2068
	10	0.3935	10000	3910	0.3910
	20	0.7155	10000	7140	0.7140
	30	0.8902	10000	8905	0.8905
	40	0.9637	10000	9673	0.9673

表 3.9: 対立仮説 $H_1^{(5)}: \sum_{j=1}^5 \theta_j \neq 0$ の下でのシミュレーション結果両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 最大検定回数 $K = 5$ 母平均の差の配置パターン 5: $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5) = (0.0, 0.0, 0.0, 1.5, 1.5)$ (池谷 他 (2023) 表 4 から $m = 15$ を除き, $m = 30, 40$ およびシミュレーション結果を追加して改変.
元表の転載については出版元の許諾済み.)

手法	各調査項目の標本サイズ/群 m	検出力 $1 - \beta$	シミュレーション 回数	帰無仮説 $H_0^{(k)}$ を棄却	
				回数	割合
Normal 法	5	0.5044	10000	5014	0.5014
	10	0.8203	10000	8225	0.8225
	20	0.9871	10000	9870	0.9870
	30	0.9995	10000	9995	0.9995
	40	1.0000	10000	10000	1.0000
Log 法	5	0.3835	10000	3752	0.3752
	10	0.7262	10000	7288	0.7288
	20	0.9725	10000	9725	0.9725
	30	0.9987	10000	9988	0.9988
	40	1.0000	10000	9999	0.9999
αt 法	5	0.4243	10000	4283	0.4283
	10	0.7619	10000	7612	0.7612
	20	0.9791	10000	9797	0.9797
	30	0.9991	10000	9989	0.9989
	40	1.0000	10000	10000	1.0000

表 3.10: 対立仮説 $H_1^{(5)} : \sum_{j=1}^5 \theta_j \neq 0$ の下でのシミュレーション結果両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 最大検定回数 $K = 5$ 母平均の差の配置パターン 6 : $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5) = (0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0)$ (池谷 他 (2023) 表 4 から $m = 15$ を除き, $m = 30, 40$ およびシミュレーション結果を追加して改変.
元表の転載については出版元の許諾済み.)

手法	各調査項目の標本サイズ/群 m	検出力 $1 - \beta$	シミュレーション 回数	帰無仮説 $H_0^{(k)}$ を棄却	
				回数	割合
Normal 法	5	0.1164	10000	1119	0.1119
	10	0.1936	10000	1899	0.1899
	20	0.3510	10000	3464	0.3464
	30	0.4975	10000	4925	0.4925
	40	0.6232	10000	6188	0.6188
Log 法	5	0.1070	10000	1065	0.1065
	10	0.1801	10000	1771	0.1771
	20	0.3379	10000	3346	0.3346
	30	0.4902	10000	4942	0.4942
	40	0.6223	10000	6180	0.6180
αt 法	5	0.1113	10000	1121	0.1121
	10	0.1874	10000	1837	0.1837
	20	0.3480	10000	3476	0.3476
	30	0.5001	10000	4970	0.4970
	40	0.6307	10000	6285	0.6285

表 3.11: 対立仮説 $H_1^{(5)} : \sum_{j=1}^5 \theta_j \neq 0$ の下でのシミュレーション結果両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 最大検定回数 $K = 5$ 母平均の差の配置パターン 7 : $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5) = (0.0, 0.0, 1.0, 1.0, 0.0)$ (池谷 他 (2023) 表 4 から $m = 15$ を除き, $m = 30, 40$ およびシミュレーション結果を追加して改変.
元表の転載については出版元の許諾済み.)

手法	各調査項目の標本サイズ/群 m	検出力 $1 - \beta$	シミュレーション 回数	帰無仮説 $H_0^{(k)}$ を棄却	
				回数	割合
Normal 法	5	0.2968	10000	2924	0.2924
	10	0.5442	10000	5521	0.5521
	20	0.8466	10000	8440	0.8440
	30	0.9577	10000	9588	0.9588
	40	0.9899	10000	9896	0.9896
Log 法	5	0.2362	10000	2361	0.2361
	10	0.4677	10000	4655	0.4655
	20	0.8007	10000	7948	0.7948
	30	0.9419	10000	9397	0.9397
	40	0.9860	10000	9871	0.9871
αt 法	5	0.2566	10000	2561	0.2561
	10	0.4953	10000	5012	0.5012
	20	0.8191	10000	8240	0.8240
	30	0.9489	10000	9489	0.9489
	40	0.9880	10000	9899	0.9899

表 3.12: 対立仮説 $H_1^{(5)} : \sum_{j=1}^5 \theta_j \neq 0$ の下でのシミュレーション結果両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 最大検定回数 $K = 5$ 母平均の差の配置パターン 8: $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5) = (0.0, 0.0, 1.5, 1.5, 0.0)$ (池谷 他 (2023) 表 4 から $m = 15$ を除き, $m = 30, 40$ およびシミュレーション結果を追加して改変.
元表の転載については出版元の許諾済み.)

手法	各調査項目の標本サイズ/群 m	検出力 $1 - \beta$	シミュレーション 回数	帰無仮説 $H_0^{(k)}$ を棄却	
				回数	割合
Normal 法	5	0.5784	10000	5765	0.5765
	10	0.8811	10000	8805	0.8805
	20	0.9950	10000	9965	0.9965
	30	0.9999	10000	9999	0.9999
	40	1.0000	10000	10000	1.0000
Log 法	5	0.4974	10000	4980	0.4980
	10	0.8408	10000	8410	0.8410
	20	0.9929	10000	9933	0.9933
	30	0.9999	10000	9998	0.9998
	40	1.0000	10000	10000	1.0000
αt 法	5	0.5266	10000	5351	0.5351
	10	0.8572	10000	8633	0.8633
	20	0.9941	10000	9929	0.9929
	30	0.9999	10000	9999	0.9999
	40	1.0000	10000	10000	1.0000

表 3.13: 対立仮説 $H_1^{(5)} : \sum_{j=1}^5 \theta_j \neq 0$ の下でのシミュレーション結果両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 最大検定回数 $K = 5$ 母平均の差の配置パターン 9: $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5) = (0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0)$ (池谷 他 (2023) 表 4 から $m = 15$ を除き, $m = 30, 40$ およびシミュレーション結果を追加して改変.
元表の転載については出版元の許諾済み.)

手法	各調査項目の標本サイズ/群 m	検出力 $1 - \beta$	シミュレーション 回数	帰無仮説 $H_0^{(k)}$ を棄却	
				回数	割合
Normal 法	5	0.1193	10000	1139	0.1139
	10	0.2029	10000	2020	0.2020
	20	0.3793	10000	3804	0.3804
	30	0.5449	10000	5406	0.5406
	40	0.6840	10000	6799	0.6799
Log 法	5	0.1353	10000	1393	0.1393
	10	0.2497	10000	2501	0.2501
	20	0.4788	10000	4788	0.4788
	30	0.6679	10000	6653	0.6653
	40	0.8025	10000	7945	0.7945
αt 法	5	0.1339	10000	1378	0.1378
	10	0.2446	10000	2496	0.2496
	20	0.4677	10000	4572	0.4572
	30	0.6548	10000	6601	0.6601
	40	0.7906	10000	7898	0.7898

表 3.14: 対立仮説 $H_1^{(5)} : \sum_{j=1}^5 \theta_j \neq 0$ の下でのシミュレーション結果両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 最大検定回数 $K = 5$ 母平均の差の配置パターン 10: $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5) = (0.0, 1.0, 1.0, 0.0, 0.0)$ (池谷 他 (2023) 表 4 から $m = 15$ を除き, $m = 30, 40$ およびシミュレーション結果を追加して改変.
元表の転載については出版元の許諾済み.)

手法	各調査項目の標本サイズ/群 m	検出力 $1 - \beta$	シミュレーション 回数	帰無仮説 $H_0^{(k)}$ を棄却	
				回数	割合
Normal 法	5	0.3298	10000	3371	0.3371
	10	0.6075	10000	6037	0.6037
	20	0.9018	10000	9024	0.9024
	30	0.9814	10000	9841	0.9841
	40	0.9971	10000	9964	0.9964
Log 法	5	0.3123	10000	3034	0.3034
	10	0.6015	10000	5992	0.5992
	20	0.9067	10000	9055	0.9055
	30	0.9842	10000	9854	0.9854
	40	0.9979	10000	9977	0.9977
αt 法	5	0.3227	10000	3248	0.3248
	10	0.6108	10000	6041	0.6041
	20	0.9094	10000	9048	0.9048
	30	0.9846	10000	9838	0.9838
	40	0.9979	10000	9984	0.9984

表 3.15: 対立仮説 $H_1^{(5)} : \sum_{j=1}^5 \theta_j \neq 0$ の下でのシミュレーション結果両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 最大検定回数 $K = 5$ 母平均の差の配置パターン 11: $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5) = (0.0, 1.5, 1.5, 0.0, 0.0)$ (池谷 他 (2023) 表 4 から $m = 15$ を除き, $m = 30, 40$ およびシミュレーション結果を追加して改変.
元表の転載については出版元の許諾済み.)

手法	各調査項目の標本サイズ/群 m	検出力 $1 - \beta$	シミュレーション 回数	帰無仮説 $H_0^{(k)}$ を棄却	
				回数	割合
Normal 法	5	0.6360	10000	6467	0.6467
	10	0.9269	10000	9296	0.9296
	20	0.9988	10000	9986	0.9986
	30	1.0000	10000	10000	1.0000
	40	1.0000	10000	10000	1.0000
Log 法	5	0.6253	10000	6221	0.6221
	10	0.9307	10000	9313	0.9313
	20	0.9991	10000	9994	0.9994
	30	1.0000	10000	10000	1.0000
	40	1.0000	10000	10000	1.0000
αt 法	5	0.6359	10000	6312	0.6312
	10	0.9330	10000	9333	0.9333
	20	0.9991	10000	9990	0.9990
	30	1.0000	10000	10000	1.0000
	40	1.0000	10000	10000	1.0000

表 3.16: 対立仮説 $H_1^{(5)} : \sum_{j=1}^5 \theta_j \neq 0$ の下でのシミュレーション結果両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 最大検定回数 $K = 5$ 母平均の差の配置パターン 12: $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5) = (1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0)$ (池谷 他 (2023) 表 4 から $m = 15$ を除き, $m = 30, 40$ およびシミュレーション結果を追加して改変.
元表の転載については出版元の許諾済み.)

手法	各調査項目の標本サイズ/群 m	検出力 $1 - \beta$	シミュレーション 回数	帰無仮説 $H_0^{(k)}$ を棄却	
				回数	割合
Normal 法	5	0.1194	10000	1235	0.1235
	10	0.2038	10000	2050	0.2050
	20	0.3879	10000	3868	0.3868
	30	0.5725	10000	5650	0.5650
	40	0.7327	10000	7345	0.7345
Log 法	5	0.2000	10000	2050	0.2050
	10	0.4222	10000	4256	0.4256
	20	0.7651	10000	7645	0.7645
	30	0.9238	10000	9214	0.9214
	40	0.9788	10000	9784	0.9784
αt 法	5	0.1811	10000	1821	0.1821
	10	0.3837	10000	3845	0.3845
	20	0.7273	10000	7268	0.7268
	30	0.9043	10000	9034	0.9034
	40	0.9713	10000	9719	0.9719

表 3.17: 対立仮説 $H_1^{(5)} : \sum_{j=1}^5 \theta_j \neq 0$ の下でのシミュレーション結果両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 最大検定回数 $K = 5$ 母平均の差の配置パターン 13: $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5) = (1.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0)$ (池谷 他 (2023) 表 4 から $m = 15$ を除き, $m = 30, 40$ およびシミュレーション結果を追加して改変.
元表の転載については出版元の許諾済み.)

手法	各調査項目の標本サイズ/群 m	検出力 $1 - \beta$	シミュレーション 回数	帰無仮説 $H_0^{(k)}$ を棄却	
				回数	割合
Normal 法	5	0.3475	10000	3497	0.3497
	10	0.6565	10000	6582	0.6582
	20	0.9449	10000	9465	0.9465
	30	0.9946	10000	9950	0.9950
	40	0.9996	10000	9999	0.9999
Log 法	5	0.4386	10000	4463	0.4463
	10	0.7825	10000	7812	0.7812
	20	0.9815	10000	9792	0.9792
	30	0.9990	10000	9991	0.9991
	40	1.0000	10000	9999	0.9999
αt 法	5	0.4263	10000	4378	0.4378
	10	0.7691	10000	7636	0.7636
	20	0.9790	10000	9783	0.9783
	30	0.9988	10000	9988	0.9988
	40	0.9999	10000	10000	1.0000

表 3.18: 対立仮説 $H_1^{(5)}: \sum_{j=1}^5 \theta_j \neq 0$ の下でのシミュレーション結果

両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 最大検定回数 $K = 5$

母平均の差の配置パターン 14: $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5) = (1.5, 1.5, 0.0, 0.0, 0.0)$

(池谷 他 (2023) 表 4 から $m = 15$ を除き, $m = 30, 40$ およびシミュレーション結果を追加して改変.
元表の転載については出版元の許諾済み.)

手法	各調査項目の標本サイズ/群 m	検出力 $1 - \beta$	シミュレーション 回数	帰無仮説 $H_0^{(k)}$ を棄却	
				回数	割合
Normal 法	5	0.6719	10000	6688	0.6688
	10	0.9587	10000	9560	0.9560
	20	0.9999	10000	10000	1.0000
	30	1.0000	10000	10000	1.0000
	40	1.0000	10000	10000	1.0000
Log 法	5	0.7879	10000	7881	0.7881
	10	0.9876	10000	9878	0.9878
	20	1.0000	10000	9999	0.9999
	30	1.0000	10000	10000	1.0000
	40	1.0000	10000	10000	1.0000
αt 法	5	0.7752	10000	7774	0.7774
	10	0.9857	10000	9856	0.9856
	20	1.0000	10000	10000	1.0000
	30	1.0000	10000	10000	1.0000
	40	1.0000	10000	10000	1.0000

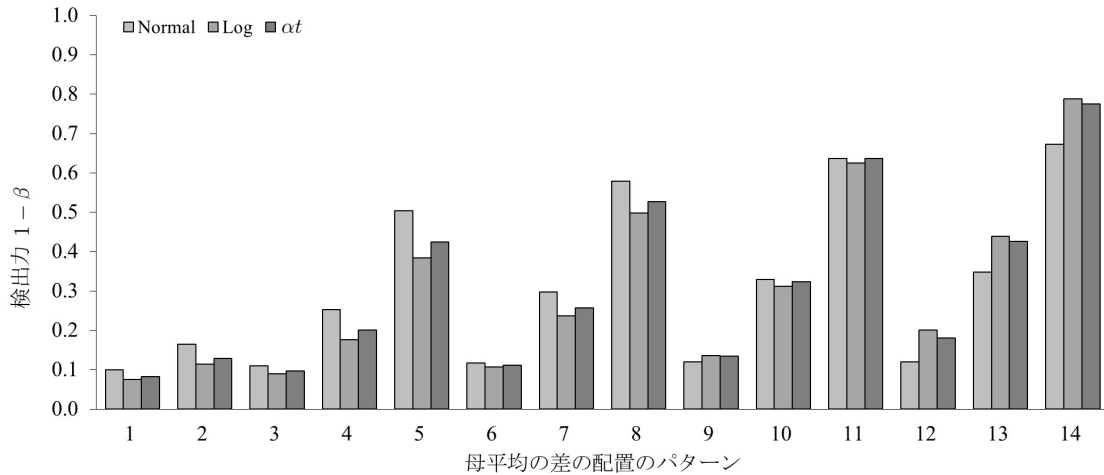


図 3.6: 各調査項目での標本サイズ/群 $m = 5$ における母平均の差の配置パターン別の検出力 $1 - \beta$
両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 最大検定回数 $K = 5$
(池谷 他 (2023) 図 6 を改変. 元表の転載については出版元の許諾済み.)

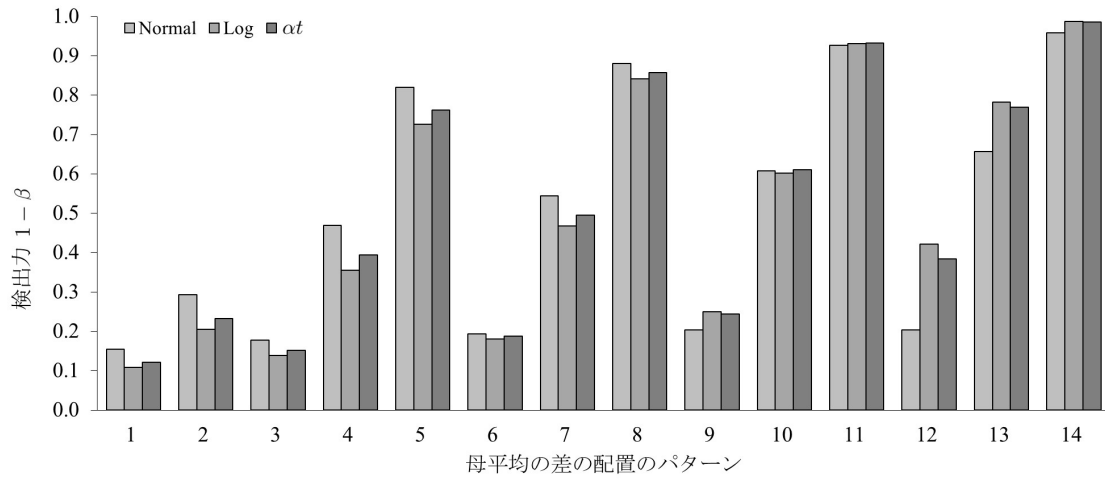


図 3.7: 各調査項目での標本サイズ/群 $m = 10$ における母平均の差の配置パターン別の検出力 $1 - \beta$
 両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 最大検定回数 $K = 5$
 (池谷 他 (2023) 図 7 を改変. 元表の転載については出版元の許諾済み.)

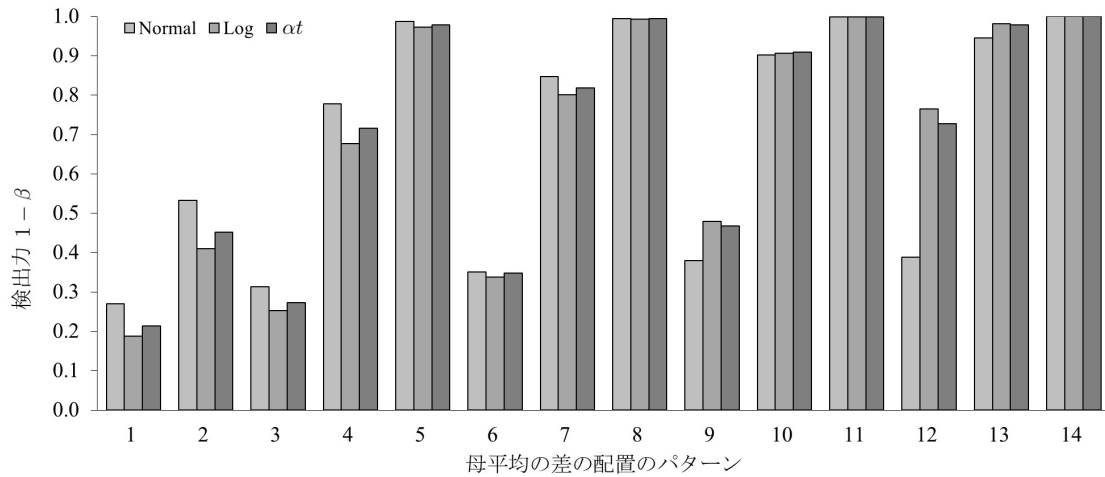


図 3.8: 各調査項目での標本サイズ/群 $m = 20$ における母平均の差の配置パターン別の検出力 $1 - \beta$
 両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 最大検定回数 $K = 5$
 (池谷 他 (2023) 図 9 を改変. 元表の転載については出版元の許諾済み.)

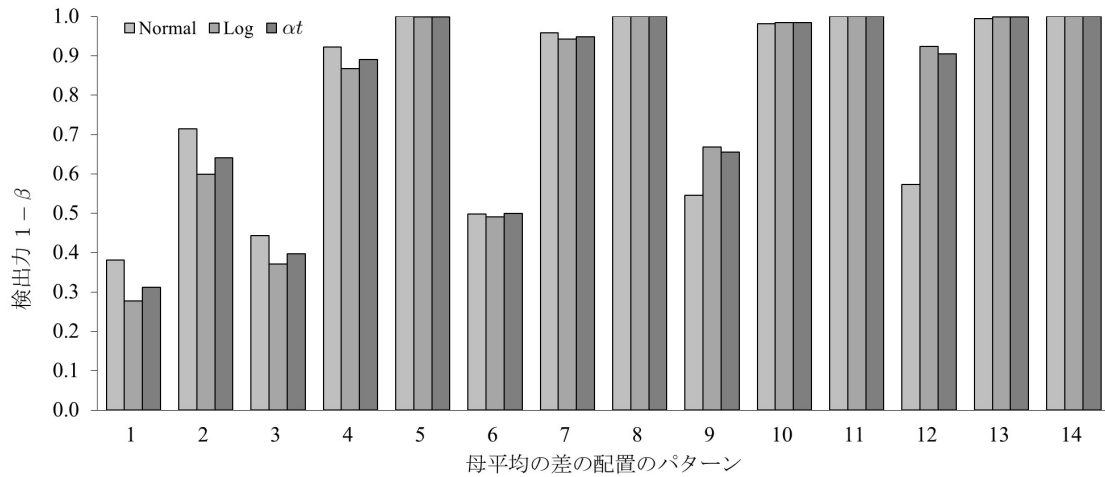


図 3.9: 各調査項目での標本サイズ/群 $m = 30$ における母平均の差の配置パターン別の検出力 $1 - \beta$ 両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 最大検定回数 $K = 5$

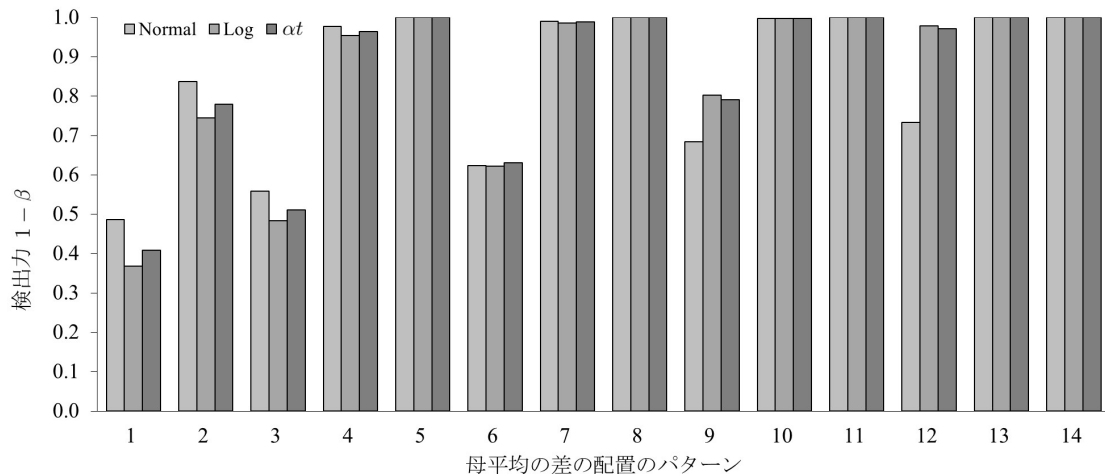


図 3.10: 各調査項目での標本サイズ/群 $m = 40$ における母平均の差の配置パターン別の検出力 $1 - \beta$ 両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 最大検定回数 $K = 5$

表 3.5 から 3.18 および図 3.6 から 3.10 に示した結果から次のことがわかる。

- シミュレーションによる帰無仮説 $H_0^{(1)}$ から $H_0^{(5)}$ のいずれかを棄却する割合から検出力 $1 - \beta$ は保たれている。
- 各群の各調査項目の標本サイズ m を固定した場合、母平均の差が 1.5 と大きく、差が連続しているパターン 5, 8, 11, 14 ではいずれの手法も高い検出力となり、次いで母平均の差が 1.0 で差が連続しているパターン 4, 7, 10, 13 で検出力が高くなっている。一方、母平均の差が最後の調査項目 5 のみでみられるパターン 1, 2, 調査項目のうち、1 項目だけで差がみられるパターン 3, 6, 9, 12 では検出力が低くなっている。
- 各群の各調査項目の標本サイズ m および 2 群間の母平均の差の配置のパターンを固定した場合、調査項目 3 以降で母平均の差が連続してみられるパターン 1 から 5, 7, 8 では 3 手法の中では Normal 法の検出力が最も高く、次いで αt 法が高く、Log 法が最も低くなっている。一方、調査項目 2 以前の段階で母平均の差が連続してみられるパターン 12 から 14 では Log 法の検出力が最も高く、次いで αt 法が高く、Normal 法が最も低くなっている。これらの傾向は、Normal 法は後半の段階で有意水準を消費し、Log 法は前半の段階で有意水準を消費すると言った有意水準の消費の仕方の違いによるものと考えられる。
- 2 群間の母平均の差の配置のパターンを固定した場合、標本サイズ m が増加するにつれて検出力 $1 - \beta$ は高くなる。標本サイズが小さいときには 3 手法間の検出力に差があまりみられなかつ

たパターン 6, 9, 10 では, 標本サイズを増やしてもパターン 6, 10 に差はみられないままだったが, パターン 9 ではパターン 12 から 14 と同様に Log 法の検出力が最も高く, 次いで αt が高く, Normal 法が最も低くなっている. また, パターン 12 では標本サイズが大きくなると傾向が顕著になる. 一方, 標本サイズが小さい場合でも検出力の高かったパターン 5, 8, 11, 14 では標本サイズ 20 以上で, パターン 4, 7, 10, 13 では標本サイズ 30 以上で検出力が十分高く, 3 手法間での差はほとんどみられない.

- パターン 1, 3, 6, 9, 12 は母平均の差がともに 1.0 と同じだが, 差がみられるタイミングが異なる. このとき, 同一手法の中で前半の段階で差がみられるパターン 12 が最も検出力 $1 - \beta$ が高くなり, 母平均の差の大きさが同じでも調査項目の順序によって検出力 $1 - \beta$ が変わることに注意が必要である.

3.6.3 対立仮説 $H_1^{(5)} : \sum_{j=1}^k \theta_j \neq 0$ の下での標本サイズ設計とシミュレーション

最後に最大検定回数 (調査項目数) $K = 5$ として, 対立仮説 $H_1^{(5)} : \sum_{j=1}^5 \neq 0$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$ の下で, 両側有意水準 $\alpha = 0.05$ としたときの検出力 $1 - \beta = 0.80$ を満たす各群の各調査項目の標本サイズ m と平均標本サイズ $E(n_k)$ を示す. また, 各群の調査項目 $j (j = 1, \dots, 5)$ においてそれぞれ $N(\mu_{1j}, 1), N(\mu_{2j}, 1)$ の正規分布に従う正規乱数を各群 m 個ずつ発生させ, 両側有意水準 $\alpha = 0.05$ で仮説検定を行うシミュレーションを行い, 帰無仮説 $H_0^{(1)}$ から $H_0^{(5)}$ のいずれかを棄却した割合から検出力 $1 - \beta$ と同様になっているか, および平均標本サイズ $E(n_k)$ が同様になっているかを評価した結果を表 3.19 および 3.20 に示し, 母平均の差の配置パターン別の標本サイズ m および平均標本サイズ $E(n_k)$ を計算した結果をそれぞれ図 3.11 および 3.12 に示す.

表 3.19: 対立仮説 $H_1^{(5)} : \sum_{j=1}^5 \theta_j \neq 0$ の下での標本サイズとシミュレーション結果両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 最大検定回数 $K = 5$, 検出力 $1 - \beta = 0.80$

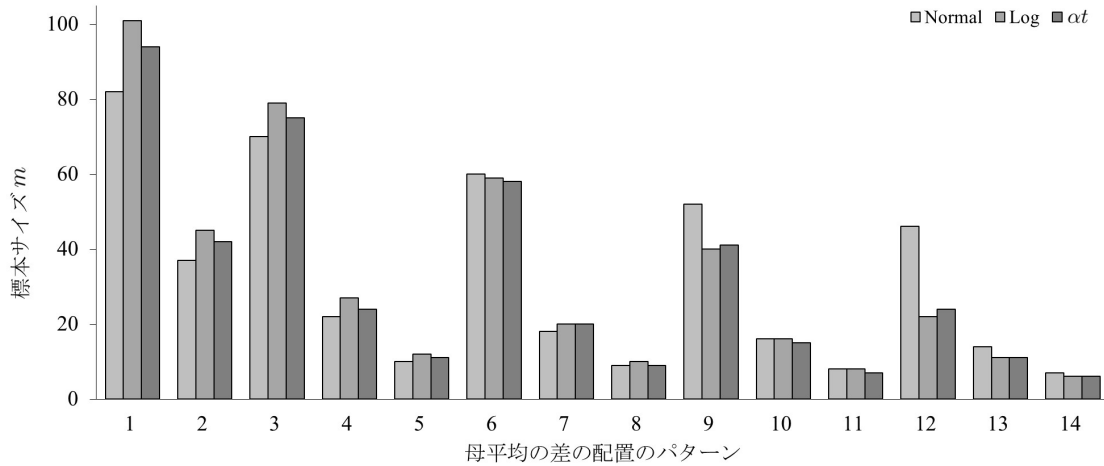
(池谷 他 (2023) 表 5 へシミュレーション結果を追加して改変. 元表の転載については出版元の許諾済み.)

手法	パターン No.	母平均の差の配置 ($\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$)	標本サイズ/群 各項目 m	シミュレーション 回数	帰無仮説 $H_0^{(k)}$ を棄却	
					回数	割合
Normal 法	1	(0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0)	82	10000	7970	0.7970
	2	(0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.5)	37	10000	8106	0.8106
	3	(0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0)	70	10000	8016	0.8016
	4	(0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 1.0)	22	10000	8117	0.8117
	5	(0.0, 0.0, 0.0, 1.5, 1.5)	10	10000	8224	0.8224
	6	(0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0)	60	10000	8073	0.8073
	7	(0.0, 0.0, 1.0, 1.0, 0.0)	18	10000	8029	0.8029
	8	(0.0, 0.0, 1.5, 1.5, 0.0)	9	10000	8491	0.8491
	9	(0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0)	52	10000	8082	0.8082
	10	(0.0, 1.0, 1.0, 0.0, 0.0)	16	10000	8160	0.8160
	11	(0.0, 1.5, 1.5, 0.0, 0.0)	8	10000	8567	0.8567
	12	(1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0)	46	10000	8095	0.8095
	13	(1.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0)	14	10000	8228	0.8228
	14	(1.5, 1.5, 0.0, 0.0, 0.0)	7	10000	8465	0.8465
Log 法	1	(0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0)	101	10000	8021	0.8021
	2	(0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.5)	45	10000	7970	0.7970
	3	(0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0)	79	10000	8031	0.8031
	4	(0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 1.0)	27	10000	8235	0.8235
	5	(0.0, 0.0, 0.0, 1.5, 1.5)	12	10000	8201	0.8201
	6	(0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0)	59	10000	8118	0.8118
	7	(0.0, 0.0, 1.0, 1.0, 0.0)	20	10000	7949	0.7949
	8	(0.0, 0.0, 1.5, 1.5, 0.0)	10	10000	8371	0.8371
	9	(0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0)	40	10000	8015	0.8015
	10	(0.0, 1.0, 1.0, 0.0, 0.0)	16	10000	8189	0.8189
	11	(0.0, 1.5, 1.5, 0.0, 0.0)	8	10000	8542	0.8542
	12	(1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0)	22	10000	8073	0.8073
	13	(1.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0)	11	10000	8360	0.8360
	14	(1.5, 1.5, 0.0, 0.0, 0.0)	6	10000	8766	0.8766
αt 法	1	(0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0)	94	10000	8053	0.8053
	2	(0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.5)	42	10000	8057	0.8057
	3	(0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0)	75	10000	7999	0.7999
	4	(0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 1.0)	24	10000	7976	0.7976
	5	(0.0, 0.0, 0.0, 1.5, 1.5)	11	10000	8041	0.8041
	6	(0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0)	58	10000	7968	0.7968
	7	(0.0, 0.0, 1.0, 1.0, 0.0)	20	10000	8239	0.8239
	8	(0.0, 0.0, 1.5, 1.5, 0.0)	9	10000	8157	0.8157
	9	(0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0)	41	10000	8012	0.8012
	10	(0.0, 1.0, 1.0, 0.0, 0.0)	15	10000	8054	0.8054
	11	(0.0, 1.5, 1.5, 0.0, 0.0)	7	10000	8063	0.8063
	12	(1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0)	24	10000	8162	0.8162
	13	(1.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0)	11	10000	8129	0.8129
	14	(1.5, 1.5, 0.0, 0.0, 0.0)	6	10000	8738	0.8738

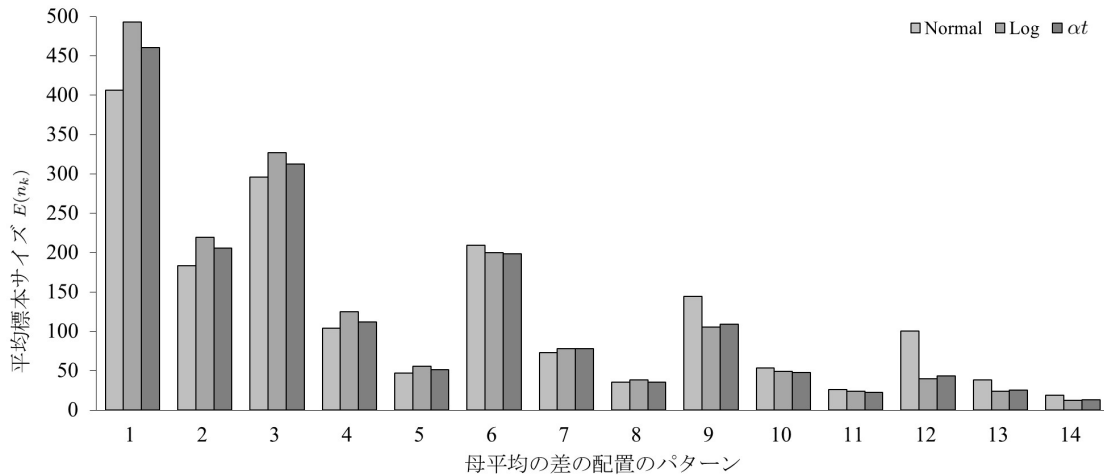
表 3.20: 対立仮説 $H_1^{(5)} : \sum_{j=1}^5 \theta_j \neq 0$ の下で平均標本サイズのシミュレーション結果両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 最大検定回数 $K = 5$, 検出力 $1 - \beta = 0.80$

(池谷 他 (2023) 表 5 および 6 ヘシミュレーション結果を追加して改変. 元表の転載については出版元の許諾済み.)

手法	パターン No.	母平均の差の配置 ($\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$)	標本サイズ/群		シミュレーション 平均標本サイズ/群
			各調査項目 m	平均 $E(n_k)$	
Normal 法	1	(0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0)	82	406.6	406.8
	2	(0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.5)	37	183.5	183.6
	3	(0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0)	70	295.9	296.1
	4	(0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 1.0)	22	103.7	103.7
	5	(0.0, 0.0, 0.0, 1.5, 1.5)	10	47.1	47.1
	6	(0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0)	60	209.6	209.1
	7	(0.0, 0.0, 1.0, 1.0, 0.0)	18	72.6	72.7
	8	(0.0, 0.0, 1.5, 1.5, 0.0)	9	35.8	35.7
	9	(0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0)	52	144.6	144.8
	10	(0.0, 1.0, 1.0, 0.0, 0.0)	16	53.5	53.7
	11	(0.0, 1.5, 1.5, 0.0, 0.0)	8	26.1	26.1
	12	(1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0)	46	100.3	100.1
	13	(1.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0)	14	38.4	38.4
	14	(1.5, 1.5, 0.0, 0.0, 0.0)	7	19.0	18.9
Log 法	1	(0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0)	101	492.9	492.6
	2	(0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.5)	45	219.6	219.5
	3	(0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0)	79	327.1	327.7
	4	(0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 1.0)	27	124.8	125.0
	5	(0.0, 0.0, 0.0, 1.5, 1.5)	12	55.5	55.5
	6	(0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0)	59	200.0	199.1
	7	(0.0, 0.0, 1.0, 1.0, 0.0)	20	77.9	78.1
	8	(0.0, 0.0, 1.5, 1.5, 0.0)	10	38.3	38.2
	9	(0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0)	40	105.3	105.5
	10	(0.0, 1.0, 1.0, 0.0, 0.0)	16	48.8	49.1
	11	(0.0, 1.5, 1.5, 0.0, 0.0)	8	23.7	23.8
	12	(1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0)	22	40.0	40.2
	13	(1.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0)	11	24.0	23.6
	14	(1.5, 1.5, 0.0, 0.0, 0.0)	6	12.1	12.0
αt 法	1	(0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0)	94	460.6	460.8
	2	(0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.5)	42	205.8	205.4
	3	(0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0)	75	312.5	312.7
	4	(0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 1.0)	24	111.8	111.8
	5	(0.0, 0.0, 0.0, 1.5, 1.5)	11	51.2	51.3
	6	(0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0)	58	198.3	199.3
	7	(0.0, 0.0, 1.0, 1.0, 0.0)	20	77.9	77.8
	8	(0.0, 0.0, 1.5, 1.5, 0.0)	9	35.2	35.1
	9	(0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0)	41	109.0	109.2
	10	(0.0, 1.0, 1.0, 0.0, 0.0)	15	47.5	47.2
	11	(0.0, 1.5, 1.5, 0.0, 0.0)	7	22.2	22.2
	12	(1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0)	24	43.4	43.3
	13	(1.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0)	11	25.3	25.3
	14	(1.5, 1.5, 0.0, 0.0, 0.0)	6	12.8	12.6

図 3.11: 母平均の差の配置パターン別の必要標本サイズ m

両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 最大検定回数 $K = 5$, 検出力 $1 - \beta = 0.80$
(池谷 他 (2023) 図 10 を改変. 元表の転載については出版元の許諾済み.)

図 3.12: 母平均の差の配置パターン別の平均標本サイズ $E(n_k)$

両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$, 最大検定回数 $K = 5$, 検出力 $1 - \beta = 0.80$
(池谷 他 (2023) 表 6 を改変. 元表の転載については出版元の許諾済み.)

表 3.19, 図 3.11, および表 3.20, 図 3.12 に示した結果から次のことがわかる.

- 各母平均の差の配置に対して計算された各群の各調査項目の必要標本サイズ m を用いたシミュレーションによる帰無仮説 $H_0^{(1)}$ から $H_0^{(5)}$ のいずれかを棄却する割合から, 目標とする検出力 $1 - \beta = 0.80$ は保たれている.
- 母平均の差が大きく連続するパターン 5, 8, 11, 14 では各手法の必要標本サイズ m は小さく, 3 手法間で差はみられない. 一方, 母平均の差が小さく調査項目 3 以降の後半に 1 つの調査項目のみで差がみられるパターン 1, 3, 6 では, 各手法の必要標本サイズ m は大きくなっている.
- 母平均の差が調査項目 4 または 5 の 1 項目だけでみられるパターン 1 から 3 では Normal 法の必要標本サイズ m が最も小さく, 次いで αt 法となり, Log 法が最も大きくなっている. 一方, 母平均の差が調査項目 1 または 2 の 1 項目だけでみられるパターン 9, 12 では Log 法の必要標本サイズ m が最も小さく, 次いで αt 法となり, Normal 法が最も大きく, Normal 法とその他の手法での必要標本サイズ m の差は顕著であった. これらの傾向は, Normal 法は後半の段階で有意水準を消費し, Log 法は前半の段階で有意水準を消費すると言った有意水準の消費の仕方の違いによるものと考えられる.
- 平均標本サイズ $E(n_k)$ とシミュレーションによる平均標本サイズは同様であった.

- 平均標本サイズ $E(n_k)$ は必要標本サイズ m と同様の傾向であった。また、母平均の差が前半にみられるパターン 12, 13, 14 のような母平均の配置、かつ Log 法のように前半の段階で有意水準を消費する手法の場合、平均標本サイズ $E(n_k)$ を小さくできる。
- パターン 1, 3, 6, 9, 12 は母平均の差がともに 1.0 と同じだが、差がみられるタイミングが異なる。このとき、同一手法の中で前半の段階で差がみられるパターン 12 が最も必要標本サイズ m が小さくなり、母平均の差の大きさが同じでも調査項目の順序によって必要標本サイズ m が変わることには注意が必要である。本提案手法を用いる場合、調査項目の順序についても検討が必要になる。

3.7 事例研究

表 3.21 に示す Montgomery(2012) の p.226 問題 5.9 のボール盤の速さと油を差す割合ごとの反応データに本提案手法を適用するが、このデータはボール盤の速さをボール盤 1 では 125, ボール盤 2 では 200, 油を差す割合は 0.015, 0.030, 0.045 および 0.060 とし、油を差す割合が 0.015 でのそれぞれ 2 個ずつ反応を測定し、検定を行い、母平均の一致を受容した場合は新たな材料 2 個ずつ用意し、以降同様に逐次的な実験により得られたものと仮定する。

表 3.21: Montgomery(2012) p.226 問題 5.9 のデータ
(池谷 他 (2023) 表 7 を改変。元表の転載については出版元の許諾済み。)

油を差す割合	ボール盤の速さ	反応	
0.015	125	2.70	2.78
	200	2.83	2.86
0.030	125	2.45	2.49
	200	2.85	2.80
0.045	125	2.60	2.72
	200	2.86	2.87
0.060	125	2.75	2.86
	200	2.94	2.88

調査項目数 $K = 4$ とし、各段階での帰無仮説および対立仮説は「3.1 検定統計量」で示した仮説を用いる。また、両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 各調査項目の標本サイズ $m = 2$ とすると、1 段階から 4 段階までの棄却限界値 b_1, b_2, b_3, b_4 を表 3.22 に示す。

表 3.22: 各手法の棄却限界値
(池谷 他 (2023) 表 8 を改変。元表の転載については出版元の許諾済み。)

手法	b_1	b_2	b_3	b_4
Normal 法	106.2465	5.4991	3.1154	2.4677
Log 法	7.3803	3.9901	3.2848	2.9917
αt 法	8.8602	4.1186	3.2016	2.8037

- 1 段階
各ボール盤で油を差す割合 0.015 での反応を測定し、1 段階での検定統計量 T_1 の実現値は $|t_1| = 2.4579$ となり、
Normal 法:
 $|t_1| \leq b_1 = 106.2465$ より、 $H_0^{(1)}$ を受容し、新たな材料に対して油を差す割合 0.030 の反応を測定し、2 段階へ。
Log 法:
 $|t_1| \leq b_1 = 7.3803$ より、 $H_0^{(1)}$ を受容し、新たな材料に対して油を差す割合 0.030 の反応を測定し、2 段階へ。
 αt 法:
 $|t_1| \leq b_1 = 8.8602$ より、 $H_0^{(1)}$ を受容し、新たな材料に対して油を差す割合 0.030 の反応を測定し、2 段階へ。

- 2 段階

各ボール盤で油を差す割合 0.030 での反応を測定し、2 段階での検定統計量 T_2 の実現値は $|t_2| = 8.6166$ となり、

Normal 法:

$|t_2| > b_2 = 5.4991$ より、 $H_0^{(2)}$ を棄却し、2 つのボール盤の母平均が乖離したとして、検定を終了する。

Log 法:

$|t_2| > b_2 = 3.9901$ より、 $H_0^{(2)}$ を棄却し、2 つのボール盤の母平均が乖離したとして、検定を終了する。

αt 法:

$|t_2| > b_2 = 8.8602$ より、 $H_0^{(2)}$ を棄却し、2 つのボール盤の母平均が乖離したとして、検定を終了する。

いずれの手法も油を差す割合 0.015 では 2 つのボール盤の母平均の乖離は検出せず、油を差す割合 0.030 で 2 つのボール盤の母平均の乖離を検出した。

4 ソフトウェア R による多重数値積分

多重比較や群逐次検定では、棄却限界値および検出力の計算には多重数値積分が必要となる。特に母分散 σ が未知の場合には、検定統計量が t 分布に基づく多変量分布となり、多変量正規分布の同時確率密度関数の多重数値積分に加え、 χ^2 分布の確率密度関数の多重数値積分が必要となり、数値計算は容易でない。ソフトウェア R では、多変量正規分布の同時確率密度関数の多重数値積分を行う関数、多変量関数を用いた多重数値積分を行う関数が利用できる。これらの関数を用いて「3 母平均の差を累積した逐次型多重比較法」の多重数値積分を例に計算方法を紹介する。多重数値積分は計算が可能な一方、最大検定回数 K が増加するに伴い、多重数値積分の回数が増えることや有意水準 α を満たすために計算精度を保つ必要性から、多くの計算時間を要することになる。そのため、多重数値積分の計算精度および計算時間を検討するため、いくつかの計算精度で棄却限界値を計算し、計算時間を比較する。また、多重数値積分を行う際に設定した計算精度が有意水準 α にどのような影響を与えるか、多重数値積分で計算した有意水準 α に対して、乱数を用いたモンテカルロシミュレーションにより実際に有意水準 α がどのような値になるか計算精度を比較する。

4.1 多重数値積分に用いるパッケージと関数

ソフトウェア R には多変量正規分布の同時確率密度関数の多重数値積分を行う関数および多変量関数の多重数値積分を行う関数があるが、最初に多変量正規分布に関するパッケージである `mnormt` パッケージに収録されている `sadmvn` 関数を紹介する。この `sadmvn` 関数を用いることで多変量正規分布の同時確率密度関数の多重数値積分が計算可能である。`sadmvn` 関数の引数は以下の通りである。

`sadmvn(lower, upper, mean, varcov, abseps)`

各引数は `lower` が積分範囲の下限值、`upper` が積分範囲の上限値、`mean` が多変量正規分布の平均ベクトル、`varcov` が多変量正規分布の分散共分散行列、`abseps` が許容誤差となる。各引数の属性は、積分範囲の下限值 `lower`、上限値 `upper` および多変量正規分布の平均ベクトル `mean` はベクトル形式となり、多変量正規分布の分散共分散行列 `varcov` は行列形式、許容誤差 `abseps` は実数でデフォルトが 10^{-6} となっている。例として、「1.4 群逐次検定」の表 1.14 に示した最大検定回数 $K = 2$ 、Lan & DeMets(1983) の αt 法の棄却限界値 $b_1 = 2.2414$, $b_2 = 2.1251$ を用いて、両側有意水準 α を 2 重数値積分で計算する。なお、`sadmvn` 関数を使用するため、`mnormt` パッケージを `library(mnormt)` などと指定し、事前に読み込む必要がある。

$$\alpha = 1 - \int_{-2.1251}^{2.1251} \int_{-2.2414}^{2.2414} \frac{1}{2\pi\sqrt{|\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})} dx_1 dx_2, \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}, \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & 1 \end{pmatrix}.$$

```
> 1 - sadmvn(lower = c(-2.2414, -2.1251),
+           upper = c(2.2414, 2.1251),
+           mean = c(0, 0),
+           varcov = matrix(c(1, 1 / sqrt(2), 1 / sqrt(2), 1), 2, 2),
+           abseps = 10^(-6))
[1] 0.05000147
```

次に多変量関数に対する多重数値積分に関するパッケージである `cubature` パッケージに収録されている `cubintegrate` 関数を紹介する。この `cubintegrate` 関数を用いることで `function` 関数などで計算者が独自に定義した多変量関数に対する多重数値積分が計算可能である。`cubintegrate` 関数の引数は以下の通りである。

`cubintegrate(f, lower, upper, method, relTol, absTol)`

各引数は `f` が多重数値積分の対象となる多変量関数、`lower` が積分範囲の下限值、`upper` が積分範囲の上限値、`method` は数値積分方法、`relTol` が最大許容誤差、`absTol` が許容誤差となる。各引数の属性は多変量関数 `f` は独自に定義した関数、積分範囲の下限值 `lower` および上限値 `upper` はベクトル形式、数値積分方法 `method` は `"hcubature"`, `"pcubature"`, `"cuhre"`, `"divonne"`, `"suave"`, `"vegas"` のいずれかを選択、最大許容誤差 `relTol` および許容誤差 `absTol` は実数でデフォルトはそれぞれ 10^{-5} および 10^{-12} となっている。例として「3 母平均の差を累積した逐次型多重比較法」の「3.2 有意水準と棄却限界値」に示した最大検定回数 $K = 5$ 、各群の各調査項目の標本サイズ $m = 5$ 、 αt 法の棄却限界値 $b_1 = 3.3554$, $b_2 = 2.8168$ を用いて、調査項目 2(2 段階) までの両側有意水準 α_2 を 4 重数値積分で計算する。なお、確率変数 U_1 および U_2 の積分範囲は 0 から ∞ となるが、計算時間を考慮して積分

範囲を 0 から自由度 $2(m-1) = 8$ の χ^2 分布の上側 $100 \times 10^{-8}\%$ 点 (上側の確率が 10^{-8} となる点) としている。

$$\alpha_2 = 1 - \int_0^\infty \int_0^\infty \left\{ \int_{-2.8168\sqrt{\frac{u_1+u_2}{2 \cdot 2 \cdot (5-1)}}}^{2.8168\sqrt{\frac{u_1+u_2}{2 \cdot 2 \cdot (5-1)}}} \int_{-3.3554\sqrt{\frac{u_1}{2 \cdot (5-1)}}}^{3.3554\sqrt{\frac{u_1}{2 \cdot (5-1)}}} \frac{1}{2\pi\sqrt{|C_2 C_2'|}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'(C_2 C_2')^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})} dx_1 dx_2 \right\} \\ \times \frac{u_1^{\frac{2 \cdot (5-1)}{2}-1} e^{-\frac{u_1}{2}}}{2^{\frac{2 \cdot (5-1)}{2}} \Gamma\left(\frac{2 \cdot (5-1)}{2}\right)} \times \frac{u_2^{\frac{2 \cdot (5-1)}{2}-1} e^{-\frac{u_2}{2}}}{2^{\frac{2 \cdot (5-1)}{2}} \Gamma\left(\frac{2 \cdot (5-1)}{2}\right)} du_1 du_2, \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}, C_2 C_2' = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & 1 \end{pmatrix}.$$

```
> FUN2 <- function(ARG){
+   return(
+     sadmvn(
+       lower =
+         c(-3.3554 * sqrt(ARG[1] / (2 * (5 - 1))),
+           -2.8168 * sqrt((ARG[1] + ARG[2]) / (2 * 2 * (5 - 1)))),
+       upper =
+         c(3.3554 * sqrt(ARG[1] / (2 * (5 - 1))),
+           2.8168 * sqrt((ARG[1] + ARG[2]) / (2 * 2 * (5 - 1)))),
+       mean = c(0, 0),
+       varcov = matrix(c(1, sqrt(1 / 2), sqrt(1 / 2), 1), 2, 2),
+       abseps = 10^(-6)
+     ) [1] * dchisq(ARG[1], 2 * (5 - 1)) * dchisq(ARG[2], 2 * (5 - 1))
+   )
+ }
> 1 - cubintegrate(
+   FUN2,
+   method = "cuhre",
+   lower = c(0, 0),
+   upper = c(qchisq(1 - 10^(-8), 2 * (5 - 1)),
+             qchisq(1 - 10^(-8), 2 * (5 - 1))),
+   relTol = 10^(-5),
+   absTol = 10^(-12)
+ )$integral
[1] 0.01999594
```

4.2 計算精度と計算時間

提案した線形傾向を検出するための逐次検定、母平均の差を累積した逐次型多重比較法では、多変量正規分布の同時確率密度関数および χ^2 分布の確率密度関数に対して多重数値積分により有意水準 α を満たす棄却限界値、検出力の計算が必要となる。多重数値積分は積分回数が増える、または計算精度を高めると計算時間が長くなるが、積分回数は検定統計量や最大検定回数により決まるため変更できない。そこで計算精度の変更が計算時間および計算結果に与える影響を検討する。計算の条件は「3 母平均の差を累積した逐次型多重比較法」の両側有意水準 $\alpha = 0.05$ 、最大検定回数 $K = 5$ 、各群の各調査項目の標本サイズ $m = 5, 10, 20, 30, 40$ として、棄却限界値 b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 を算出する。棄却限界値 b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 の計算手順は次に示す。

1. 両側有意水準 $\alpha = 0.05$ とし、選択した手法に基づく各段階までに消費する有意水準 $\alpha_k (k = 1, \dots, 5)$ を決める。
2. 各群の各調査項目の標本サイズ m を与え、自由度 $2(m-1)$ の t 分布に基づく 1 段階の棄却限界値 b_1 を t 分布の分布関数の逆関数で計算する。
3. 仮の 2 段階の棄却限界値 b_{20} として前段階の棄却限界値 b_1 を用いて $b_{20} = b_1$ とし、二分探索の基準幅 w も前段階の棄却限界値 b_1 を用いて $w = b_1$ 、二分探索回数 $s = 1$ とする。
4. (3.5) 式の多重数値積分により計算された 2 段階までに消費する有意水準 α_{20} を計算する。
5. 多重数値積分によって計算された 2 段階までに消費する有意水準 α_{20} が 2 段階までに消費する有意水準 α_2 以下、かつ $|\alpha_{20} - \alpha_2|$ が二分探索の許容誤差以下ならば仮の 2 段階の棄却限界値 b_{20} を 2 段階の棄却限界値 b_2 とし、この 2 つの条件を満たさない場合は多重数値積分によって計算された 2 段階までに消費する有意水準 α_{20} と 2 段階までに消費する有意水準 α_2 との大小関係より次のいずれかの計算にて仮の 2 段階の棄却限界値 b_{20} を更新し、手順 4 に戻り、2 段階の棄却限界値 b_2 が決まるまで手順 4, 5 を繰り返す。

- $\alpha_{20} < \alpha_2$ ならば, 仮の 2 段階の棄却限界値 $b_{20} = b_{20} - w/2^s$ に更新し, 二分探索回数 $s = s + 1$ とする.
- $\alpha_{20} \geq \alpha_2$ ならば, 仮の 2 段階の棄却限界値 $b_{20} = b_{20} + w/2^s$ に更新し, 二分探索回数 $s = s + 1$ とする.

6. 3 から 5 段階の棄却限界値 b_3, b_4, b_5 も仮の棄却限界値 $b_{k0} = b_{k-1}$ ($k = 3, 4, 5$), 二分探索の基準幅 $w = b_{k-1}$, 二分探索回数 $s = 1$ とし, 手順 4, 5 を繰り返して計算する.

このときの有意水準 α を満たしたと判断する二分探索の許容誤差 (収束範囲) を $10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}$ の 3 パターン, `sadmvn` 関数の引数 `abseps` および `cubintegrate` 関数の引数 `relTol` を共通として $10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}$ の 3 パターンによるかけ合わせの計 9 パターンで `cubintegrate` 関数の引数 `method` を "cuhre" として計算を実施し, 計算時間を比較する. また, 算出された棄却限界値 b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 を用いて帰無仮説 $H_0^{(k)}: \sum_{j=1}^k \theta_j = 0$ ($k = 1, \dots, 5$) の下で各群の各調査項目の標本サイズ m の正規乱数

を発生させ, この正規乱数に対して検定を行い, いずれかの帰無仮説 $H_0^{(k)}: \sum_{j=1}^k \theta_j = 0$ ($k = 1, \dots, 5$)

を棄却する割合を算出するモンテカルロシミュレーションを行う. このシミュレーションによる有意水準と多重数値積分で算出された有意水準 α を比較する. なお, シミュレーションは, 各計算の条件下で 10000 回検定を行い, 帰無仮説の棄却割合を算出することを 100 セット繰り返した.

計算に用いたパソコンの環境およびソフトウェア R の環境をそれぞれ表 4.1 および 4.2 に示す.

表 4.1: 計算に用いたパソコンの環境

オペレーション システム	CPU			
	名称	コア数	容量	処理速度
Microsoft Windows 11 64bit	AMD Ryzen 7 7730U	8 コア 16 スレッド	32GB (16GB × 2)	2GHz (最大 4.5GHz)

表 4.2: 計算に用いた R 環境

バージョン	bit 数
4.3.3 Angel Food Cake	64bit

次に計算された棄却限界値 b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 , 計算時間, 多重数値積分による有意水準 α およびシミュレーションによる有意水準 (平均値 $\pm$ 標準偏差) を表 4.3 から 4.11 および図 4.1 から 4.9 に示す. 図 4.4 から 4.6 は各手法において各調査項目での標本サイズ $m = 5$, 二分探索の許容誤差を 10^{-3} , `abseps` および `relTol` を 10^{-3} としたときの計算時間を基準とした各条件での計算時間の比を表している. なお, いずれの結果も自由度 $2(m-1)$ の χ^2 分布の確率密度関数の積分範囲は 0 から ∞ となるが, 積分範囲を 0 から自由度 $2(m-1)$ の χ^2 分布の上側 $100 \times 10^{-8}\%$ 点 (上側の確率が 10^{-8} となる点) とした結果である.

表 4.3: 棄却限界値の計算時間および帰無仮説 $H_0^{(k)} : \sum_{j=1}^k \theta_j = 0$ の下でのシミュレーション結果

両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母平均 $\mu_{ij} = 0 (i = 1, 2, j = 1, \dots, 5)$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$
 最大検定回数 $K = 5$, 二分探索の許容誤差: 10^{-5} , **abseps** および **relTol**: 10^{-5}
 (Ikeya & Yamamoto(2024) 表 2 をパソコン環境を変更した αt 法の結果へ改変し,
 Normal 法および Log 法の結果を追加して改変. 元表の転載については出版元の許諾済み.)

手法	標本サイズ/群 m	棄却限界値					計算時間 (時間)	両側有意水準 α	
		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5		数値積分	シミュレーション 平均値 $\pm$ 標準偏差
Normal 法	5	9.5751	3.7029	2.7731	2.3694	2.1363	6.46	0.05000	0.04995 $\pm$ 0.00214
	10	5.9806	3.3451	2.6469	2.3036	2.0973	10.48	0.05000	0.05013 $\pm$ 0.00210
	20	5.0397	3.2126	2.5969	2.2770	2.0783	12.07	0.05000	0.04983 $\pm$ 0.00216
	30	4.7953	3.1727	2.5817	2.2691	2.0727	11.76	0.05000	0.04981 $\pm$ 0.00218
	40	4.6833	3.1535	2.5745	2.2651	2.0714	14.33	0.04999	0.04959 $\pm$ 0.00219
Log 法	5	3.0953	2.7281	2.6022	2.5368	2.4971	6.74	0.04999	0.05010 $\pm$ 0.00228
	10	2.6962	2.5517	2.4916	2.4569	2.4392	16.74	0.04999	0.04975 $\pm$ 0.00198
	20	2.5543	2.4845	2.4481	2.4245	2.4079	17.17	0.04999	0.05011 $\pm$ 0.00219
	30	2.5131	2.4643	2.4348	2.4149	2.3990	20.48	0.04999	0.05021 $\pm$ 0.00234
	40	2.4934	2.4544	2.4287	2.4103	2.3985	18.23	0.05000	0.05003 $\pm$ 0.00211
αt 法	5	3.3554	2.8168	2.6032	2.4704	2.3730	11.24	0.04999	0.04999 $\pm$ 0.00223
	10	2.8784	2.6265	2.4925	2.3954	2.3217	14.42	0.04999	0.04945 $\pm$ 0.00223
	20	2.7116	2.5540	2.4486	2.3655	2.2948	19.79	0.05000	0.05023 $\pm$ 0.00207
	30	2.6633	2.5323	2.4355	2.3564	2.2871	20.91	0.04999	0.04992 $\pm$ 0.00222
	40	2.6403	2.5217	2.4291	2.3523	2.2862	20.93	0.05000	0.04992 $\pm$ 0.00212

表 4.4: 棄却限界値の計算時間および帰無仮説 $H_0^{(k)} : \sum_{j=1}^k \theta_j = 0$ の下でのシミュレーション結果

両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母平均 $\mu_{ij} = 0 (i = 1, 2, j = 1, \dots, 5)$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$
 最大検定回数 $K = 5$, 二分探索の許容誤差: 10^{-5} , **abseps** および **relTol**: 10^{-4}
 (Ikeya & Yamamoto(2024) 表 2 をパソコン環境を変更した αt 法の結果へ改変し,
 Normal 法および Log 法の結果を追加して改変. 元表の転載については出版元の許諾済み.)

手法	標本サイズ/群 m	棄却限界値					計算時間 (時間)	両側有意水準 α	
		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5		数値積分	シミュレーション 平均値 $\pm$ 標準偏差
Normal 法	5	9.5751	3.7029	2.7726	2.3692	2.1362	2.14	0.05000	0.04985 $\pm$ 0.00219
	10	5.9806	3.3451	2.6460	2.3035	2.0974	3.05	0.05000	0.04948 $\pm$ 0.00205
	20	5.0397	3.2126	2.5961	2.2770	2.0784	3.66	0.04999	0.04993 $\pm$ 0.00238
	30	4.7953	3.1727	2.5813	2.2687	2.0728	3.69	0.04999	0.05016 $\pm$ 0.00208
	40	4.6833	3.1535	2.5741	2.2649	2.0714	3.05	0.04999	0.05046 $\pm$ 0.00216
Log 法	5	3.0953	2.7281	2.6022	2.5368	2.4970	3.04	0.05000	0.04997 $\pm$ 0.00219
	10	2.6962	2.5517	2.4925	2.4563	2.4390	4.41	0.05000	0.04969 $\pm$ 0.00242
	20	2.5543	2.4845	2.4487	2.4245	2.4079	5.12	0.04999	0.04995 $\pm$ 0.00205
	30	2.5131	2.4643	2.4357	2.4149	2.3987	6.82	0.05000	0.05036 $\pm$ 0.00225
	40	2.4934	2.4544	2.4296	2.4103	2.3985	5.80	0.05000	0.04987 $\pm$ 0.00208
αt 法	5	3.3554	2.8168	2.6032	2.4704	2.3736	2.80	0.04999	0.04956 $\pm$ 0.00200
	10	2.8784	2.6265	2.4928	2.3954	2.3215	4.05	0.05000	0.04972 $\pm$ 0.00210
	20	2.7116	2.5540	2.4492	2.3652	2.2948	5.34	0.05000	0.05028 $\pm$ 0.00210
	30	2.6633	2.5323	2.4364	2.3560	2.2870	5.33	0.05000	0.05014 $\pm$ 0.00223
	40	2.6403	2.5217	2.4300	2.3520	2.2862	6.97	0.04999	0.05005 $\pm$ 0.00210

表 4.5: 棄却限界値の計算時間および帰無仮説 $H_0^{(k)} : \sum_{j=1}^k \theta_j = 0$ の下でのシミュレーション結果

両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母平均 $\mu_{ij} = 0 (i = 1, 2, j = 1, \dots, 5)$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$
 最大検定回数 $K = 5$, 二分探索の許容誤差: 10^{-5} , **abseps** および **relTol**: 10^{-3}
 (Ikeya & Yamamoto(2024) 表 2 をパソコン環境を変更した αt 法の結果へ改変し,
 Normal 法および Log 法の結果を追加して改変. 元表の転載については出版元の許諾済み.)

手法	標本サイズ/群 m	棄却限界値					計算時間 (時間)	両側有意水準 α	
		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5		数値積分	シミュレーション 平均値 $\pm$ 標準偏差
Normal 法	5	9.5751	3.7029	2.7722	2.3715	2.1385	0.55	0.05000	0.04958 $\pm$ 0.00228
	10	5.9806	3.3466	2.6439	2.3089	2.0984	0.65	0.05000	0.04974 $\pm$ 0.00214
	20	5.0397	3.2113	2.5931	2.2839	2.0792	0.65	0.05000	0.04960 $\pm$ 0.00238
	30	4.7953	3.1739	2.5776	2.2766	2.0735	0.74	0.05000	0.04994 $\pm$ 0.00198
	40	4.6833	3.1535	2.5701	2.2739	2.0720	0.74	0.04999	0.04976 $\pm$ 0.00234
Log 法	5	3.0953	2.7281	2.6039	2.5352	2.4977	0.56	0.05000	0.04967 $\pm$ 0.00228
	10	2.6962	2.5517	2.4932	2.4597	2.4405	0.43	0.04999	0.05020 $\pm$ 0.00213
	20	2.5543	2.4845	2.4490	2.4299	2.4115	0.78	0.04999	0.04995 $\pm$ 0.00195
	30	2.5131	2.4646	2.4360	2.4206	2.4016	0.55	0.05000	0.04981 $\pm$ 0.00231
	40	2.4934	2.4544	2.4299	2.4180	2.4009	0.90	0.05000	0.04971 $\pm$ 0.00218
αt 法	5	3.3554	2.8168	2.6050	2.4701	2.3753	0.60	0.04999	0.05010 $\pm$ 0.00217
	10	2.8784	2.6265	2.4944	2.3994	2.3238	0.65	0.05000	0.04972 $\pm$ 0.00204
	20	2.7116	2.5540	2.4505	2.3721	2.2974	0.81	0.04999	0.05000 $\pm$ 0.00191
	30	2.6633	2.5326	2.4374	2.3639	2.2891	0.96	0.05000	0.04931 $\pm$ 0.00219
	40	2.6403	2.5217	2.4312	2.3621	2.2871	0.83	0.04999	0.04939 $\pm$ 0.00228

表 4.6: 棄却限界値の計算時間および帰無仮説 $H_0^{(k)} : \sum_{j=1}^k \theta_j = 0$ の下でのシミュレーション結果

両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母平均 $\mu_{ij} = 0 (i = 1, 2, j = 1, \dots, 5)$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$
 最大検定回数 $K = 5$, 二分探索の許容誤差: 10^{-4} , **abseps** および **relTol**: 10^{-5}
 (Ikeya & Yamamoto(2024) 表 2 をパソコン環境を変更した αt 法の結果へ改変し,
 Normal 法および Log 法の結果を追加して改変. 元表の転載については出版元の許諾済み.)

手法	標本サイズ/群 m	棄却限界値					計算時間 (時間)	両側有意水準 α	
		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5		数値積分	シミュレーション 平均値 $\pm$ 標準偏差
Normal 法	5	9.5751	3.7029	2.7736	2.3700	2.1362	5.24	0.04998	0.04997 $\pm$ 0.00239
	10	5.9806	3.3524	2.6485	2.3045	2.0975	6.28	0.04992	0.04913 $\pm$ 0.00224
	20	5.0397	3.2286	2.5980	2.2770	2.0780	10.13	0.04997	0.05003 $\pm$ 0.00210
	30	4.7953	3.1844	2.5811	2.2698	2.0725	10.10	0.04997	0.04995 $\pm$ 0.00217
	40	4.6833	3.1649	2.5746	2.2653	2.0718	10.93	0.04994	0.04993 $\pm$ 0.00205
Log 法	5	3.0953	2.7296	2.6016	2.5381	2.4985	6.32	0.04992	0.04966 $\pm$ 0.00196
	10	2.6962	2.5540	2.4917	2.4576	2.4384	9.81	0.04995	0.04982 $\pm$ 0.00209
	20	2.5543	2.4845	2.4505	2.4242	2.4076	15.94	0.04995	0.04990 $\pm$ 0.00207
	30	2.5131	2.4664	2.4351	2.4161	2.3972	11.86	0.04996	0.05013 $\pm$ 0.00233
	40	2.4934	2.4544	2.4305	2.4115	2.3974	14.65	0.04997	0.04985 $\pm$ 0.00217
αt 法	5	3.3554	2.8180	2.6033	2.4711	2.3746	6.35	0.04990	0.04958 $\pm$ 0.00221
	10	2.8784	2.6283	2.4922	2.3949	2.3224	11.73	0.04996	0.04968 $\pm$ 0.00225
	20	2.7116	2.5553	2.4505	2.3644	2.2951	13.66	0.04995	0.05012 $\pm$ 0.00260
	30	2.6633	2.5332	2.4368	2.3559	2.2868	14.86	0.04998	0.05047 $\pm$ 0.00232
	40	2.6403	2.5217	2.4306	2.3523	2.2857	17.12	0.04999	0.04994 $\pm$ 0.00230

表 4.7: 棄却限界値の計算時間および帰無仮説 $H_0^{(k)} : \sum_{j=1}^k \theta_j = 0$ の下でのシミュレーション結果

両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母平均 $\mu_{ij} = 0 (i = 1, 2, j = 1, \dots, 5)$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$
 最大検定回数 $K = 5$, 二分探索の許容誤差: 10^{-4} , **abseps** および **relTol**: 10^{-4}
 (Ikeya & Yamamoto(2024) 表 2 をパソコン環境を変更した αt 法の結果へ改変し,
 Normal 法および Log 法の結果を追加して改変. 元表の転載については出版元の許諾済み.)

手法	標本サイズ/群 m	棄却限界値					計算時間 (時間)	両側有意水準 α	
		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5		数値積分	シミュレーション 平均値 $\pm$ 標準偏差
Normal 法	5	9.5751	3.7029	2.7736	2.3700	2.1362	1.63	0.04997	0.05012 $\pm$ 0.00209
	10	5.9806	3.3524	2.6453	2.3043	2.0973	1.85	0.04998	0.04976 $\pm$ 0.00232
	20	5.0397	3.2286	2.5948	2.2781	2.0779	2.44	0.04998	0.04975 $\pm$ 0.00220
	30	4.7953	3.1844	2.5811	2.2685	2.0736	2.11	0.04992	0.05003 $\pm$ 0.00236
	40	4.6833	3.1649	2.5746	2.2653	2.0718	3.04	0.04992	0.04961 $\pm$ 0.00217
Log 法	5	3.0953	2.7296	2.6016	2.5381	2.4985	1.51	0.04992	0.05011 $\pm$ 0.00221
	10	2.6962	2.5540	2.4917	2.4576	2.4384	2.65	0.04996	0.04999 $\pm$ 0.00244
	20	2.5543	2.4845	2.4505	2.4242	2.4100	4.42	0.04990	0.04983 $\pm$ 0.00219
	30	2.5131	2.4664	2.4351	2.4161	2.3972	3.72	0.04998	0.05016 $\pm$ 0.00230
	40	2.4934	2.4544	2.4305	2.4115	2.3974	4.65	0.04999	0.05046 $\pm$ 0.00235
αt 法	5	3.3554	2.8180	2.6033	2.4711	2.3746	1.57	0.04992	0.05014 $\pm$ 0.00207
	10	2.8784	2.6283	2.4922	2.3949	2.3224	3.22	0.04996	0.04964 $\pm$ 0.00215
	20	2.7116	2.5553	2.4505	2.3644	2.2951	4.09	0.04996	0.05004 $\pm$ 0.00215
	30	2.6633	2.5332	2.4368	2.3559	2.2868	4.70	0.04998	0.05007 $\pm$ 0.00184
	40	2.6403	2.5217	2.4306	2.3523	2.2880	4.49	0.04991	0.04994 $\pm$ 0.00210

表 4.8: 棄却限界値の計算時間および帰無仮説 $H_0^{(k)} : \sum_{j=1}^k \theta_j = 0$ の下でのシミュレーション結果

両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母平均 $\mu_{ij} = 0 (i = 1, 2, j = 1, \dots, 5)$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$
 最大検定回数 $K = 5$, 二分探索の許容誤差: 10^{-4} , **abseps** および **relTol**: 10^{-3}
 (Ikeya & Yamamoto(2024) 表 2 をパソコン環境を変更した αt 法の結果へ改変し,
 Normal 法および Log 法の結果を追加して改変. 元表の転載については出版元の許諾済み.)

手法	標本サイズ/群 m	棄却限界値					計算時間 (時間)	両側有意水準 α	
		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5		数値積分	シミュレーション 平均値 $\pm$ 標準偏差
Normal 法	5	9.5751	3.7029	2.7736	2.3727	2.1387	0.44	0.04993	0.04978 $\pm$ 0.00223
	10	5.9806	3.3524	2.6453	2.3094	2.0986	0.55	0.04994	0.04971 $\pm$ 0.00214
	20	5.0397	3.2286	2.5917	2.2842	2.0790	0.45	0.04998	0.04987 $\pm$ 0.00220
	30	4.7953	3.1844	2.5780	2.2771	2.0737	0.62	0.04993	0.04962 $\pm$ 0.00201
	40	4.6833	3.1649	2.5715	2.2739	2.0718	0.55	0.04996	0.04963 $\pm$ 0.00254
Log 法	5	3.0953	2.7296	2.6043	2.5356	2.4960	0.30	0.04999	0.04956 $\pm$ 0.00241
	10	2.6962	2.5540	2.4942	2.4601	2.4409	0.41	0.04991	0.04961 $\pm$ 0.00242
	20	2.5543	2.4845	2.4505	2.4314	2.4124	0.47	0.04991	0.04951 $\pm$ 0.00198
	30	2.5131	2.4664	2.4351	2.4209	2.4019	0.53	0.04996	0.04979 $\pm$ 0.00210
	40	2.4934	2.4544	2.4305	2.4186	2.4021	0.75	0.04994	0.04990 $\pm$ 0.00193
αt 法	5	3.3554	2.8180	2.6061	2.4712	2.3747	0.38	0.04997	0.04978 $\pm$ 0.00219
	10	2.8784	2.6283	2.4948	2.3998	2.3248	0.33	0.04991	0.04940 $\pm$ 0.00208
	20	2.7116	2.5553	2.4505	2.3715	2.2974	0.36	0.04998	0.04980 $\pm$ 0.00219
	30	2.6633	2.5332	2.4392	2.3630	2.2892	0.36	0.04997	0.04998 $\pm$ 0.00203
	40	2.6403	2.5217	2.4331	2.3618	2.2880	0.39	0.04992	0.04965 $\pm$ 0.00201

表 4.9: 棄却限界値の計算時間および帰無仮説 $H_0^{(k)} : \sum_{j=1}^k \theta_j = 0$ の下でのシミュレーション結果

両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母平均 $\mu_{ij} = 0 (i = 1, 2, j = 1, \dots, 5)$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$
 最大検定回数 $K = 5$, 二分探索の許容誤差: 10^{-3} , **abseps** および **relTol**: 10^{-5}
 (Ikeya & Yamamoto(2024) 表 2 をパソコン環境を変更した αt 法の結果へ改変し,
 Normal 法および Log 法の結果を追加して改変. 元表の転載については出版元の許諾済み.)

手法	標本サイズ/群 m	棄却限界値					計算時間 (時間)	両側有意水準 α	
		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5		数値積分	シミュレーション 平均値 $\pm$ 標準偏差
Normal 法	5	9.5751	3.8899	2.7959	2.3590	2.1379	2.58	0.04973	0.04953 $\pm$ 0.00227
	10	5.9806	3.3641	2.6808	2.3038	2.0968	5.66	0.04963	0.04927 $\pm$ 0.00216
	20	5.0397	3.3073	2.6097	2.2835	2.0783	6.04	0.04950	0.04976 $\pm$ 0.00228
	30	4.7953	3.2968	2.5756	2.2738	2.0784	6.35	0.04931	0.04954 $\pm$ 0.00236
	40	4.6833	3.2198	2.5909	2.2671	2.0722	5.90	0.04955	0.04936 $\pm$ 0.00208
Log 法	5	3.0953	2.7568	2.5845	2.5441	2.5043	5.51	0.04951	0.04969 $\pm$ 0.00227
	10	2.6962	2.5698	2.4895	2.4506	2.4506	2.81	0.04950	0.04906 $\pm$ 0.00195
	20	2.5543	2.5144	2.4359	2.4359	2.3978	7.63	0.04966	0.04985 $\pm$ 0.00195
	30	2.5131	2.4738	2.4351	2.4351	2.3971	7.99	0.04942	0.04939 $\pm$ 0.00232
	40	2.4934	2.4544	2.4544	2.4161	2.3783	10.54	0.04994	0.04957 $\pm$ 0.00215
αt 法	5	3.3554	2.8311	2.6099	2.4876	2.3710	5.22	0.04940	0.04912 $\pm$ 0.00232
	10	2.8784	2.6536	2.4877	2.4100	2.3158	8.17	0.04954	0.04963 $\pm$ 0.00202
	20	2.7116	2.5845	2.4431	2.3668	2.2928	7.94	0.04962	0.05008 $\pm$ 0.00229
	30	2.6633	2.5384	2.4591	2.3438	2.2889	11.20	0.04966	0.05004 $\pm$ 0.00226
	40	2.6403	2.5372	2.4381	2.3619	2.2881	8.75	0.04923	0.04914 $\pm$ 0.00205

表 4.10: 棄却限界値の計算時間および帰無仮説 $H_0^{(k)} : \sum_{j=1}^k \theta_j = 0$ の下でのシミュレーション結果

両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母平均 $\mu_{ij} = 0 (i = 1, 2, j = 1, \dots, 5)$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$
 最大検定回数 $K = 5$, 二分探索の許容誤差: 10^{-3} , **abseps** および **relTol**: 10^{-4}
 (Ikeya & Yamamoto(2024) 表 2 をパソコン環境を変更した αt 法の結果へ改変し,
 Normal 法および Log 法の結果を追加して改変. 元表の転載については出版元の許諾済み.)

手法	標本サイズ/群 m	棄却限界値					計算時間 (時間)	両側有意水準 α	
		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5		数値積分	シミュレーション 平均値 $\pm$ 標準偏差
Normal 法	5	9.5751	3.8899	2.7959	2.3590	2.1379	0.81	0.04970	0.04955 $\pm$ 0.00212
	10	5.9806	3.3641	2.6808	2.3038	2.0968	1.73	0.04963	0.04941 $\pm$ 0.00210
	20	5.0397	3.3073	2.6097	2.2835	2.0783	1.78	0.04949	0.04959 $\pm$ 0.00247
	30	4.7953	3.2968	2.5756	2.2738	2.0784	1.94	0.04931	0.04922 $\pm$ 0.00219
	40	4.6833	3.2198	2.5909	2.2671	2.0722	1.66	0.04955	0.04980 $\pm$ 0.00221
Log 法	5	3.0953	2.7568	2.5845	2.5441	2.5043	1.33	0.04950	0.04968 $\pm$ 0.00215
	10	2.6962	2.5698	2.4895	2.4506	2.4506	0.77	0.04950	0.04950 $\pm$ 0.00240
	20	2.5543	2.5144	2.4359	2.4359	2.3978	2.35	0.04968	0.04964 $\pm$ 0.00246
	30	2.5131	2.4738	2.4351	2.4351	2.3971	2.56	0.04944	0.04975 $\pm$ 0.00180
	40	2.4934	2.4544	2.4544	2.4161	2.3783	3.30	0.04996	0.04989 $\pm$ 0.00205
αt 法	5	3.3554	2.8311	2.6099	2.4876	2.3710	1.30	0.04941	0.04959 $\pm$ 0.00188
	10	2.8784	2.6536	2.4877	2.4100	2.3158	2.21	0.04954	0.04956 $\pm$ 0.00213
	20	2.7116	2.5845	2.4431	2.3668	2.2928	2.27	0.04964	0.04981 $\pm$ 0.00239
	30	2.6633	2.5384	2.4591	2.3438	2.2889	3.54	0.04967	0.04986 $\pm$ 0.00215
	40	2.6403	2.5372	2.4381	2.3619	2.2881	2.61	0.04924	0.04918 $\pm$ 0.00204

表 4.11: 棄却限界値の計算時間および帰無仮説 $H_0^{(k)} : \sum_{j=1}^k \theta_j = 0$ の下でのシミュレーション結果

両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母平均 $\mu_{ij} = 0 (i = 1, 2, j = 1, \dots, 5)$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$
 最大検定回数 $K = 5$, 二分探索の許容誤差: 10^{-3} , **abseps** および **relTol**: 10^{-3}
 (Ikeya & Yamamoto(2024) 表 2 をパソコン環境を変更した αt 法の結果へ改変し,
 Normal 法および Log 法の結果を追加して改変, 元表の転載については出版元の許諾済み.)

手法	標本サイズ/群 m	棄却限界値					計算時間 (時間)	両側有意水準 α	
		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5		数値積分	シミュレーション 平均値 $\pm$ 標準偏差
Normal 法	5	9.5751	3.8899	2.7959	2.3699	2.1385	0.36	0.04957	0.04945 $\pm$ 0.00207
	10	5.9806	3.3641	2.6545	2.3227	2.1049	0.25	0.04901	0.04853 $\pm$ 0.00209
	20	5.0397	3.3073	2.6097	2.2835	2.0872	0.35	0.04903	0.04889 $\pm$ 0.00196
	30	4.7953	3.2968	2.5756	2.2738	2.0784	0.40	0.04946	0.04922 $\pm$ 0.00245
	40	4.6833	3.2198	2.5658	2.2851	2.0709	0.29	0.04965	0.04961 $\pm$ 0.00203
Log 法	5	3.0953	2.7568	2.5845	2.5441	2.5043	0.28	0.04953	0.04935 $\pm$ 0.00235
	10	2.6962	2.5698	2.4895	2.4506	2.4506	0.10	0.04961	0.04955 $\pm$ 0.00229
	20	2.5543	2.5144	2.4359	2.4359	2.3978	0.36	0.04990	0.04955 $\pm$ 0.00218
	30	2.5131	2.4738	2.4351	2.4351	2.3971	0.38	0.04966	0.04954 $\pm$ 0.00220
	40	2.4934	2.4544	2.4544	2.4161	2.4161	0.12	0.04914	0.04887 $\pm$ 0.00224
αt 法	5	3.3554	2.8311	2.6099	2.4876	2.3710	0.28	0.04950	0.04903 $\pm$ 0.00229
	10	2.8784	2.6536	2.4877	2.4100	2.3347	0.28	0.04904	0.04870 $\pm$ 0.00204
	20	2.7116	2.5845	2.4431	2.3668	2.2928	0.33	0.04991	0.04987 $\pm$ 0.00192
	30	2.6633	2.5384	2.4591	2.3631	2.2892	0.37	0.04950	0.04905 $\pm$ 0.00196
	40	2.6403	2.5372	2.4381	2.3619	2.2881	0.35	0.04953	0.04888 $\pm$ 0.00208

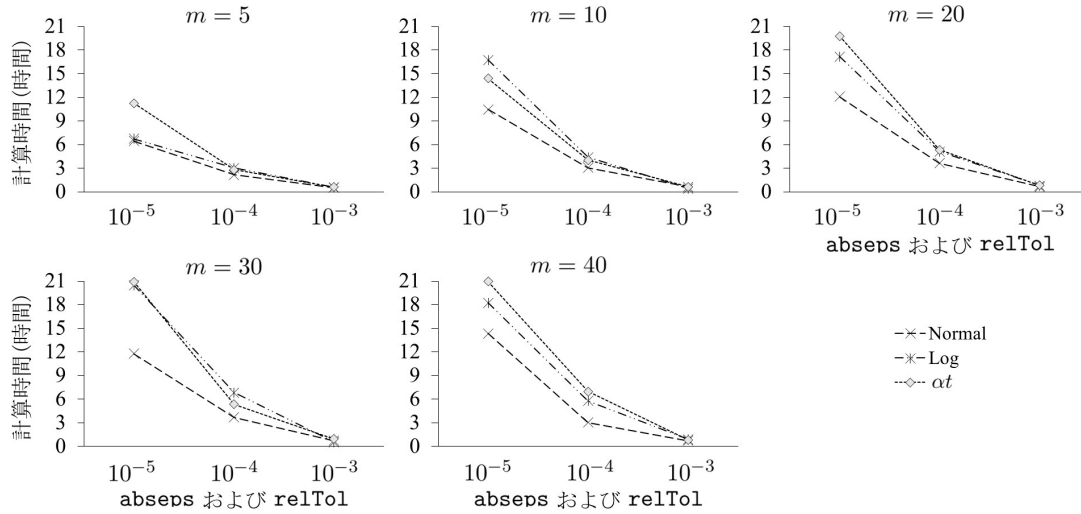


図 4.1: 棄却限界値の計算時間

両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母平均 $\mu_{ij} = 0 (i = 1, 2, j = 1, \dots, 5)$, 最大検定回数 $K = 5$
 二分探索の許容誤差: 10^{-5}

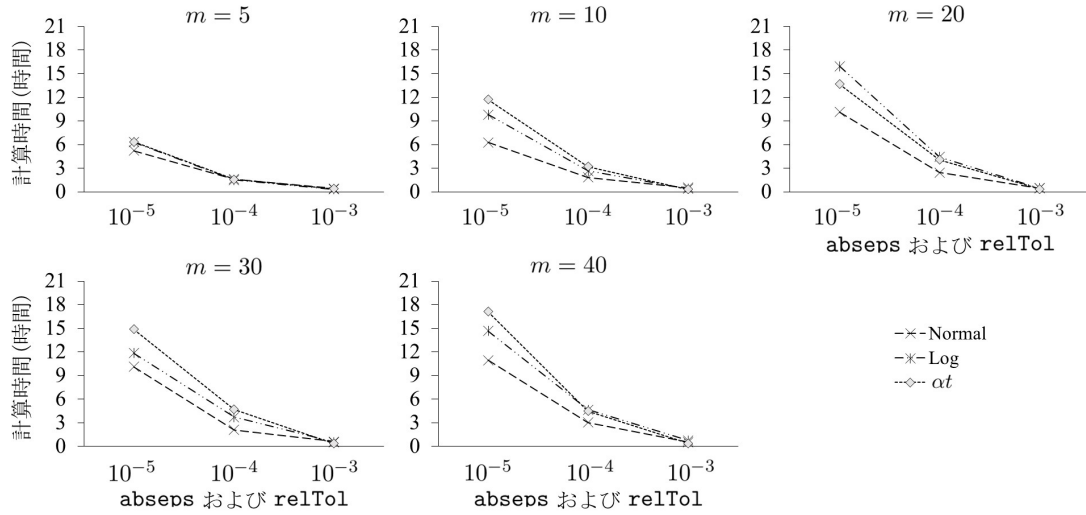


図 4.2: 棄却限界値の計算時間

両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母平均 $\mu_{ij} = 0 (i = 1, 2, j = 1, \dots, 5)$, 最大検定回数 $K = 5$
 二分探索の許容誤差: 10^{-4}

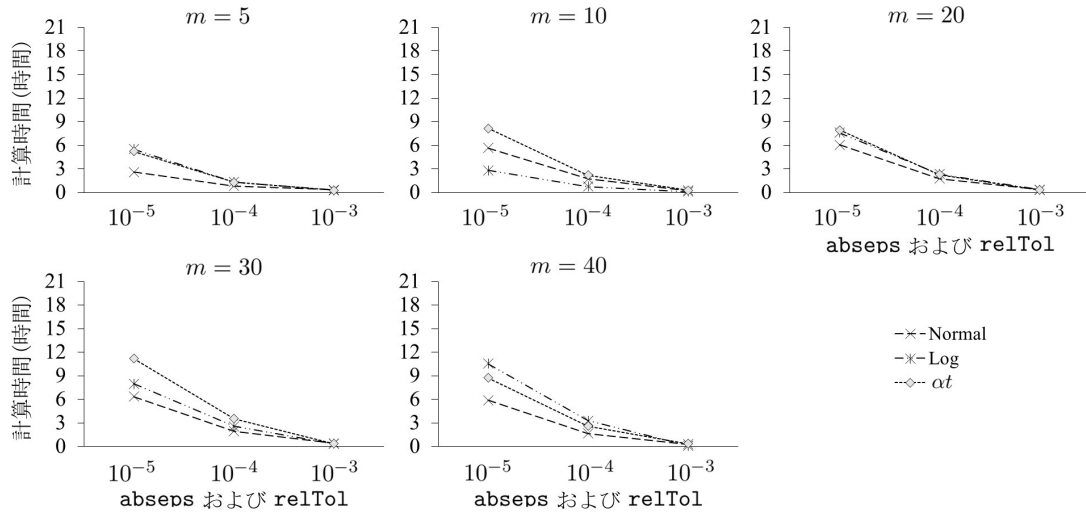


図 4.3: 棄却限界値の計算時間

両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母平均 $\mu_{ij} = 0 (i = 1, 2, j = 1, \dots, 5)$, 最大検定回数 $K = 5$
 二分探索の許容誤差: 10^{-3}

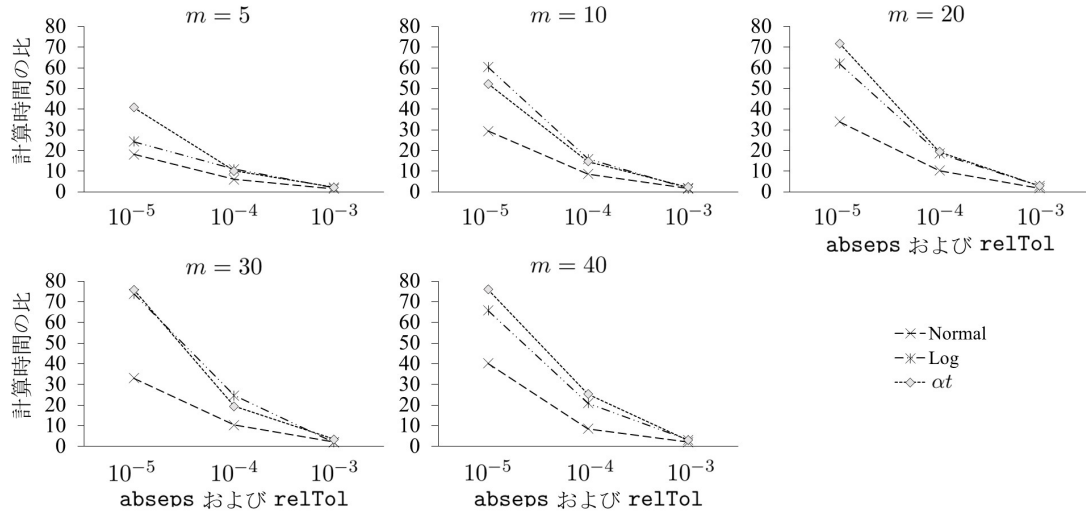


図 4.4: 棄却限界値の計算時間の比
 (基準を $m = 5$, 二分探索の許容誤差: 10^{-3} , abseps および relTol : 10^{-3} とした場合)
 両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母平均 $\mu_{ij} = 0 (i = 1, 2, j = 1, \dots, 5)$, 最大検定回数 $K = 5$
 二分探索の許容誤差: 10^{-5}

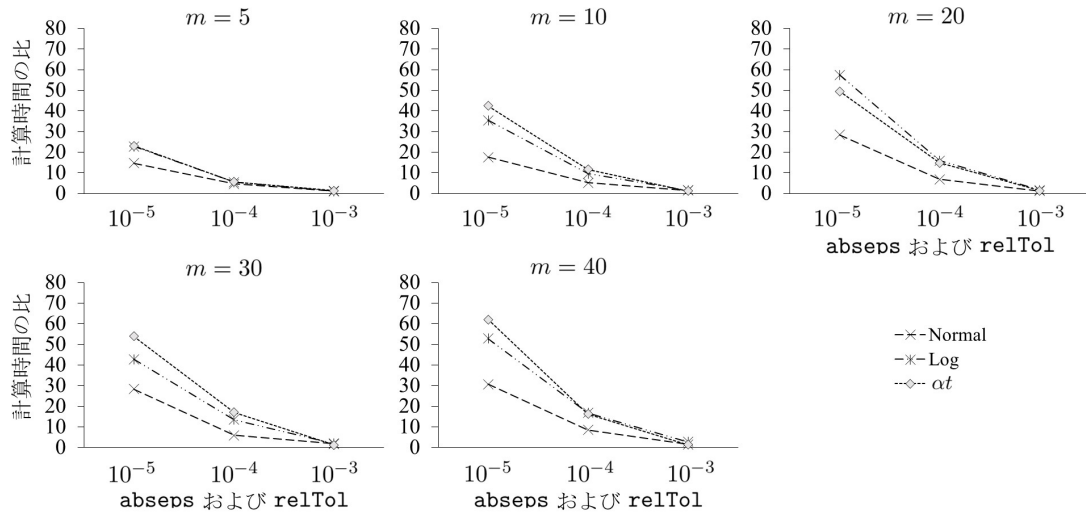


図 4.5: 棄却限界値の計算時間の比
 (基準を $m = 5$, 二分探索の許容誤差: 10^{-3} , abseps および relTol : 10^{-3} とした場合)
 両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母平均 $\mu_{ij} = 0 (i = 1, 2, j = 1, \dots, 5)$, 最大検定回数 $K = 5$
 二分探索の許容誤差: 10^{-4}

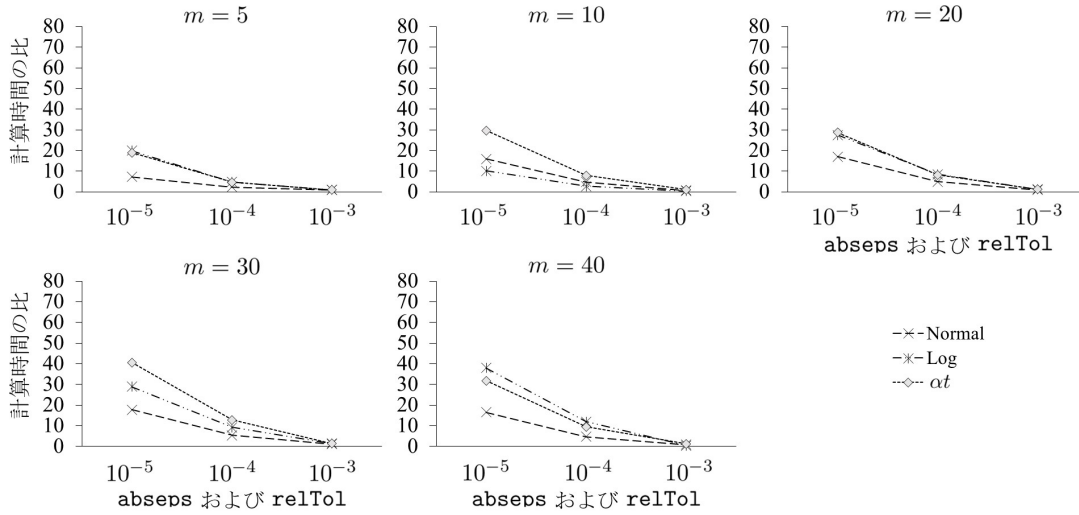


図 4.6: 棄却限界値の計算時間の比
 (基準を $m = 5$, 二分探索の許容誤差: 10^{-3} , abseps および relTol : 10^{-3} とした場合)
 両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母平均 $\mu_{ij} = 0 (i = 1, 2, j = 1, \dots, 5)$, 最大検定回数 $K = 5$
 二分探索の許容誤差: 10^{-3}

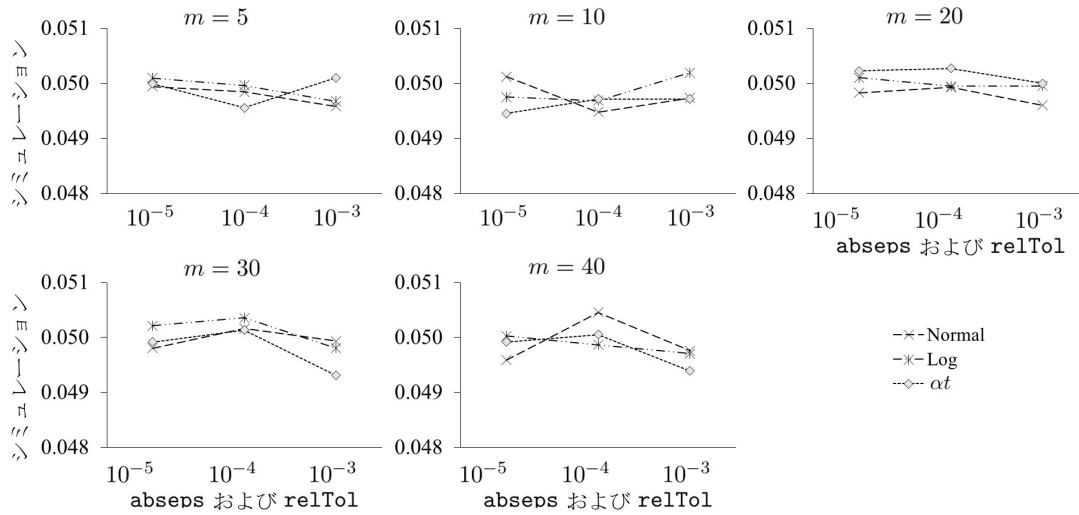


図 4.7: 帰無仮説 $H_0^{(k)}: \sum_{j=1}^k \theta_j = 0$ の下でのシミュレーションによる有意水準
 両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母平均 $\mu_{ij} = 0 (i = 1, 2, j = 1, \dots, 5)$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$
 最大検定回数 $K = 5$, 二分探索の許容誤差: 10^{-5}

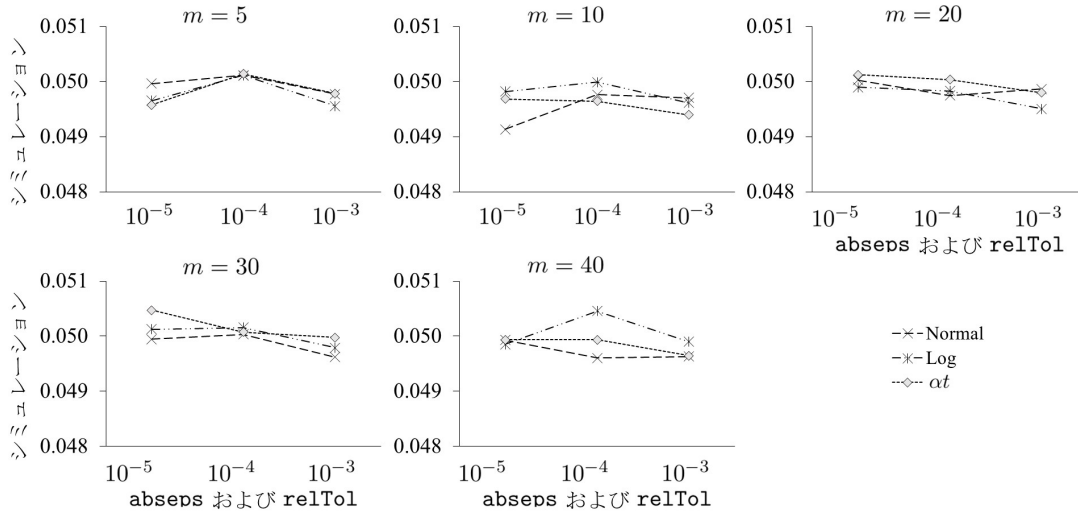


図 4.8: 帰無仮説 $H_0^{(k)}: \sum_{j=1}^k \theta_j = 0$ の下でのシミュレーションによる有意水準

両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母平均 $\mu_{ij} = 0 (i = 1, 2, j = 1, \dots, 5)$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$
 最大検定回数 $K = 5$, 二分探索の許容誤差: 10^{-4}

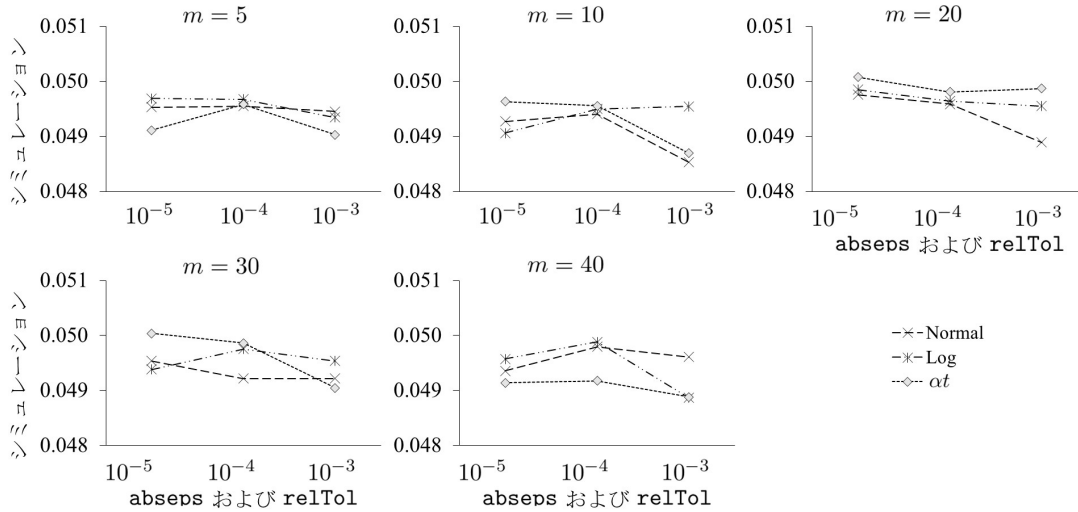


図 4.9: 帰無仮説 $H_0^{(k)}: \sum_{j=1}^k \theta_j = 0$ の下でのシミュレーションによる有意水準

両側有意水準 $\alpha = 0.05$, 母平均 $\mu_{ij} = 0 (i = 1, 2, j = 1, \dots, 5)$, 母分散 $\sigma^2 = 1.0$
 最大検定回数 $K = 5$, 二分探索の許容誤差: 10^{-3}

表 4.3 から 4.11 および図 4.1 から 4.9 に示した結果から次のことがわかる。

- 計算時間は、二分探索の許容誤差, abseps および relTol が小さくなると長くなり、標本サイズ m が増えても長くなる傾向がある。最も計算時間が長かった条件は二分探索の許容誤差が 10^{-5} , abseps および relTol が 10^{-5} における αt 法の標本サイズ $m = 40$ の 20.93 時間で基準に比べて 75.90 倍の時間を要した。二分探索の許容誤差は計算の終了を判定する基準になるため、許容誤差が小さい場合は二分探索の回数が増えることによるもの、abseps および relTol は多重数値積分の計算精度に関する許容誤差のため、誤差を小さくすることで多重数値積分の計算 1 回あたりの時間が長くなることによるものと考えられた。標本サイズ m は χ^2 分布の自由度 $2(m-1)$ に関連し、自由度は確率密度関数の形状に影響し、自由度が増えるにつれて積分範囲が広くなることによる多重数値積分の計算 1 回あたりの時間が長くなることが考えられた。なお、二分探索の許容誤差が 10^{-3} , abseps および relTol が 10^{-3} における Log 法の標本サイズ $m = 10, 40$, Normal 法の標本サイズ $m = 10, 20, 40$ では計算時間の比が 1 未満 (計算時間の比はそれぞれ 0.37, 0.42, 0.72, 0.99, 0.81) であった。一方、標本サイズは m は計算時間を短縮

するために制御できるものではないため、二分探索の許容誤差, `abseps` および `relTol` のいずれかで制御する必要がある。

- シミュレーションの結果による有意水準は目標とする 0.05 から大きくずれることはなかった。0.05 で発生する事象に対して 10000 回のサンプリングを行った際には当該事象が観察される割合の期待値は 0.05, 標準偏差は $\sqrt{0.05 \cdot (1 - 0.95)/10000} = 0.0022$ となることが知られており, シミュレーション結果は概ねこの結果に近く, 予期せず有意水準がかけ離れたりバラついてはいないと考えられる。 `abseps` および `relTol` の設定に比べて, 二分探索の許容誤差の設定が計算精度に影響し, 有意水準 $\alpha = 0.05$ を目標とする場合は二分探索の許容誤差は 10^{-4} 以下にすべきである。また, 最もシミュレーション結果が有意水準 0.05 から離れた結果となったのは Normal 法の二分探索の許容誤差が 10^{-3} , `abseps` および `relTol` が 10^{-3} , 標本サイズ $m = 10$ のときの 0.04853 であったが, 二分探索の許容誤差が 10^{-3} であり, 多重数値積分により計算された有意水準も 0.04901 と有意水準 $\alpha = 0.05$ に比べて低めに設定されたことによるものと考えられた。
- 多重数値積分を用いる場合は, 上記のような計算時間と計算精度のバランスを吟味の上, 各許容誤差の設定が必要である。

5 まとめと展望

本論文では反応データが正規分布に従うことを仮定し、用量反応試験や2群間の特徴を調べる試験に対して群逐次検定を応用し、試験の途中で意思決定を行うための検定を複数回を行っても試験全体での有意水準 α が大きくならない検定手法を提案した。また、数理統計学的な証明に留まらず、多重数値積分を用いた理論値を計算し、それらをモンテカルロシミュレーションにより評価することで、提案手法が想定した通りに有意水準 α を調整できていることを示すとともに、検出力 $1 - \beta$ および必要標本サイズ m などの特徴を示した。提案手法は途中段階での仮説検証が可能となり、試験期間の短縮や費用の削減など効率的な開発につながることを期待される。

多重比較や群逐次検定では検定を繰り返すため、有意水準 α を満たす棄却限界値の計算や検出力 $1 - \beta$ の計算には多重数値積分が必要となることから、ソフトウェア R を用いた多重数値積分の計算方法を示し、計算時間と計算精度を評価した。

多重数値積分は多重比較や群逐次検定以外の分野でも使用されることから、ソフトウェア R を用いた多重数値積分によりこれまでは計算が困難とされていた統計解析手法の使用や評価が可能になることが期待される。

今後の展望として、提案手法はデータの母分散 σ^2 は群間や調査項目間で等しく、標本サイズ m も等しい制約の下で検定方法を構築したが、これらが不均一の場合の検定方法が提案できるとさらに実応用しやすくなると考えられ、これらの制約を設けない検定方法について研究を進めていきたい。また、群間や調査項目間でデータは互いに独立と言う制約も設けたが、例えば同じ標本に対して用量を増やしていった場合の反応データや同じ標本に対する複数の調査項目の反応データを収集することもあり、これらはデータでは用量間や調査項目間の反応データが相関を持つことが考えられ、この制約を設けない検定方法の構築も期待されることが考えられる。この他に反応データが正規分布ではなく、成功/失敗、発現/非発現、合格/不合格のような2値の反応となる二項分布に従う場合もあることから、試験のデザインに柔軟に対応できる検定方法を構築するため、これら制約条件や仮定を緩めた検定方法の研究を進めていきたい。これら研究を進めるにあたり、多重数値積分などを用いた数値計算は必ず必要になることから効率的な数値計算方法などの研究も進めていきたい。

謝辞

本博士論文を作成するにあたり、多くの方々にご協力いただきましたことを心より御礼申し上げます。特に大学学部生、修士課程、およびこの度の博士論文でご指導いただきました山本義郎教授には、長い期間に渡り熱心にご指導いただき深く感謝しております。社会人である私の「改めて統計学を勉強したい」と言う突然の相談にも乗ってくださり、大学学部生や修士課程とは異なる多くの経験をする事ができた大変貴重な機会となりました。修士課程および本研究でご指導いただきました道家暎幸東海大学名誉教授にも学生時代と変わらず熱心にご指導いただき深く感謝しております。多重比較や群逐次検定などの理解をより一層深める大変貴重な機会となりました。修士課程および本研究を進めるにあたり京都女子大学の中村智洋教授には研究に対するご助言や激励をいただき深く感謝しております。学位申請の主査を務めてくださりました北林照幸教授、審査委員を務めてくださりました今田恒久教授、内田理教授、梶田佳孝教授には的確なご質問やご助言をいただき深く感謝しております。また、本研究を通した学会発表や論文執筆に際して貴重なご助言をいただきました一般社団法人日本計算機統計学会にご所属の先生方、研究活動に理解を示してくださり激励してくださりました会社の方々にも深く感謝しております。最後に、週末などを使った研究活動に理解を示し、応援してくれた家族に感謝の意を表します。

参考文献

- [1] Armitage, P., McPherson, C. K. & Rowe, B. C. (1969). Repeated Significance Tests on Accumulating Data. *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*, **132**, 235-244.
- [2] Azzalini, A. & Genz, A. (2022). The R package `mnormt`: The multivariate normal and t distributions (version 2.1.1). URL <http://azzalini.stat.unipd.it/SW/Pkg-mnormt/>
- [3] Dunnett, C. W. (1955), A multiple comparison procedure for comparing several treatments with a control. *Journal of the American Statistical Association* **50**, 1096-1121.
- [4] Ikeya, T. & Yamamoto, Y. (2024). A comparison of computational accuracy on multiple numerical integration in joint distribution based on t distribution using R. 2023 21st International Conference on ICT and Knowledge Engineering (ICT & KE), 1-5.
- [5] Jennison, C. & Turnbull, B.W. (2000). *Group Sequential Methods with Applications to Clinical Trials*. NY: Chapman & Hall/CRC. (邦訳 「臨床試験における群逐次法理論と応用」 森川敏彦・山中竹春 訳 (2012), シーエーシー)
- [6] Johnson, R. A. & Wichern, D. W. (1992). *Applied Multivariate Statistical Analysis*, 3rd ed., Endlewood cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- [7] Lan, K. K. G. & DeMets, D. L. (1983). Discrete sequential boundaries for clinical trials. *Biometrika*, **70**, 659-663.
- [8] Montgomery, D. C. (2012). *Design and Analysis of Experiments*, 8th ed., NY: John Wiley & Sons.
- [9] Nakamura, T. & Douke, H. (2015). A sequential multiple comparison procedure for detecting a lowest dose having interaction in a dose-response test. *Journal of the Japanese Society of Computational Statistics*, **28**, 1-14.
- [10] Narasimhan, B., Johnson, S. G., Hahn, T., Bouvier, A. & Ki  u, K. (2024). cubature: Adaptive Multivariate Integration over Hypercubes. R package version 2.1.1. URL <https://CRAN.R-project.org/package=cubature>
- [11] O'Brien, P. C. & Fleming, T. R. (1979). A Multiple Testing Procedure for Clinical Trials. *Biometrics*, **35**, 549-556.
- [12] Pocock, S. J. (1977). Group sequential methods in the design and analysis of clinical trials. *Biometrika*, **64**, 191-199.
- [13] R Core Team. (2024). R: A Language and Environment for Statistical Computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL <https://www.R-project.org/>
- [14] Scheffé, H. (1953). A method for judging all contrasts in the analysis of variance. *Biometrika*, **40**, 87-104.
- [15] Tukey, J. W. (1953). *The Problem of Multiple Comparisons*. Mimeographed monograph.
- [16] 池谷利治・山本義郎・道家暎幸 (2019). 用量反応試験において線形傾向を検出するための逐次検定法の開発. 計算機統計学, **32**, 3-18.
- [17] 池谷利治・山本義郎・道家暎幸 (2023). 2 処置についての母平均の差を検出するための逐次型多重比較法の開発. 計算機統計学, **36**, 15-30.
- [18] 久保川達也 (2017). 現代数理統計学の基礎. 共立出版.
- [19] 小林龍一 (1982). 相関・回帰分析法入門<新訂版>. 日科技連出版社.
- [20] 白石高章 (2011). 多群連続モデルにおける多重比較法-パラメトリック, ノンパラメトリックの数理統計. 共立出版.
- [21] 中村智洋・道家暎幸 (2011). 逐次型対比法の開発と比較研究. 計算機統計学, **24**, 73-88.
- [22] 中村智洋・道家暎幸・山本義郎 (2007). 用量反応試験のための逐次型多重比較法の開発と比較研究. 計算機統計学, **20**, 33-47.

-
- [23] 中村智洋・八木圭太・山本義郎・道家暎幸 (2015). 用量反応試験において交互作用を検出するための逐次型多重比較法. 日本統計学会誌, **44**, 315-339.
- [24] 永田靖 (2003). サンプルサイズの決め方. 朝倉書店.
- [25] 永田靖・吉田道弘 (1997). 統計的多重比較法の基礎. サイエンティスト社.
- [26] 広津千尋 (1992). 実験データの解析-分散分析を超えて-. 共立出版.

業績一覧

査読あり

1. Ikeya, T. & Yamamoto, Y., A comparison of computational accuracy on multiple numerical integration in joint distribution based on t distribution using R, 2023 21st International Conference on ICT and Knowledge Engineering (ICT & KE), pp.1-5, 2024.
2. 池谷利治・山本義郎・道家暎幸, 2 処置についての母平均の差を検出するための逐次型多重比較法の開発, 計算機統計学, 第 36 巻 第 1 号, pp.15-30, 2023, 日本計算機統計学会.
3. 池谷利治・山本義郎・道家暎幸, 用量反応試験において線形傾向を検出するための逐次検定法の開発, 計算機統計学, 第 32 巻 第 1 号, pp.3-18, 2019, 日本計算機統計学会.
4. Ikeya, T., Yamamoto, Y., Nakamura, T. & Douke, H., Simulation Study of an Adaptive Group Sequential Procedure for Changing Sample Size, Joint Meeting of Japan-Korea Special Conference of Statistics and The 2nd Japan-Korea Statistics Conference of Young Researchers (JKSC 2010), Okayama University, Okayama, 2010.

国際会議

1. Ikeya, T. & Yamamoto, Y., Evaluation of Calculation Time and Computational Accuracy of Critical Value for Sequential Multiple Comparison Procedure, 2024 International Conference on Big Data, Tokai University, Tokyo, 2024/11/16.

国内会議

1. 池谷利治・山本義郎・道家暎幸, 2 つのプロファイルの一致に関する逐次検定法の開発, 日本計算機統計学会第 33 回大会, 日本計算機統計学会, 2019/6/2.
2. 池谷利治・山本義郎・道家暎幸, 用量反応試験において線形傾向を検出するための逐次検定法に関する一考察, 第 18 回西東京統計研究会, 西東京統計研究会, 2019/3/5.
3. 池谷利治・山本義郎・道家暎幸, 用量反応試験において線形傾向を検出するための逐次検定法, 日本計算機統計学会第 32 回シンポジウム, 日本計算機統計学会, 2018/11/11.
4. 池谷利治・山本義郎・道家暎幸・中村智洋, 適応性のある群逐次検定における検出力のシミュレーション考察, 第 9 回西東京統計研究会, 西東京統計研究会, 2010/2/26.
5. 池谷利治・中村智洋・山本義郎・道家暎幸, 適応性のある群逐次検定方式とその周辺課題について, 日本計算機統計学会第 23 回大会, 日本計算機統計学会, 2009/5/17.
6. 池谷利治・山本義郎・道家暎幸・中村智洋, Adaptive 群逐次検定方式について, 第 8 回西東京統計研究会, 西東京統計研究会, 2009/2/25.

受賞

1. 奨励賞, 2023 年度日本計算機統計学会学会賞, 2024 年 5 月
2. 学生研究発表賞, 日本計算機統計学会第 23 回大会学生研究発表賞, 2009 年 5 月