

東海大学大学院平成 29 年度博士論文

ニュートリノの量子統計性と
初期宇宙の相対論的有効自由度

指導 北林照幸 教授

東海大学大学院総合理工学研究科
総合理工学専攻

飯塚 純

目次

第1章	緒言	3
第2章	基礎理論	7
2.1	量子統計力学	7
2.1.1	量子状態の記述	7
2.1.2	多粒子系の量子力学	13
2.1.3	ボース分布とフェルミ分布	14
2.2	ニュートリノ物理学	20
2.2.1	素粒子物理学の概要	21
2.2.2	ニュートリノの主な性質	23
2.2.3	弱い相互作用	25
2.2.4	ニュートリノの主な発生源とその観測	26
2.2.5	ニュートリノの質量	31
第3章	ニュートリノ量子統計と相対論的有効自由度 I : F.D. から M.B. へ	37
3.1	はじめに	37
3.2	分布関数	38
3.3	レプトン非対称性と相対論的有効自由度	39
3.4	有効ニュートリノ数	46
3.5	まとめ	47
第4章	ニュートリノ量子統計と相対論的有効自由度 II : F.D. から B.E. へ	49
4.1	はじめに	49
4.2	分布関数の形を離散的に変化させた場合	50
4.2.1	分布関数	50
4.2.2	エネルギー密度	51
4.2.3	相対論的有効自由度	52

4.3	分布関数の形を連続的に変化させた場合	56
4.3.1	分布関数	56
4.3.2	エネルギー密度	57
4.3.3	相対論的有効自由度	59
4.4	ダークマターと宇宙の物質生成への影響	60
4.5	まとめ	63
第5章	ニュートリノ量子統計と相対論的有効自由度 III : 解析的考察	65
5.1	はじめに	65
5.2	分布関数	65
5.3	相対論的有効自由度	67
5.4	まとめ	71
第6章	結言	73
	謝辞	76
	参考文献	76
	刊行論文一覧	80

第1章 緒言

ニュートリノは $\frac{1}{2}$ のスピンを持ち、フェルミオンに分類されている。電子が $\frac{1}{2}$ のスピンを持ちフェルミ・ディラック統計に従うことは実験的にもほぼ疑いがないため [1]、ニュートリノも厳密にフェルミ統計に従うと考えることは自然にも思われる。しかし、ニュートリノの持つ特性は、他のスピン $\frac{1}{2}$ の粒子と大きく異なる。ニュートリノは、極めて小さい質量を持ち、大きな混合を示し、電氣的に中性である。一方、他のスピン $\frac{1}{2}$ の粒子は、ニュートリノよりもはるかに大きな質量を持ち、ほとんど混合せず、電荷を持っている [2, 3]。ニュートリノのこのような特異性を考えると、電子とは異なりニュートリノについてはパウリの排他率が破られる可能性もある [4, 5, 6, 7]。

初期宇宙の熱力学的進化は、ニュートリノの統計性の影響を受ける。Cucurull らは、初期宇宙の粒子生成数の考察から、ニュートリノの統計性を評価した [8]。また Dolgov らは、フェルミ・ボースパラメーターを導入してニュートリノの統計性をフェルミ・ディラック統計からボース・アインシュタイン統計に連続的に変化させることで、ビッグバン元素合成における有効ニュートリノへの効果やなどを考察した [9]。

本論の主題は、非純粋フェルミオンニュートリノが初期宇宙（放射優勢期）で、相対論的有效自由度に与える影響を考察することにある。宇宙の放射優勢期でのレプトン非対称と相対論的有效自由度の関係はすでに Stuke らによって議論されているが [10]、ニュートリノが純粋なフェルミオンであるという前提での議論である。本研究では、より一般的にニュートリノの量子統計性の違いが及ぼす初期宇宙での相対論的有效自由度について考察した。

なお本研究の目的は、ニュートリノがフェルミ・ディラック統計に従うという通説を否定することではない。実験的にはニュートリノが純粋なフェルミ・ディラック統計に従っていない可能性があることから、あくまでも可能性の1つとして、ニュートリノが純粋なフェルミ・ディラック統計に従わない場合に起こりうる物理現象を考察するものである。さて、

パウリの排他律 (PEP) を破ることについては問題が生ずる。PEP の破れを含むシナリオを描くことは一般的なことではない。本論でなぜ我々が、このシナリオを必要とするに至ったかを議論したい。

理論的には、PEP の破れを含む非標準型の統計としてパラ統計などがある [11, 12]。また、Ignatiev と Kuzumin は純粋なフェルミ統計やボース統計に従わない粒子の交換関係について議論している。さらに、Cucurull らはニュートリノのスピンの統計定理が実験的に立証されていないことを示した [8]。これは、一言で言えばニュートリノが弱い相互作用しかしないために、ニュートリノの塊を作ったり、大量のニュートリノの流れを効率的に検出する方法がないことに起因する。たとえば電子の場合は物質内に沢山あり、原子核とともに塊を作ることができる。このため、実際に金属を用意して低温にすることで、電子がフェルミディラック統計に従うかどうかを検証することができる。また、光の場合は検出が容易であり、黒体放射（宇宙背景放射など）がボースアインシュタイン統計に従うことが示されている。しかしながら、ニュートリノは、超新星核を除けば対象の観測が困難であり [4]、ニュートリノの統計的な振る舞いの実験的検証は困難である。よって、パウリの排他律はニュートリノでは必ずしも厳密には成立していないかもしれない。

このようにニュートリノの量子統計性を巨視的な対象を用いた実験で実際に調べることは困難であるが、微視的な視点からの調査結果は報告されている。 ^{100}Mo が ^{100}Ru に崩壊する際のニュートリノのダブルベータ崩壊の実験である [5, 6]。この実験結果はまだデータ数が足りずに統計的な優位性は低いが、ニュートリノの統計性に関する重要なデータを報告している [9, 13]。

このダブルベータ崩壊の崩壊モード $0^+ \rightarrow 0^+$ はニュートリノがボゾンの場合には抑えられる。一方、崩壊モード $0^+ \rightarrow 2^+$ はニュートリノがボゾンの場合に強められる。したがって、この2つの崩壊モードに関連した次の比

$$R(J^\pi) = \frac{T_{1/2}(J^\pi)}{T_{1/2}(0_{g.s.}^+)} \quad (1.1)$$

はニュートリノの量子統計の検証に用いることが可能である [13]。ここで、 $T_{1/2}(0_{g.s.}^+)$ は ^{100}Mo の基底状態 $0_{g.s.}^+$ の崩壊の半減期であり、 $T_{1/2}(J^\pi)$ は ^{100}Mo の励起状態の半減期である。理論的には、ニュートリノが純粋なフェルミオンである場合の比 $R_{theo.}^{FD}(0_1^+)$ と、純粋なボゾンである場合の比 $R_{theo.}^{BE}(0_1^+)$ は

$$\begin{aligned}
R_{theo.}^{FD}(0_1^+) &\simeq 61 \\
R_{theo.}^{BE}(0_1^+) &\simeq 73
\end{aligned}
\tag{1.2}$$

のように得られる。

最新のNEMO-3のデータは、 $T_{1/2}(0_1^+) = (7.5 \pm 0.6(stat) \pm 0.6(syst)) \times 10^{20}$ [6] と、 $T_{1/2}(0_{g.s.}^+) = (7.11 \pm 0.02(stat) \pm 0.54(syst)) \times 10^{18}$ [7] という大きな実験誤差がある段階ではあるが、

$$R_{exp.}(0_1^+) \simeq 82 - 132. \tag{1.3}$$

が得られている。この結果だけで判断すれば、ニュートリノがフェルミオンではなくボソンに合致しているようにも見える。今後、実験精度が向上すれば結果も変わることが多いに予想されるが、ニュートリノが純粋なフェルミオンではない可能性は排除できない。

このダブルベータ崩壊の電子スペクトルの実験結果は、ニュートリノが純粋なフェルミオンではなく部分的にボソン成分が許されているとみなすこともできる。本論では、PEPの破れの具体的な機構については脇に置き、現象論的な議論に絞って考察する。

本論の構成は以下のとおりである。第2章では、本研究の基礎となる量子統計力学とニュートリノ物理学をまとめる。

第3章では、ニュートリノが純粋なフェルミ・ディラック統計に従うのではなく、純粋なフェルミ・ディラック統計(F.D.)から純粋なマクスウェル・ボルツマン統計(M.B.)の間の中間の統計に従うとする。そして、初期宇宙(0.5 ~ 500 GeVの温度)における非純粋フェルミオンであるニュートリノと相対論的有効自由度の関係について考察する。通常、放射優勢期におけるエネルギー密度はニュートリノのフェルミ・ディラック統計からのずれに伴って増加する。しかしながら、我々はGeVスケールの宇宙で大きなレプトン非対称があるときは、ニュートリノのフェルミ・ディラック統計からのずれに伴って相対論的有効自由度が減少することが示される。また、ニュートリノの統計性がフェルミ・ディラック統計からマクスウェル・ボルツマン統計へ変化するだけでは、有効ニュートリノ数の過剰を説明できないことを示す。

第4章では統計性の変化を拡張し、ニュートリノの統計性がフェルミ・ディラック統計(FD)からマクスウェル・ボルツマン統計(MB)を介してボース・アインシュタイン統計(BE)まで変化できるものとする。一

般に，純粋なボゾンの縮退パラメータ（ケミカルポテンシャル）は無視できる。しかし、ニュートリノの量子統計が純粋な BE から純粋な MB へ変化することを許すと，縮退パラメータが無限大まで増加できることを示す。また，非純粋なフェルミオンニュートリノによる現象論的帰結を議論した。例えば非純粋なフェルミオンニュートリノはダークマターの存在量を減少させ、バリオン - 光子比を増加させることを示す。

第 5 章では，数値的に得られた帰結をより明確に理解するために，正味エネルギー密度と相対論的有効自由度の近似的な解析式を導き，相対論的有効自由度がレプトン非対称性に大きく依存することを示した。

第 6 章では，結言として本研究のまとめを行なった。

本研究によって明らかになった，ニュートリノがフェルミ・ディラック統計からずれた統計に従った場合の相対論的有効自由度の変化は，ニュートリノがフェルミ・ディラック統計に厳密に従うと考える標準的な理論では未解明な問題を解明する手がかりの 1 つになると期待できる。

第2章 基礎理論

2.1 量子統計力学

まず、本研究の基礎となる量子統計力学についてを解説する [14].

2.1.1 量子状態の記述

シュレーディンガー方程式と波動関数

量子力学では、粒子は波動的な性質を持ち、波動も粒子的な性質を持つ。ここで最も基本的な一粒子の量子状態を記述する手法について述べる。量子力学における粒子と波動の二重性を複素関数で表現するために、波動関数 Ψ を導入し、この絶対値の二乗、

$$|\Psi(t, x)|^2 dx \quad (2.1)$$

が、時刻 t において x と $x + dx$ の間の微小部分に粒子が見出される確率に比例すると解釈されている。

その時間発展はシュレーディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi \quad (2.2)$$

で表され、波動関数はこれを満たす、つまりこの方程式の解である必要がある。

ハミルトニアン H は、演算子形式で、xyz 方向の運動量ベクトルを \vec{p} とした時、

$$\vec{p}_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}, \vec{p}_y = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y}, \vec{p}_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.3)$$

と表記することもでき、またナブラ記号を用いて、

$$\vec{p} = (\hbar/i) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) = (\hbar/i) \cdot \nabla \quad (2.4)$$

とまとめることもできる。特に波動関数 $\Psi(t, x)$ が、

$$\Psi(t, x) = \exp(-iEt/\hbar)\psi(x) \quad (2.5)$$

と書ければ、式 (2.2) は、

$$H\psi = E\psi \quad (2.6)$$

となる。(E をエネルギーの固有値、 ψ を固有関数)

古典力学ではエネルギーは基本的にどんな値でも許されるが、量子力学では式 (2.6) を満たす飛び飛びの値しかとることができない。この解は次のような性質を持つ。ここで

$$H\psi_i = E_i\psi_i, \quad H\psi_j = E_j\psi_j \quad (2.7)$$

を満たす ψ_i, ψ_j が存在するとき、 $E_i \neq E_j$ であれば、

$$(\psi_i|\psi_j) = \int \psi_i^*(x)\psi_j(x)dx = 0 \quad (2.8)$$

(ψ_i^* は ψ_i の複素共役である) となる。

この式の左辺は、 ψ_i と ψ_j のスカラー積を定義したとも言える。この場合、直行する状態は異なるエネルギーに対するものであると言える。また、同じエネルギーの固有値に一次独立な複数個の固有値が存在する場合があるが、この数を m とするとき、これを m 重に縮退しているという。この m 個の固有関数は、適当な方法により、互いに直交しているように選ぶことができる。式 (2.6) からわかるように、 ψ に任意の定数をかけても、これはやはり方程式の解ということができよう。したがって、 $(\psi|\psi) = 1$ が成り立つとして、一般性を失わない。これらをまとめて、クロネッカーのデルタ、

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

を用い

$$(\psi_i|\psi_j) = \delta_{ij} \quad (2.9)$$

を満たす。式 (2.9) が満たされる時、関数系 $\psi_1, \psi_2 \dots$ は規格直交系をなすという。さらに、任意の関数系がこの $\psi_1, \psi_2 \dots$ で

$$\Psi(x) = a_1\psi_1(x) + a_2\psi_2(x) + \dots \quad (2.10)$$

のように展開可能な場合、それは完全系を作るという。

演算子の行列表現と対角和

ハミルトニアンなど任意の演算子 A について考える。完全系 $\psi_1, \psi_2 \dots$ を基にして、

$$A_{ij} = (\psi_i A \psi_j) = \int \psi_i^*(x) A \psi_j(x) dx \quad (2.11)$$

により、演算子 A は行列の形に表すことができる。一つの完全系から他の完全系に移ると、上述の行列もある変換を受ける。今、 $\phi_1, \phi_2 \dots$ が式 (2.9) を満たす完全系であるとする。 ψ_i を $\psi_1, \psi_2 \dots$ で展開し、

$$\psi_i = \sum_k a_{ik} \psi_k \quad (2.12)$$

とおく。今スカラー積を作るためこの両辺に ϕ_i^* をかけ、 $a_{ij} = (\phi_i \psi_j)$ を得ると、

$$\psi_i = \sum_k (\phi_k \psi_i) \psi_k \quad (2.13)$$

となり、これを $(\psi_i \psi_j) = \delta_{ij}$ に代入すれば、

$$\sum_k (\psi_i \phi_k) (\phi_k \psi_j) = \delta_{ij} \quad (2.14)$$

を得る。同様に ϕ の関数系を ψ の関数系で展開すれば、式 (2.14) の ϕ と ψ を交換して、

$$\sum_k (\phi_i \psi_k) (\psi_k \phi_j) = \delta_{ij} \quad (2.15)$$

を得る。いかなる完全系を取ったかによって行列の表されかたは異なるが、この式 (2.11) で表される行列の対角要素の和は、式 (2.12), (2.15) を使えば、

$$\sum_i (\psi_i A \psi_i) = \sum_{ijk} (\psi_i \phi_j) (\phi_j A \phi_k) (\phi_k \psi_i) = \sum_{jk} \delta_{jk} (\phi_j A \phi_k) = \sum_i (\phi_i A \phi_i) \quad (2.16)$$

が成り立つため取られた完全系とは無関係に常に一定である。よって、 A の対角和は、その演算子に対する固有の量と言える。これは A のトレースとしても表され、 $\text{tr}A$ とも書かれる。すなわち、

$$\text{tr}A = \sum_i (\psi_i A \psi_i) \quad (2.17)$$

となり、右辺の完全系はどのようなものを選んでも良い。

ブラケット表示

量子力学の計算においては、行列をブラケットで表すこともできる。今考えている体系の状態はその関数を (2.10) のように展開されるときこの係数を成分とするベクトルにより

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = |P\rangle \quad (2.18)$$

と表されこれをケットベクトルと呼ぶ。この複素共役なベクトルを

$$(a_1^* \ a_2^* \ a_3^* \ \dots) = \langle P| \quad (2.19)$$

と書くこともでき、これをブラベクトルと呼ぶ。この関数の内積を取ることにより、波動関数の積は表され、

$$(a_1^* \ a_2^* \ a_3^* \ \dots) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \langle P|P\rangle = \int \psi^*(x)\psi(x)dx \quad (2.20)$$

となる。

この記号を用いると、例えば式 (2.2) は、

$$H |E\rangle = E |E\rangle \quad (2.21)$$

とかくことができ、この固有方程式の、 $|E\rangle$ が固有ベクトル (固有ケットとも)、 E が固有値である。また、式 (2.11) に相当する演算子 A の行列要素は、 $\langle P_i|A|P_j\rangle$ と定義され、特に、式 (2.9) に対応して $\langle P_i|P_j\rangle = \delta_{ij}$ である。

例として、今一つの完全系 $|P_i\rangle$ がある時、

$$\sum_i |P_i\rangle \langle P_i| = 1 \quad (2.22)$$

が成り立つ。この性質を使えば、式 (2.16) の証明は、

$$\begin{aligned} \sum_i \langle P_i | A | P_i \rangle &= \sum_{ijk} \langle P_i | | Q_i \rangle \langle Q_j | A | Q_k \rangle \langle Q_k | | P_i \rangle \\ &= \sum_{jk} \delta_{jk} \langle Q_j | A | Q_k \rangle = \sum_i \langle Q_j | A | Q_j \rangle \end{aligned} \quad (2.23)$$

となる。

エルミート共役

ある演算子 A に対して、次の式により A とエルミート共役な A^\dagger が定義される。

$$(A^\dagger)_{ij} = (A_{ji})^* \quad (2.24)$$

すなわち A^\dagger の ij の要素は、 A_{ji} の共役複素数である。特に $A^\dagger = A$ が成立する場合、演算子 A はエルミート演算子と呼ばれ、その固有値は必ず実数となる。この固有値は、演算子が示すオブザーバブルの実際の観測量として解釈されている。この値が波動関数によって確率的に表現されるとされる量子力学においても、各物理量は実数で求められるため、物理量を表す演算子は必ずエルミートであることが要求される。ここにその証明を与える。

エルミート行列 H の固有値 λ と固有ベクトル $|x\rangle$ には以下のような関係がある。

$$H |x\rangle = \lambda |x\rangle \quad (2.25)$$

この両辺のエルミート共役をとる。右辺については

$$\langle x | H^\dagger = \lambda^* \langle x | \quad (2.26)$$

ここで H はエルミート行列なので

$$H^\dagger = H \quad (2.27)$$

である。それで式 (2.27) 式を次のように書いても同じである。

$$|x\rangle H = \lambda^* |x\rangle \quad (2.28)$$

ここで、式 (2.25) の両辺に左から $\langle x|$ を掛け、式 (2.28) の両辺には右から $|x\rangle$ を掛けると、

$$\begin{aligned}\langle x|H|x\rangle &= \lambda \langle x|x\rangle \\ \langle x|H|x\rangle &= \lambda^* \langle x|x\rangle\end{aligned}\quad (2.29)$$

となり、左辺は区別がなくなり、等しいことが言える。これより $\lambda = \lambda^*$ であることが言える。複素共役を取っても値の変わらない定数であるためこれは実数であることが示された。

ここで例として、一辺の長さ L の立方体内にある質量 m の自由粒子を考える。この粒子は古典的ハミルトニアンは $p^2/2m$ を持つ。これを量子力学的に置き換えると、

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\quad (2.30)$$

と表される。これを用いて、 ψ に対する境界条件を設定してエネルギー固有値を求める。通常、このような境界条件には周期的な境界条件がよく用いられ、 x 方向に対し

$$\psi(x+L) = \psi(x), \quad \frac{\partial}{\partial x}\psi(x+L) = \frac{\partial}{\partial x}\psi(x)\quad (2.31)$$

とし、 y, z 方向についても同様にする。すると ψ は、

$$\psi \propto \exp(ik_x x + ik_y y + ik_z z)\quad (2.32)$$

となり、 k_x, k_y, k_z はそれぞれ、

$$k_x = \frac{2\pi}{L}l, \quad k_y = \frac{2\pi}{L}m, \quad k_z = \frac{2\pi}{L}n\quad (2.33)$$

となる。ここで、 $l, m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ である。ここでは波数ベクトルと呼ばれる k_x, k_y, k_z を x, y, z 成分とするベクトル k を用いた。式 (2.32) を式 (2.2) に代入して式 (2.30) を使えば、求められるエネルギー固有値 E は、

$$E = \frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\quad (2.34)$$

となる。一方、波動関数は体積 V の中で規格化されているとすれば、

$$\psi_k(x) = V^{-1/2} e^{ik \cdot x}\quad (2.35)$$

となる。この波動関数が式 (2.14) の条件、すなわち、

$$\int \psi_k^*(x)\psi'_k(x)dx = \delta(k, k') \quad (2.36)$$

を満たすことを容易に確認できる。これらの計算を実際に行うには、波数ベクトル k についての和を求める必要が生じる。この k の和は式 (2.36) で与えられる l, m, n に関する和であるが、 L が十分に大きいとき、 k_x, k_y, k_z は連続的に変化すると近似することもできる。この時 k の和は、 $L \rightarrow \infty$ の極限で積分に置き換えることができ、式 (2.36) を用いて

$$\sum_{lmn} = \int \Delta l \Delta m \Delta n = \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z \quad (2.37)$$

変えられる。ここで、 L^3 が体積 V に等しいことに留意すると、関係

$$\sum_k \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int dk (L \rightarrow \infty) \quad (2.38)$$

をえられる。

2.1.2 多粒子系の量子力学

ここまでは一粒子系における量子化の手法を述べてきたが、ここからはこれを多粒子系に拡張した系について述べる。ここで、系全体のハミルトニアンが、この系を構成する各粒子のハミルトニアンの和である系を考える。例えば、前節の自由粒子が箱内に N 個ある時、 i 番目の粒子のハミルトニアンを $H^{(i)}$ とすれば、全体の H は、

$$H = H^{(1)} + H^{(2)} + \dots + H^{(N)} \quad (2.39)$$

である。この場合の式 (2.2) の形式的な解は、

$$\psi(1, 2, \dots, N) = \psi_{r_1}(1) + \psi_{r_2}(2) + \dots + \psi_{r_N}(N)$$

$$E = e_{r_1} + e_{r_2} + \dots + e_{r_N} \quad (2.40)$$

で与えられる。ただし、 e_{r_1} は、

$$H^{(1)}\psi_{r_1}(i) \quad (2.41)$$

を満たす1粒子の固有値である。式(2.1.2)の波動関数は、1番目の粒子が r_1 と言う状態、二番目の粒子が $r_2\dots$ という状態に入っている状態に相当する。これは、粒子の個別性を認めた形と言って良い。しかしながら、量子力学においては、このような個別性は否定され同種粒子の区別ができない。このため、たとえば二粒子の状態を波動関数 $\psi(x_1, x_2)$ で表した時、この波動関数の絶対値の二乗 $|\psi(x_1, x_2)|^2$ と $|\psi(x_2, x_1)|^2$ の区別ができない。つまり

$$|\psi(x_1, x_2)|^2 = |\psi(x_2, x_1)|^2 \quad (2.42)$$

となり、

$$\psi(x_1, x_2) = \pm\psi(x_2, x_1) \quad (2.43)$$

であることを意味する。

2.1.3 ボース分布とフェルミ分布

一般に、量子力学における粒子は、位置座標 x などの他にスピン σ と呼ばれる内部自由度をもつ。スピンの大きさは \hbar を単位として $1, 1/2, 1, 3/2, \dots$ という値を持つ。スピンの大きさが $0, 1, 2, \dots$ の整数値を持つ粒子はボース粒子(ボソン)、 $1/2, 3/2, \dots$ の半整数値を持つ粒子はフェルミ粒子(フェルミオン)と呼ばれる。例えば、電子はスピン $1/2$ でフェルミ粒子、 ${}^4\text{He}$ の原子はスピン 0 を持つボース粒子である。自由粒子にあっては、一般にスピン s の状態は $2s + 1$ 重に縮退している。

ボース粒子、またはフェルミ粒子の集まりがあるとき、その全系をそれぞれボース粒子系、フェルミ粒子系という。また、ボーズ粒子系やフェルミ粒子系の統計力学を量子統計力学と呼び、これは波動関数に複雑な対称性を要求する。記号の簡略化のため、座標 x_i 、スピンを表す座標 s_i を一緒にして書くと式(2.43)に置いて、波動関数の入れ替えが対象である場合が、ボース統計で

$$\psi(2, 1, 3, \dots) = \psi(1, 2, 3, \dots) \quad (2.44)$$

となり、反対称である場合がフェルミ統計で

$$\psi(2, 1, 3, \dots) = -\psi(1, 2, 3, \dots) \quad (2.45)$$

となる。一般に P は $(1, 2, \dots, N)$ を (i_1, i_2, \dots, i_N) に置き換える演算であるとすれば、

$$P\psi(1, 2, \dots, N) = \psi(1, 2, \dots, N) \quad (2.46)$$

$$P\psi(1, 2, \dots, N) = (-1)^{\delta(P)}\psi(1, 2, \dots, N) \quad (2.47)$$

である。ただし、上式で (2.46) はボース統計に、(2.47) はフェルミ統計に対応している。(以下、これと同じ記号を用いる)。また、 $\delta(P)$ は、 P が偶置換なら偶数、奇置換なら奇数をそれぞれ表している。この対称性は、自由粒子の時だけでなく、一般に粒子間相互作用があっても成り立つと考えられる。特に、自由粒子であれば、式 (2.1.2) の一次結合を作り、かつ式 (2.47) (を満たすものとして、

$$\psi(1, 2, \dots, N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_P P\psi_{r_1}(1) + \psi_{r_2}(2) + \dots + \psi_{r_N}(N) \quad (2.48)$$

$$\psi(1, 2, \dots, N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_P (-1)^{\delta(P)} P\psi_{r_1}(1) + \psi_{r_2}(2) + \dots + \psi_{r_N}(N) \quad (2.49)$$

を得る。ここでも P は粒子の座標を入れ替える演算であり、簡略化のため、各粒子の状態は異なるものとした。 $\sqrt{N!}$ の数因数は規格化条件

$$\int \psi^*(1, 2, \dots, N)\psi(1, 2, \dots, N) dt_1 \dots dt_N = 1 \quad (2.50)$$

を満足させるために必要である。ただし、式 (2.50) で t の積分は、空間座標 x の積分とスピン座標 s に対する和の両方を意味する。特にフェルミ粒子の場合は、スレーター行列で波動関数が表される。よって、 $r_k = r_l (k \neq l)$ であるならば、全体の波動関数は恒等的に 0 となる。ゆえに、フェルミ粒子では、同じ 1 粒子の量子状態に二つ以上の粒子が入れない。これを、パウリの排他律と呼ぶ。一方、ボース粒子ではそのようなことはなく、同じ状態に粒子がいくつ入っても良い。この性質を表すために、1 粒子の状態 r を占める粒子の数 n_r を考えるのが便利である。その場合、ボース粒子なら $n_r = 0, 1, 2, \dots$ であり、またフェルミ粒子なら $n_r = 0, 1$ である。いずれの場合も全系のエネルギーは、

$$E = \sum_r e_r n_r \quad (2.51)$$

と表される。自由粒子であれば、 r は波数ベクトル k を、スピンまで考慮する場合は、 k, σ の双方を表す。 σ はスピンの状態を指定する変数である。

また、

$$e_r = \hbar^2 k^2 / 2m \quad (2.52)$$

の関係があり、これはスピン状態 σ によらない。粒子の総数は無論

$$N = \sum_r n_r \quad (2.53)$$

である。

粒子間に相互作用があると、全系の固有状態は式 (2.49) のようには書けない。全系のエネルギー固有値及び固有関数を求めるのは、一般にとても難しい。しかし、例えばこのような多粒子系 A,B を想定し、その間に相互作用がなければ、全系のエネルギー E は、

$$E = E_A + E_B \quad (2.54)$$

と表される。ただし、 E_A, E_B はそれぞれ A 系、B 系のエネルギー固有値である。一般に、このような系 A,B,C.... のある時、全体の系のエネルギーは、

$$E = E_A + E_B + E_C \dots \dots \quad (2.55)$$

で与えられる。

量子統計における正準集団、大正準集団について述べる。ここでは、多くの粒子から成り立っている系を考える。この体系のハミルトニアンを H と書き、この体系と全く同じ構造を持つ体系を M 個とり、それを並べたとする。これらの体系の間には弱い相互作用があり、エネルギーを交換するが、 M 個全体では外との交渉はなく全体のエネルギー E_0 は一定に保つとする。一つの体系に対するエネルギー固有値を E_i 、 M 個のうちでその状態の数を取っているものが M_i 個あるとする。

このような条件下で、古典論の出発点になった基礎に立ち返ると、

(i) $W = \frac{M!}{\prod M_i!}, \quad \sum M_i = M, \quad \sum E_i M_i = E_0$

(ii) (M_1, M_2, \dots) の組が実現する確率は W に比例する。

(iii) 熱平衡状態では、 W は最大になっている。

の3点が重要な事項となる [14]。ここで W はエネルギー E_i をとる微視的状态の総数であり、量子論においても、(i) の最初の二つは成立し、また最後の条件も、式 (2.55) と照らし合わせれば正しいと言える。したがって、

(ii)(iii) を認めると、古典論と全く同じ条件での議論が可能となる。(iii) は、エルゴード仮説を量子論に拡張したもので、 M 個全体を考えた場合、その可能な量子状態は同じ確率で実現されるといい良い。よってこの過程を認めれば、

$$M_i = \frac{M}{Z} e^{-\beta E_i}, Z = \sum_i e^{-\beta E_i} \quad (2.56)$$

が得られる。式 (2.56) の \sum は、問題としている体系のエネルギー固有状態に対する総和である。これは、 Z が状態和と呼ばれる理由でもある。 β, Z の意味は古典論と全く同じである。

ここで、さらに粒子の交換も許されるとするなら、大正準集団を取り扱うこととなる。この場合も、古典論と同等に議論することができ、

$$Z_G = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_j e^{-\beta(E(N,j) - \mu N)} \quad (2.57)$$

で大分配関数が与えられる。ただし、 $E(N, j)$ は N 個の粒子を含む体系の j 番目のエネルギー固有値である。

前節の、式 (2.51)、式 (2.53) を用いると、自由粒子に関する状態和 Z は、

$$Z = \sum \exp(-\beta \sum_r e_r n_r) \quad (2.58)$$

と表される。ただしここには $\sum n_r = N$ という制限が必要であり、このため式 (2.58) の計算は簡単ではない。しかし、 Z_G では、 N に対する和をとるため、このような制限は忘れ、 n_r は独立に変化するといい良い。すなわち、

$$\begin{aligned} Z_G &= \sum_{n_r} \exp[-\beta(\sum_r e_r n_r - \mu \sum_r n_r)] \\ &= \sum_{n_r} \exp(-\beta \sum_r \varepsilon_r n_r) \end{aligned} \quad (2.59)$$

となる。ただし、 ε_r は μ から測った 1 粒子のエネルギーで、

$$\varepsilon_r = e_r - \mu \quad (2.60)$$

を意味する。ここで、 $\exp(\sum_r x_r) = \prod_r \exp(x_r)$ であるから、式 (2.59) (45) は、

$$Z_G = \sum_{n_r} \prod_r \exp(-\beta \varepsilon_r n_r) \quad (2.61)$$

である。 n_r はボース、またはフェルミ統計に対し、

$$n_r = 0, 1, 2, \dots \quad (2.62)$$

$$n_r = 0, 1 \quad (2.63)$$

であるから、 n_r に対する和を取って、分配関数は、ボース粒子の場合は

$$Z_b = \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_{\infty}=0}^{\infty} \exp(-\beta(n_1(\varepsilon_1 - \mu) + n_2(\varepsilon_2 - \mu) + \dots)) \quad (2.64)$$

各 n_j が独立であることを考慮して

$$\begin{aligned} &= \exp(-\beta(n_1(\varepsilon_1 - \mu))) \times \exp(-\beta(n_2(\varepsilon_2 - \mu))) \times \dots \\ &= (1 + \exp(-\beta(\varepsilon_1 - \mu)) + (\exp(-\beta(\varepsilon_1 - \mu)))^2 + \dots) \\ &\quad \times (1 + \exp(-\beta(\varepsilon_2 - \mu)) + (\exp(-\beta(\varepsilon_2 - \mu)))^2 + \dots) \times \dots \end{aligned} \quad (2.65)$$

等比級数の公式 $1 + X + X^2 + \dots = 1/(1 - X)$ を用いて

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{1 - \exp(-\beta(\varepsilon_1 - \mu))} \times \frac{1}{\exp(-\beta(\varepsilon_2 - \mu))} \times \dots \\ &= \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \exp(-\beta(\varepsilon_j - \mu))} \end{aligned} \quad (2.66)$$

フェルミ粒子の場合は、

$$Z_F = \sum_{n_1=0}^1 \dots \sum_{n_{\infty}=0}^1 \exp(-\beta(n_1(\varepsilon_1 - \mu) + n_2(\varepsilon_2 - \mu) + \dots)) \quad (2.67)$$

各 n_j について独立に和をとって、

$$\begin{aligned} &= \sum_{n_1=0}^1 \exp(-\beta n_1(\varepsilon_1 - \mu) + \dots) \times \sum_{n_2=0}^1 \exp(-\beta n_2(\varepsilon_2 - \mu)) \times \dots \\ &= (1 + \exp(-\beta(\varepsilon_1 - \mu))) \times (1 + \exp(-\beta(\varepsilon_2 - \mu))) \times \dots \\ &= \prod_{j=1}^{\infty} (1 + \exp(-\beta(\varepsilon_j - \mu))) \end{aligned} \quad (2.68)$$

よって、ボース、フェルミ粒子の大分配関数は

$$Z_G = \prod_r (1 - e^{(-\beta\varepsilon_r)})^{-1} \quad (2.69)$$

$$Z_G = \prod_r (1 + e^{(-\beta\varepsilon_r)}) \quad (2.70)$$

となる。これより、エネルギーに縮退がない場合のグランドポテンシャル

$$J = -kT \ln Z_G \quad (2.71)$$

は、ボース粒子の場合

$$J = -kT \sum_j \ln(1 + \exp(-\beta(\varepsilon_j - \mu))) \quad (2.72)$$

フェルミ粒子の場合

$$J = kT \sum_j \ln(1 - \exp(-\beta(\varepsilon_j - \mu))) \quad (2.73)$$

となる。これまでの議論より、一粒子の固有状態 j にある粒子数の期待値 (占有確率) $\langle n_j \rangle$ は、

$$N(T, V, \mu) = - \left(\frac{\partial(-kT \ln Z_G)}{\partial \mu} \right) \quad (2.74)$$

において、ボース粒子の場合

$$\langle n_j \rangle = \frac{\exp(-\beta(\varepsilon_j - \mu))}{1 - \exp(-\beta(\varepsilon_j - \mu))} = \frac{1}{\exp(-\beta(\varepsilon_j - \mu)) - 1} \quad (2.75)$$

フェルミ粒子の場合

$$\langle n_j \rangle = \frac{\exp(-\beta(\varepsilon_j - \mu))}{1 + \exp(-\beta(\varepsilon_j - \mu))} = \frac{1}{\exp(\beta(\varepsilon_j - \mu)) + 1} \quad (2.76)$$

よって、分布関数はそれぞれ

$$f_r = \frac{1}{e^{(\beta\varepsilon_r)} - 1} \quad (2.77)$$

$$f_r = \frac{1}{e^{(\beta\varepsilon_r)} + 1} \quad (2.78)$$

が得られる。式 (2.78) をボース分布関数、式 (2.77) をフェルミ分布関数と呼ぶ。ここで $\beta\varepsilon_r$ が非常に大きければ、

$$f_r \approx e^{-\beta\varepsilon_r} \quad (2.79)$$

となり、これは古典的なマクスウェル・ボルツマン分布に一致する。また、

$$d\Omega = -SdT - pdV - \bar{N}d\mu \quad (2.80)$$

で与えられるパラメータ Ω を定義すれば、ここから種々の熱力学的関数を計算することができる。この分配関数 (2.69)(2.70) 時の Ω を Ω_0 と書けば、

$$\Omega_0 = \pm \frac{1}{\beta} \sum_r \ln(1 \mp e^{-\beta\varepsilon_r}) \quad (2.81)$$

が得られる。ここで、上符号はボース統計、下符号はフェルミ統計に対応する。

この系のエントロピーについては、式 (2.80) より、

$$S = -(\partial\Omega/\partial T)_{V,\mu} \quad (2.82)$$

であるので、 Ω_0 を代入すれば、

$$S_0 = \mp k_B \sum_r \ln(1 \mp e^{-\beta\varepsilon_r}) + T^{-1} \sum_r (e^{\beta\varepsilon_r} \mp 1)^{-1} \varepsilon_r \quad (2.83)$$

あるいは、 f_r を用いて、

$$S_0 = -k_B \sum_r [f_r \ln f_r \mp (1 \pm f_r) \ln(1 \pm f_r)] \quad (2.84)$$

と表される。

2.2 ニュートリノ物理学

次にニュートリノ物理学の基礎について解説する [2, 3, 15].

2.2.1 素粒子物理学の概要

ニュートリノ物理学の詳細を解説する前に、素粒子物理学の概要を述べておく。素粒子物理学の目的は、主に二つである。第一に、物質を構成している根源的な粒子の同定、第二に、それら粒子間に働く力の相互作用の法則の解明である。

物質を構成している根源的な粒子は何であろうか。物質は分子によって構成され、さらにこの分子は原子によって構成されている。この原子では原子核の周りを電子が量子的な状態を持って運動している。原子核では、原子全体の10万分の1という大きさの中に、陽子と中性子が π 中間子などを放出・吸収しながら入っている。陽子や中性子などの原子核の中などに存在して強い力を及ぼし合う粒子は「バリオン」、 π 中間子などは「メソン」に分類されている。

歴史的には、1960年代前半までは物質の最小単位はバリオンとメソンと電子だと考えられていた。だが、1964年、ゲルマンらはバリオンとメソンが、さらなる基本粒子であるクォークから構成されるという仮説を提唱した。この仮説は正しく、バリオンは3つのクォークでできており、メソンは2つのクォークでできている。なお、1964年ごろにはクォークは、アップクォーク (u)、ダウルクォーク (d)、ストレンジクォーク (s) の三種類しかないと考えられていた。だが1974年、第四のクォークであるチャームクォーク (c) を含むメソンが発見される。この後もさらなるクォークであるボトムクォーク (b) とトップクォーク (t) の発見が続き、前述したように現在では6種類のクォークが発見されている。一方レプトンもまた、電子 (e^-) の他にミューオン (μ^-)、タウオン (τ^-)、電子ニュートリノ (ν_e)、ミューニュートリノ (ν_μ)、タウニュートリノ (ν_τ) の6種類が発見されている。これらクォークとレプトンの性質を、表 2.1 にまとめた [3]。

表 2.1: クォーク・レプトン

荷電 Q	相互作用	第一世代	第二世代	第三世代
2/3	S,E,W	u(2.33)	c(677)	t(181,000)
-1/3	S,E,W	d(4.69)	s(93)	b(3000)
0	W	$\nu_e(?)$	$\nu_\mu(?)$	$\nu_\tau(?)$
-1	E,W	$e^-(0.511)$	$\nu^-(105.7)$	$\tau^-(1777)$

表 2.1 の中の相互作用の記号 E,W,S は、それぞれ電磁相互作用、弱い相

相互作用、強い相互作用を表す。表 2.1 に見るように、基本粒子 (u, d, ν_e, e^-) と同じ性質を持つグループ (c, s, ν_μ, ν^-)、(t, b, ν_τ, τ^-) が質量のみを違いとして存在している。これら三つのグループを世代と呼んで区別している。

現在、様々な粒子を構成する根源的な粒子は、これらの 6 種類のクォークと 6 種類のレプトンだと考えられている。これら粒子は場の量子論に基づいて記述される。粒子に働く力は、重力、強い力、弱い力、電磁気力の 4 種類が知られている。重力相互作用の影響は極めて弱いため、素粒子実験が可能な領域では、無視されている。弱い力と電磁気力は、ワインバーグ・サラム理論によって理論的に統一され、電弱力と呼ばれている。

この電弱理論と強い力の理論（量子色力学）を合わせた理論体系は標準模型とよばれている。標準模型に登場するのは、クォーク、レプトンなどスピン $1/2$ をもち物質を構成する「フェルミ粒子」のほか、光子 (γ)、 W ボソン、 Z ボソン、グルーオン g などの力を媒介するスピン 1 を持った「ゲージ粒子」、そして自発的対象性の破れによるヒッグス機構によってフェルミ粒子に質量を与える「ヒッグス粒子 (h)」である。

現在までのほとんどの実験結果は、標準模型と矛盾しない結果を得ている。しかしながら、標準模型によって、素粒子のすべての謎が解明できるわけではない。標準模型には未だに決定できないいくつかのパラメーターが含まれている。またクォークやレプトンのフレーバーがなぜ三代代なのかなどについても標準模型だけからでは説明できない。こうした疑問を解決するために、理論、実験双方からの努力が続けられているが、現時点では様々な理論が乱立している状態でもある。

例えば、電磁気力を記述する $U(1)$ ゲージ理論が $SU(2) \times U(1)$ 対称性の破れによってもたらされたように、強い力までも統一している標準模型の $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 対称性もまた $SU(5)$ や $SO(10)$ などのより高次の対称性が破れたことによるものなのではないかという仮説に立った大統一理論がある。また標準模型に登場する粒子には、ボース粒子とフェルミ粒子を入れ替える超対称変換という数学的操作によって表されるパートナー粒子が存在するという超対称性仮説などが提唱されている。

標準模型を超える理論構築に関して着目すべき現象の 1 つは、スーパーカミオカンデなどで実際に観測がなされたニュートリノ振動である。標準模型では質量 0 とされていたニュートリノに僅かな質量があることがニュートリノ振動を通じて示された。このことは、ニュートリノに着目することで標準模型を超えた新たな枠組みを見出すことができ、それに

よって未解決問題に光をあてる可能性がある」と確信させるものである。

2.2.2 ニュートリノの主な性質

ニュートリノの主な性質について、現在判明していることを順次述べる。

電氣的に中性である

レプトンは強い相互作用をしないことは知られているが、ニュートリノはその中でも電氣的に中性である。クォーク及び荷電レプトン (e^- , μ^- , τ^-) のように電荷を持たず、したがって電磁相互作用も行わない。

この事実は、ニュートリノの観測実験において困難をもたらしている。荷電粒子であるならば、写真乾板等の観測機器を持ち、その粒子が通過した際の電磁相互作用によって、その飛跡を捉えることができるのだが、電荷を持たない粒子はこのような手法では観測にかからず、観測には特殊な工夫が必要になる。このような事情により、ニュートリノは長年実際の観測がなされずに、仮説粒子として扱われてきた。

また一般に、粒子には必ずその対となる反粒子が存在する。例として、 $Q = -1$ の電荷を持つ電子には、 $Q = +1$ の電荷を持つ陽電子という反粒子が存在する。粒子と反粒子は、その質量を同じくするという以外すべて逆の性質を持つことが一般に知られている。

電氣的に中性な粒子であっても、複合粒子ならば粒子と反粒子の区別がつく。例えば、電氣的に中性なバリオンである中性子は、一つのアップクォークと二つのダウンクォークよりなる (udd) がこの反粒子である反中性子は、それぞれの反クォークからなりたっている、つまり ($\bar{u}\bar{d}\bar{d}$) という構成をとる。しかし、素粒子であり、内部構造のないニュートリノは、このような構造から反粒子を探ることはできず、反ニュートリノについても様々な仮説が提唱されてきたが、 ν と $\bar{\nu}$ は独立な粒子ではなく、ニュートリノそれ自体が反粒子なのではないかという仮説がある。このような粒子と反粒子が同一であるものはマヨラナ粒子と呼ばれる。一方粒子と反粒子が異なる、 $\nu \neq \bar{\nu}$ なら、ディラック粒子となる。ニュートリノがこのどちらに該当するのかについては未だに結論は出ていない。

質量が著しく小さい

クォークと荷電レプトンの質量は表2.1に示したように、最も質量の小さい電子でも0.5MeVの質量を持っている。一方、ニュートリノの質量は、まだ確定はしていないが、観測機器で検出するのが困難なほどに小さい。一時期は質量ゼロであるとさえ考えられていたが、ニュートリノ振動の発見によりこれは否定された。現在、その質量はeVオーダー以下であると推察されている。

物質中をほとんど自由に通過できる

ニュートリノは弱い相互作用によってしか他の粒子と反応しない。したがって、物質中をニュートリノが通過したとしても、他の粒子と反応を起こす確率は極めて小さい。このことは、ニュートリノを観測することを困難にしている最も大きな要因の一つである。したがってニュートリノの観測機器は大型であり、地下深くに設置されている。これによって地中を貫通しない他の粒子を省き、ニュートリノだけを検出しやすくなるのである。一方、この高い透過性を生かした、地球を通過してきたニュートリノを観測することによる地球内部探査、太陽の核融合から放出されるニュートリノによる太陽内部探査などの自然科学への応用も考案されている。

現在3種類の仲間が知られている

実験で発見されているニュートリノは

- ν_e 電子ニュートリノ
- ν_μ ミューニュートリノ
- ν_τ タウニュートリノ

の3種類である。これらは弱い相互作用において、それぞれ e^- , ν^- , τ^- とペアをなすため、このような名が付いている。例えば、Kメソンが弱い相互作用で $K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$ と崩壊するときの ν は、 ν_μ であり、 $K^+ \rightarrow e^+ + \nu$ と崩壊する時の ν は、 ν_e である。この二つのニュートリノが別個のものであるということは実験事実である。例えば $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ によって作られた ν_μ を中性子に衝突させても、 $\nu_\mu + n \rightarrow \mu^- + p$ という反応は起こる

が、 $\nu_\mu + n \rightarrow e^- + p$ は起こらないということが、1962年、ブルックヘブン国立研究所で行われた実験で確認されている。

2.2.3 弱い相互作用

ニュートリノは前項で述べたように弱い相互作用しかしない。よってニュートリノの研究にはこの弱い相互作用の性質を理解することが不可欠である。この概略を述べる。スピン $S = \frac{1}{2}$ の粒子には、上向きスピン \uparrow ($S_z = +\frac{1}{2}$) と、下向きスピン \downarrow ($S_z = -\frac{1}{2}$) とする二つの量子力学的状態をもつ。基本粒子の状態を論ずる時、その粒子の進行方向（運動量 \vec{p} の方向）を基準値に取り、 \vec{p} とスピン \vec{S} の関係

$$h = \frac{\vec{p} \cdot \vec{S}}{|\vec{p}|}$$

によって定義されるヘリシティがよく用いられる。これは、質量を持たない粒子の場合にはカリラリティと等価であり、粒子のパリティ対称が破れている際に定義される。 $h = \frac{1}{2}$ は、 \vec{p} と \vec{S} が平行の場合で、これを右巻き粒子と呼ぶ。また、 $h = -\frac{1}{2}$ の場合は、 \vec{p} と \vec{S} が反平行の場合で、左巻き粒子と呼ばれる。

標準模型で扱う、電磁相互作用、強い相互作用、弱い相互作用からなる3つの基本相互作用は、ゲージボソンを介してその作用が行われる。電磁相互作用では媒介するゲージボソンは光子 γ であり、光子 γ は荷電粒子 f について、その右巻き粒子 f_R にも左巻き粒子 f_L にも区別なく作用する。強い相互作用ではグルーオンが相互作用を媒介するが、この場合も f_R にも f_L にも対等に作用する。

しかし、弱い相互作用の荷電カレント相互作用を媒介するウィークボソンの W^+, W^- 粒子は f_L に対してしか作用を行わない。さらに、 W^\pm が相互作用するとき、 f_L の荷電を $Q = \pm 1$ だけ変化させる。その具体的な遷移の様子を以下に記す。

$$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix}$$

W^+ の放出によって、上記の括弧で囲った上の粒子状態より、下の粒子状態へと遷移する。 $(W^-$ の放出では、逆に下から上へと遷移する。)

弱い相互作用による反応の最も基本的な例としてベータ崩壊 $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ がある。この崩壊は、クォークモデルで言えば、 $n = (udd) \rightarrow p = (uud)$ であるから、

$$d_L \rightarrow u_L + W^- \rightarrow u_L + (e_L^- + \bar{\nu}_{eL})$$

として、弱い相互作用が起こったと解釈できる。

2.2.4 ニュートリノの主な発生源とその観測

ニュートリノの主な発生源とその実験的観測についてまとめる。以下の表 2.2 は、主に日本で行われている、様々な場所から発生したニュートリノとその観測法についてまとめたものである [15]。

表 2.2: 主なニュートリノの発生源とその観測

発生源	反応	ニュートリノ実験
太陽	核融合反応 $p+p+p+p \rightarrow He + 2(e^+ + \nu_e)$	太陽ニュートリノ実験 (スーパーカミオカンデなど)
大気	宇宙線の大気と衝突 π の生成と崩壊	太陽ニュートリノ実験 (スーパーカミオカンデなど)
超新星	重力エネルギーの放出	超新星ニュートリノ観測
原子炉	核分裂 $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$	カミオカンデ実験など
加速器	素粒子反応	原子炉ニュートリノ実験 カムランドなど 加速器実験

太陽ニュートリノ

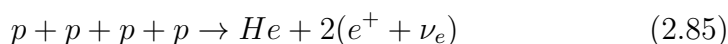
太陽が放出するエネルギーは、核融合反応によるものである。この生成過程は大きく分けて二種類ある。陽子 (p) 二個が核融合して重陽子 (^2H) が生成され、それに引き続く様々な反応で最終的にヘリウム (^4He) が生成される pp 反応、及び、太陽中に存在している、炭素、窒素、酸素といった原子の、原子核を触媒として陽子四個よりヘリウム一個が生成されるという CNO 過程である。

これまでに行われてきた、太陽ニュートリノ観測における重要な実験を、表 2.3 にまとめた [15]。

表 2.3: 太陽ニュートリノの観測実験

実験名	国	方法	エネルギー閾値	観測期間
Homestake	アメリカ	放射化学	814keV	1968-2001
カミオカンデ	日本	水チェレンコフ	7MeV	1987-1996
SAGE	ロシア	放射化学	233keV	1990-
GNO	イタリア	放射化学	233keV	1990-2003
スーパーカミオカンデ	日本	水チェレンコフ	5MeV	1996-
SNO	カナダ	重水チェレンコフ	5MeV	1996-

例えば、CNO 過程は



によって与えられる。ニュートリノは、弱い相互作用しか行わないので地球をほとんど透過してゆく。太陽から放出されるニュートリノは、理論上 ν_e だけのはずであるが、この観測値が理論値よりも少なかったことから、放出された ν_e が他のニュートリノ (ν_ν, ν_τ) に変わるという「ニュートリノ振動」の理論が提出され実験で確認された。現在では他の実験の結果とも照合して $\nu_e \rightarrow \nu_\tau$ 反応が起こったと考えられている。この現象を解析することにより二つのニュートリノ (ν_1, ν_2) の質量の二乗差 $\Delta m_{21}^2 \equiv m_2^2 - m_1^2$ 及び、それらの間の混合角 θ_{21} についての情報を得ることができる。

スーパーカミオカンデ

ニュートリノ観測の代表的な装置が、東京大学宇宙系研究所神岡宇宙素粒子研究施設の所有するニュートリノ検出装置、スーパーカミオカンデ (Super KAMIOKANDE) である。この装置は、岐阜県吉城郡神岡町の鉱山採掘城の跡地を利用して地下 1000m ほどの場所に建造された。歴史的には、はじめこの十分の一ほどのスケールのカミオカンデ (KAMIOKANDE) が 1983 年に設置され、超新星からのニュートリノ観測に成功するなど大きな成果を上げた。

前述したように、ニュートリノは弱い相互作用しかしないので、たとえ太陽から膨大な数のニュートリノが降り注いだとしても、実際に反応を起こすのはそのごく一部であることから必然的に観測機器そのものの

大きさが必要となる。スーパーカミオカンデさえ、太陽ニュートリノは1日10個程度しか捉えることはできない。

これらカミオカンデやスーパーカミオカンデは、大統一理論において預言される陽子崩壊を観測する目的で建造されたものである。その実験的解析は続けられているが、ここではニュートリノにのみ絞って述べる。この装置がニュートリノを観測できる原理として、装置内の巨大な水タンク内に飛び込んできたニュートリノは、水中の電子 e^- や陽子 p と衝突して、

$$\nu + e^- \rightarrow \nu + e^- \quad (2.86)$$

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n \quad (2.87)$$

といった反応を起こす。散乱断面積はほぼニュートリノのエネルギーに比例し、太陽ニュートリノに典型的な 10MeV のエネルギーを例にとれば、

$$\sigma = 8.96 \times 10^{-44} \frac{E_\nu}{10\text{MeV}} [\text{cm}^2] (\nu + e^- \rightarrow \nu_e + e^-) \quad (2.88)$$

$$\sigma = 1.57 \times 10^{-44} \frac{E_\nu}{10\text{MeV}} [\text{cm}^2] (\nu + \mu, \tau^- \rightarrow \nu_{\mu, \tau} + e^-) \quad (2.89)$$

よって、電子ニュートリノと電子の散乱断面積はミューニュートリノとタウニュートリのそれより6倍程度大きく、電子、ニュートリノ散乱実験では電子ニュートリノ以外も観測にかかる。

この時、微弱なチェレンコフ光が発生し、これをタンク内の壁に取り付けられた光電子増倍管が検出する。この装置の特徴は、従来の観測機では入射ニュートリノの方向を特定できなかったのに対し、上下四方の壁に取り付けた光検出機のシグナルをコンピュータ解析し、その入射方向まで算出できることである。

この放射は

$$\cos\theta = \frac{1}{n\beta} \quad (2.90)$$

(θ 荷電粒子の進行方向とチェレンコフ光のなす角、 n 物質の屈折率、 β 粒子の速度を真空中の光速で割った値) の関係で表される方向にのみ照射される。このことによって、そのニュートリノが、太陽から来たものかそれとも他の発生源から来たものか、区別して分析できるようになった。

大気ニュートリノ

宇宙線が宇宙から地球に飛来するとき、大気粒子と強い相互作用をすることにより、パイメソン (π) や K メソンを作り出す場合がある。こ

うして上空で作られした π^\pm は、

$$\begin{aligned}\pi^+ &\rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \\ \mu^+ &\rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu\end{aligned}\tag{2.91}$$

という崩壊を起こして地表に降り注ぐことになる。よって、このニュートリノが地表で観測される際には、 ν_μ 及び $\bar{\nu}_\mu$ の数 $N(\nu_\mu)$ と、 ν_e の数 $N(\nu_e)$ との比率 $N(\nu_\mu) : N(\nu_e)$ は 2:1 となることが予想される。これに対して実験値における $N(\nu_\mu) : N(\nu_e)$ の値は理論値と異なり、

$$\frac{[N(\nu_\mu)/N(\nu_e)]_{\text{観測}}}{[N(\nu_\mu)/N(\nu_e)]_{\text{理論}}} = 0.63 \pm 0.03 \pm 0.05\tag{2.92}$$

であった。このことは、生まれた ν_μ がニュートリノ振動によって別のニュートリノに変化したと考えることによって説明されている。

スーパーカミオカンデの特徴の一つは、ニュートリノの入射方向を特定できるということであった。このことは、観測された大気ニュートリノは、装置の直接上空で発生したものか、あるいは地球の反対側で発生して、地球を貫通して装置にやって来たものかの区別が可能であることを意味する。ニュートリノ振動では、ニュートリノのエネルギー E_ν とともに、その飛来距離 L が重要なパラメータとなる。地表から大気圏までの距離が約 10km、また地球の直径が約 12800km なので、これは $L=10\text{km}$ から $L=13000\text{km}$ にわたっての観測実験を行ったことを意味する。以下表 2.4 に、これまで行われた大気ニュートリノ観測の代表的なものをあげた [15]。

表 2.4: 大気ニュートリノの観測実験

実験名	国	方法	有効体積	観測期間
KGF	インド			1965-?
CWI	南アフリカ			1965-?
Baksan	ロシア	シンチレーター		1978-
IMB	アメリカ	水チェレンコフ	3.3 キロトン	1982-1991
カミオカンデ	日本	水チェレンコフ	1.0 キロトン	1983-1996
Frejus	フランス	鉄板+飛跡検出器	0.7 キロトン	1984-1988
MACRO	イタリア			1988-2001
Soudan-2	アメリカ	鉄板+飛跡検出器	0.77 キロトン	1989-2001
スーパーカミオカンデ	日本	水チェレンコフ	22.5 キロトン	1996-

超新星ニュートリノ

1987年、カミオカンデ実験装置は宇宙を15万年旅して地球にやってきた11個のニュートリノを捉えることに成功した。それは、大マゼラン星雲の中の一つの星が超新星となった際に放出されたものであったとされる。このたった11個のシグナルが、様々な貴重な情報をニュートリノ物理学にもたらした。恒星の発する熱や光は水素の核融合反応によるものである。この水素が燃え尽きると、生成物であるヘリウムが中心に溜まってコアを生成する。さらにこの中心でヘリウム同士が核融合を起こす。このように、それまでの核融合の生成物を燃料とした新たな核融合によって星は進化してゆく。

ここで、星の中央に鉄のコアが生成された時点で核融合は終わりを迎え、星の中心部は温度が100億度を超えるほどの高温になる。この時鉄の原子核は熱を吸収して分解される。このため、中心部は収縮されても圧力が充分高くないので、収縮は止まらず中心部の温度はさらに高くなる。ここで中心部の原子核の密度が原子核の密度を超えると、陽子や中性子に働く力が強い力による斥力となり、収縮が一気に止まり、衝撃波が生成される。この衝撃波が星の外層にある物質まで吹き飛ばすのが超新星爆発の原理である。この時、重力崩壊の起こっている星の中心部でニュートリノが生成され、鉄コアが中性子星になるとその重力エネルギー約 $10^{46} J$ が解放されるが、このエネルギーの殆どはニュートリノが持ち去る。このため、このニュートリノの観測は重力崩壊型超新星の性質を探るには不可欠であり、多くの理論的研究と観測がなされてきた。この代表的なものを表2.5に挙げる [15]。

表 2.5: 超新星ニュートリノの観測実験

実験名	国	方法	有効体積	観測期間
Bacsan	ロシア	液体シンチレーター	330 トン	1978-
LSD	フランス	液体シンチレーター	90 トン	1984-?
カミオカンデ	日本	水チェレンコフ	2140 トン	1983-1996
IMB	アメリカ	水チェレンコフ	5000 トン	1982-1991
LVD	イタリア	液体シンチレーター	670 トン	1992-
スーパーカミオカンデ	日本	水チェレンコフ	32000 トン	1996-
SNO	カナダ	水チェレンコフ (軽水+重水)	軽水 1600 トン 重水 1000 トン	1999-2006
カムランド	日本	液体シンチレーター	1000 トン	2002-

加速器ニュートリノと K2K 実験

太陽、大気、超新星ニュートリノは、すべて自然に発生したものであるが、人工的にニュートリノを作り出してそれを観測するという研究も行われている。その実験の一つとして「K2K 実験」がある。K2Kとは「from KEK to KAMIOKANDE」の略である。KEKはつくば市にある「高エネルギー加速器研究機構」の事である。このつくばにあるKEKで作出したニュートリノビーム ν_μ を 250km 先のスーパーカミオカンデで観測して ν_μ が理論計算値よりどの程度減少しているかを観測した。ここで、無論ニュートリノが走るのは地表ではなく、発生装置と観測装置を直線的に結ぶ地殻内部である。

原子炉ニュートリノとカムランド実験

前節で述べた K2K 実験は、大気ニュートリノの観測より示唆されたニュートリノ振動 $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ を、地上での実験によって確かめることが目的であった。同様に、太陽ニュートリノの観測より示唆されるニュートリノ振動 $\nu_e \rightarrow \nu_\tau$ を、地上での実験より確かめようとする試みが、Kam LAND 実験である。この名称は、「the Kamioka Liquid scintillator Anti-Neutrino Detector」の略称である。

この実験は、原子力発電所の原子炉 (reactor) の、核分裂反応の際の



によって、放出されるニュートリノ $\bar{\nu}_e$ を観測する。この実験結果もまた、太陽ニュートリノ観測データで得られたニュートリノ振動の予測が正しかったことを示している。

2.2.5 ニュートリノの質量

ニュートリノは、クォークや荷電レプトンなど他の素粒子と異なり、極端に小さな質量を持っている。本節では、この起源についての有力な説である、「シーソー機構」及び「輻射質量」について述べたい。まず、ニュートリノ以外の素粒子の質量を生成するヒッグズメカニズムの説明から行う。

ヒッグスメカニズム

場の量子論において、質量 m を持ったフェルミオン

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (2.94)$$

の質量項は、

$$m\bar{\psi}\psi = m(\bar{\psi}_R\psi + \bar{\psi}_L\psi_R) \quad (2.95)$$

と表せる。式 (2.95) は、粒子 $\psi_L(\psi_R)$ が、 $\psi_R(\psi_L)$ へと遷移する際の係数が質量 m であるという解釈をすることもできる。このように「質量」とは右巻き粒子と左巻き粒子がペアを組んで初めて成立する概念なのである。

この質量 m の起源として最も代表的な説は「ヒッグス機構」と呼ばれる質量生成メカニズムである。この理論では、もともと物質の質量はゼロであったと考える。その代わりに、真空と同じ量子数を持つスカラー粒子 $\phi(J^P = 0+)$ が存在すると考え、ハミルトニアン

$$H_{int} = y\bar{\psi}\psi\phi \quad (2.96)$$

で表される相互作用をしていると仮定する。このような相互作用を、一般に湯川相互作用と呼ぶ。式 (2.96) で表される相互作用では、スカラーボソン ϕ を放出、吸収する。

このような系に対して、ラグランジアンでは

$$\mathcal{L} = \partial^\mu\phi^*\partial_\mu\phi - V(\phi) \quad (2.97)$$

で表される複素スカラー場を考える。スカラーボソン ϕ のポテンシャル V_ϕ が、

$$V_\phi = \mu^2\phi^2 + \frac{1}{2}\lambda\phi^4 \quad (2.98)$$

で与えられているとする。ここで、 $\mu^2, \lambda > 0$ である場合、 V_ϕ は、 $V_\phi = \phi = 0$ で最低点を取るため、ここが最も安定したエネルギーということになる。このエネルギー最低の状態が「真空」の定義である。一方、 $\lambda > 0$ でも、 $\mu^2 < 0$ である場合を考える。この時、 V_ϕ は、

$$|\phi| = v = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} \quad (2.99)$$

となってしまう。これは、 $SU(2) \times U(1)$ 対称性が $U(1)$ に敗れたことを意味し、この時、真空は、 $|\phi| = 0$ ではなく、 $|\phi| = -\mu^2/\lambda$ であること

になる。そこで、新しく $|\phi\rangle = 0$ で現実の真空状態が実現されるよう、新しい場 ϕ' を、

$$\phi' = \phi - v \quad (2.100)$$

で定義することとする。ここで、式 (2.99) で定義された v の値のことを、 $\langle \phi \rangle$ と表し、「真空期待値」と呼ぶ。

式 (2.100) で定義した新しい場 ϕ' の真空期待値 $\langle \phi' \rangle$ は、

$$\langle \phi' \rangle = \langle \phi \rangle - v = 0 \quad (2.101)$$

となる。この新しい ϕ' を用いれば、先に定義した式 (2.96) の相互作用は、式 (2.100) により表される。こうして、 $\bar{\psi}\psi$ の係数がゼロ (=質量ゼロ) であったものに対して、スカラーボソン ϕ の真空期待値 $\langle \phi \rangle$ がゼロでないことによって、フェルミオン ψ は質量

$$m = yv \quad (2.102)$$

を持つことになる。

このように、真空の対称性が破れることを「自発的対称性の破れ」という。このようにして粒子に質量を与えるメカニズムを、考案者の名にちなんで「ヒッグス機構」と呼ぶ。そして、この役割を担うために導入されたスカラーボソンを「ヒッグス粒子」と呼ぶ。クォークや荷電レプトンの質量だけでなく、弱い相互作用を媒介するゲージボソンの質量も、この機構によって与えられたと考えられている。2013年、加速器実験によってこの粒子は存在が確認され、素粒子の質量問題に革新的な飛躍をもたらした。

シーソーメカニズム

なぜニュートリノの質量は、クォークや荷電レプトンに対して極めて小さいのであろうか。この疑問に対する一つの答えとして、1979年、Yanagida, Gell-Man, Rammond, Slansky らによって「シーソーメカニズム」というアイデアが提案された。

ニュートリノも ν_L と ν_R が対になることができれば、通常のクォークや荷電レプトンと同じように

$$m (\bar{\nu}_R \nu_L + \bar{\nu}_L \nu_R) \quad (2.103)$$

によって質量 m が持てる。だが右巻きニュートリノ ν_R は弱い相互作用をせず、 ν_R とその反粒子 $\bar{\nu}_R$ を区別する粒子数を持たない。そこで ν_R の反粒子をあらわす場を ν_R^c と表記すると、 ν_R と ν_R^c は対になって、

$$m (\bar{\nu}_R \nu_R^c + \bar{\nu}_R^c \nu_R) \quad (2.104)$$

の形で質量項を生成することができる。 ν_R^c は左巻き粒子の変換に従う。このように、粒子が自身で作る質量を「マヨラナ質量」と言い、これに対して、式 (2.103) で与えられるタイプの質量を「ディラック質量」という。式 (2.103) と式 (2.104) をまとめれば、

$$\mathbf{V}_\nu = (\bar{\nu}_L \bar{\nu}_R^c) \begin{pmatrix} 0 & m \\ m & M_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_R^c \\ \nu_R \end{pmatrix} \quad (2.105)$$

と表される。この式中のニュートリノ質量行列

$$M_\nu = \begin{pmatrix} 0 & m \\ m & M_R \end{pmatrix} \quad (2.106)$$

を、以下のように対角化する。

$$\begin{pmatrix} \bar{\nu}_R^c \\ \bar{\nu}_R \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \bar{\nu}'_L \\ (\bar{\nu}'_R)^c \end{pmatrix} \quad (2.107)$$

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (2.108)$$

$$\mathbf{V}_\nu = (\bar{\nu}_L \bar{\nu}_R^c) M_\nu \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^c \end{pmatrix} = (\bar{\nu}'_L \bar{\nu}'_R)^c M'_\nu \begin{pmatrix} \nu'_L \\ (\nu'_R)^c \end{pmatrix} \quad (2.109)$$

$$M'_\nu \equiv \begin{pmatrix} M'_{11} & 0 \\ 0 & M'_{22} \end{pmatrix} = U^T M_\nu U \quad (2.110)$$

この M'_ν の対角化の条件は、

$$\tan 2\theta = \frac{2m}{\sqrt{M_R^2 + 4m^2}} \quad (2.111)$$

で与えられ、この固有値は、

$$M'_{11} = \frac{1}{2}(M_R - \sqrt{M_R^2 + 4m^2}) \quad (2.112)$$

$$M'_{22} = \frac{1}{2}(M_R - \sqrt{M_R^2 + 4m^2}) \quad (2.113)$$

を得る。ここで $M_R \gg m$ である時、

$$\theta \simeq -\frac{m}{M_R} \quad (2.114)$$

$$M'_{11} \simeq -\frac{m^2}{M_R} \quad (2.115)$$

$$M'_{22} \simeq M_R \quad (2.116)$$

を得る。すなわち、 ν_R が十分大きなマヨラナ質量を持つ時、 ν_L もまた、ごく小さなマヨラナ質量 m^2/M_R を持つ。例えば、タウニュートリノ ν_τ のディラック質量がタウレプトンと同じ $m_\tau \simeq 2\text{GeV}$ であるとして、 $m_{\nu_\tau} \simeq 0.1\text{GeV}$ を与えるためには、

$$M_R \simeq 4 \times 10^{10}\text{GeV} \quad (2.117)$$

のマヨラナ質量を考えれば良い。大きな M_R を導入することにより m を小さな m^2/M_R に変えるため、このメカニズムは「シーソーメカニズム」と呼ばれている。

輻射メカニズム

前節において述べたシーソーメカニズムは、 ν_R の GeV オーダーのマヨラナ質量 M_R の存在によってディラック質量 m からニュートリノの小さな質量を生み出すというアイデアである。

これに対して、ニュートリノはディラック質量など持っていないのではないかという説もある。 ν_R は、もともと重力相互作用以外何の相互作用も行わない。したがって、そのような粒子は存在していないと考える。 ν_R が存在しないならば、 ν_L だけではディラック質量を持つことができない。加えて、 ν_L は e_L^- と対になって弱い相互作用を行うので、 ν_L にのみマヨラナ質量を持たせることもできないので、 ν_R の存在しない理論では、ニュートリノの質量は厳密にゼロとなる。

ところが1980年、荷電を持ったスカラーボソン h^+ が存在すれば、ニュートリノは ν_L から ν_L^c に遷移でき、微小なマヨラナ質量を持つことができる、という説が Zee によって提唱された。このようなメカニズムにより生まれた質量を輻射質量と呼ぶ。大統一理論の枠組みへの組み込みに関し

ては、シーソーメカニズムについては可能だが、輻射質量に関しては困難であると考えられている。しかし、超対称性の見方に立つと、右巻き荷電レプトン $e_{\bar{R}}$ に、超対称パートナーであるスカラーボソン $\tilde{e}_{\bar{R}}$ が存在することになり、この粒子を Zee が導入した h^- とみなすことも可能である。しかしこの場合も、このシナリオを大統一理論に組み込もうとすると、観測事実と異なる陽子崩壊が大きく起こる要因となってしまう。一般に、R パリティの破れを伴うモデルの大統一理論への組み込みは、極めて難しいと言われている。

第3章 ニュートリノ量子統計と 相対論的有効自由度 I : F.D.からM.B.へ

3.1 はじめに

本章より、初期宇宙における純粋フェルミ統計に従わないニュートリノの相対論的有効自由度についての研究結果を述べる。本章では、荷電レプトン l とクォーク q は純粋なフェルミ・ディラック統計に従うとして $\kappa_l = \kappa_q = +1$ とする。一方、ゲージボソン γ, W, Z, g とヒッグスボソン H は純粋なボース・アインシュタイン統計に従うとして $\kappa_{\gamma, W, Z, g} = \kappa_H = -1$ とする。一方、ニュートリノは純粋なフェルミ・ディラック統計 (F.D.) から純粋なマクスウェル・ボルツマン統計 (M.B.) の間の中間の統計に従うとする [16][17]。

第1章の序論でも述べた通り、ニュートリノは $\frac{1}{2}$ のスピンを持ちフェルミオンに分類されている。電子が $\frac{1}{2}$ のスピンを持ちフェルミ・ディラック統計に従うことが実験的にもほぼ疑いがないため [1]、ニュートリノも厳密にフェルミ統計に従うと考えることは自然にも思われる。しかしながら、ニュートリノが純粋なフェルミディラック統計に従わない可能性が完全に否定されたわけではない。ボース・アインシュタイン統計に従う可能性は二重 β 崩壊の実験等から完全に否定されているが [9]、このこと自体は、ニュートリノが純粋フェルミオンであることを意味するものではない。ニュートリノの持つ特性は他のスピン $\frac{1}{2}$ の粒子と大きく異なる。極めて小さい質量、大きな混合性、電氣的に中性であることなどである。ニュートリノのこのような特異性を考えると、電子とは異なりニュートリノについてはパウリの排他率が破られる可能性もある [4, 5, 6, 16, 17]。

本章の主題は、非純粋フェルミオンニュートリノが $T=500\text{GeV}$ (放射優勢時代の宇宙温度) で、相対論的有効自由度に与える影響について考察することにある。通常、超相対論的ボソンのエネルギー密度は超相対論的

フェルミオンのエネルギー密度を上回ると考えられてきた。だが我々の研究により、GeV スケールの温度の初期宇宙に大きなレプトン非対称がある場合には、相対論的有効自由度の大小関係が逆転する可能性があることが明らかになった。我々はまた、ニュートリノのケミカルポテンシャル μ_ν と縮退パラメータ $\xi_\nu = \mu_\nu/T$ の BBN 期の温度 $T \simeq 1\text{MeV}$ における束縛条件の考察も行った [18]。この縮退パラメータの考察から、有効ニュートリノ数 N_{eff} を導出した。我々は、標準模型外の粒子以外で $N_{eff} > 3$ を与える理論を説明する際には大きな縮退パラメータが必要であると結論した。

3.2 分布関数

任意の粒子 i に対する分布関数を

$$f_i(E) = \frac{1}{\exp(E - \mu_i)/T + \kappa} \quad (3.1)$$

とする。ここで g_i, E, μ_i, T はそれぞれ、粒子の内部自由度、エネルギー、ケミカルポテンシャル、温度である。また、統計パラメータ κ_i は、 $\kappa_i = 1$ がフェルミ・ディラック統計、 $\kappa_i = 0$ がマクスウェル・ボルツマン統計、 $\kappa_i = -1$ がボース・アインシュタイン統計にそれぞれ相当している [19]。

任意の粒子 i に対する数密度 n_i 、エネルギー密度 ρ_i 、圧力 P_i 、エントロピー密度 s_i は以下の式で与えられる [20]。

$$n_i = \frac{1}{2\pi} \int_{m_i}^{\infty} E(E^2 - m_i^2)^{1/2} f_i dE \quad (3.2)$$

$$\rho_i = \frac{1}{2\pi} \int_{m_i}^{\infty} E^2(E^2 - m_i^2)^{1/2} f_i dE \quad (3.3)$$

$$P_i = \frac{1}{2\pi} \int_{m_i}^{\infty} (E^2 - m_i^2)^{3/2} f_i dE \quad (3.4)$$

$$s_i = \frac{\rho_i + P_i - \mu_i n_i}{T} \quad (3.5)$$

ここで、 m_i は粒子の質量である。なお、エントロピー密度は

$$s_i = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} [f_i \ln f_i + \kappa_i(1 - \kappa_i f_i) \ln(1 - \kappa_i f_i)] d^3p \quad (3.6)$$

で求めることも可能である。

3.3 レプトン非対称性と相対論的有効自由度

純粋なフェルミオンもしくは ($\kappa_i = 1$) ボソン ($\kappa_i = -1$) のみが存在する場合のエネルギー密度の総和は以下の式で与えられる。

$$\rho^{m_i=\mu_i=0} = \sum_i \rho_i^{m_i=\mu_i=0} = \frac{\pi^2 T^4}{30} g_*^{m_i=\mu_i=0} \quad (3.7)$$

質量がなく量子効果を無視できる粒子 $g^{m_i=\mu_i=0}$ の相対論的有効自由度が、良く見る以下の形になる。[20]

$$g_*^{m_i=\mu_i=0} = \sum_{i=\text{bosons}} g_i + \frac{7}{8} \sum_{i=\text{fermions}} g_i \quad (3.8)$$

我々は、この一般的な相対論的自由度を拡張して、 $g_* = g_*(m_i, \kappa_i, \mu_i)$ を m_i, κ_i, μ_i を用いて

$$g_* = \frac{30}{\pi^2 T^4} \rho \quad (3.9)$$

とする。ここで、 $\rho = \sum_i \rho_i(m_i, \kappa_i, \mu_i)$ である。

エネルギー密度 ρ の総和は、全粒子のケミカルポテンシャル μ_i から確定できる。我々は Stuke らのケミカルポテンシャルの決定方法を採用した [10]。まず、任意の粒子 i とその反粒子 \bar{i} のケミカルポテンシャルの値は等しいが符号は逆である $\mu_i = -\mu_{\bar{i}}$ 。次に、弱い相互作用を介したダウンクォーク d の β 崩壊 $d \rightarrow u + f + \bar{\mu}_f$ より $\mu_u + \mu_f = \mu_d + \mu_{\nu_f}$ を得る。また、クォークのケミカルポテンシャルは $\mu_u = \mu_c = \mu_t$ かつ $\mu_d = \mu_s + \mu_{\nu_f}$ とする。最後に全てのゲージボソンとヒッグズボソンのケミカルポテンシャルは考慮しない。すなわち $\mu_\gamma = \mu_W = \mu_Z = \mu_g = \mu_H = 0$ とする。

以上から、独立なケミカルポテンシャルの数は5つである。この5つの独立したケミカルポテンシャルとして、 $\mu_{\nu_e}, \mu_{\nu_\mu}, \mu_{\nu_\tau}, \mu_u, \mu_d$ を採用する。これら5つのポテンシャルは次の保存則に基づいて決定できる。

$$sq = - \sum_{i=e,\mu,\tau} n_i + \frac{2}{3} \sum_{i=u,c,t} n_i - \frac{1}{3} \sum_{i=d,s,b} n_i \quad (3.10)$$

$$sb = \frac{1}{3} \sum_{i=\text{quarks}} n_i \quad (3.11)$$

$$sl_f = n_f + n_{\nu_f}, f = e, \mu, \tau \quad (3.12)$$

ここで、 $s = \sum_i s_i$ と q はそれぞれエントロピー密度の総和と宇宙の全電荷である。また、バリオン数 b とレプトンフレーバー数 l_f は以下のように与えられる。

$$b = \frac{n_b - n_{\bar{b}}}{s}, l_f = \frac{n_f - n_{\bar{f}} + n_{\nu_f} - n_{\bar{\nu}_f}}{s} \quad (3.13)$$

ここで、 n_b と $n_{\bar{b}}$ はバリオンと反バリオンの数密度を示し、式 (3.10) (3.12) は、電荷の保存則、バリオン数の保存則、レプトンフレーバーの保存則を表す。レプトン非対称が GeV スケールであるときは計算結果が観測結果と矛盾なく合致するので、我々のシナリオでもレプトン非対称は GeV スケールであると仮定する。なお、ニュートリノ振動によって初期宇宙でのレプトンフレーバー数は等しくなる ($l_e = l_\mu = l_\tau$) ことが期待される。本論でもレプトン非対称は ($l = l_e = l_\mu = l_\tau$) であるとする [21, 22, 23, 24]。

荷電レプトン l とクォーク q は純粋なフェルミ・ディラック統計に従うとして $\kappa_l = \kappa_q = +1$ とする。一方、ゲージボソン γ, W, Z, g とヒッグスボソン H は純粋なボース・アインシュタイン統計に従うとして $\kappa_{\gamma, W, Z, g} = \kappa_H = -1$ とする。一方、ニュートリノは純粋なフェルミ・ディラック統計から純粋なマクスウェル・ボルツマン統計の間の中間の統計に従うとする。この場合、相対論的有效自由度は

$$g_* = g_*(m_i = \mu_i = 0) + \Delta g_*(\kappa_\nu = 0, \mu_i \neq 0) + \Delta g_*(\kappa_\nu \neq 0, \mu_i \neq 0) \quad (3.14)$$

となる。ここで $g_*(m_i = \mu_i = 0)$ は、式 (3.8) で表される通常相対論的有效自由度である。 $\Delta g_*(\kappa_\nu = 0, \mu_i \neq 0)$ は $g_*(m_i = \mu_i = 0)$ からのずれであり [10] で示されたゼロでないレプトン非対称を与えるものである。式 (3.14) 右辺第三項の $\Delta g_*(\kappa_\nu \neq 0, \mu_i \neq 0)$ は、相対論的有效自由度 g_* への新たな寄与である。

エネルギー密度 ρ_i を数値計算するために、ガウス・ラゲール積分法を用いた。

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} F(x) dx = \sum_{j=1}^N \omega_j F(x_j) \quad (3.15)$$

ここで ω_j は“ガウス・ラゲールの重み”である [25, 26]。我々の計算では $\alpha = 0, N = 50$ を選んだ。ガウス・ラゲール法を用いて ρ を求めるためには積分範囲を変える必要がある。式 (3.3) は

$$\rho_i = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty T(Tx + m_i)^2 [(Tx + m_i)^2 - m_i^2]^{1/2} f_i dx \quad (3.16)$$

とする。ここで、 $x = (E - m_i)/T$ とおくと分布関数は、

$$f_i = \frac{g_i}{e^{(Tx+m_i-\mu_i)/T} + \kappa_i} \quad (3.17)$$

となる。同様に数密度 n_i と圧力 P_i は以下のようになる。

$$n_i = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty T(Tx + m_i)[(Tx + m_i)^2 - m_i^2]^{1/2} f_i dx \quad (3.18)$$

$$P_i = \frac{1}{6\pi^2} \int_0^\infty T[(Tx + m_i)^2 - m_i^2]^{3/2} f_i dx \quad (3.19)$$

ニュートリノ以外のすべての粒子の質量は、パーティクルデータグループの数値を採用した [27]。ニュートリノ質量の直接的な観測にはまだ成功していない。宇宙論的なニュートリノ質量の制約は $\sum m_\nu < 0.21 - 1.11\text{eV}$ である [28]。我々は、ニュートリノ質量は全て等しく $m_\nu = m_{\nu_e} = m_{\mu_\mu} = m_{\mu_\tau} = 1\text{eV}$ であると仮定する。

粒子のケミカルポテンシャルを得るために (3.10) (3.12) の非線形連立方程式をブロイデン法を用いて解いた [25, 26]。式 (3.10) では電氣的に中性な宇宙を考え $q = 0$ とする。バリオン数は式 (3.11) で $b = 9 \times 10^{-11}$ に固定した [29]~[31]。バリオン数の詳しい値ではなく桁数のみが本論において重要である。初期宇宙におけるレプトンフレーバー数がまだ確立されていないので、本論ではフリーパラメーター $\ell = \ell_e = \ell_\mu = \ell_\tau$ とした。

図 3.1 は、相対論的有効自由度 g_* と温度 T の関係を示したものである。図 3.1 では $\ell = 0, \ell = 0.01, \ell = 0.03$ の場合の数値計算の結果を表した。 $\kappa_\mu = 1, 0.5, 0$ に対応する $\ell = 0.03$ の三つの曲線がある。 $\ell = 0, 0.01$ は互いに重なり合っている。図 3.2 は $\ell = 0$ の場合の詳細を表している。式 (3.7) (3.8) で $7/8$ の係数のもとでは純粋なボソン ($\kappa_i = -1$) の方が純粋なフェルミオン ($\kappa_i = 1$) よりもエネルギー密度が高くなることを示している。ここで、ニュートリノが純粋なフェルミオンでない ($\kappa_\nu \neq 1$) ならば、式 (3.9) に示される相対論的有効自由度の増加に伴って、エネルギー密度の増加が見られるはずである。実際に、図 3.1 で示されるようなレプトン非対称のない時、マクスウェル・ボルツマン分布にしたがうニュートリノ ($\ell = 0, \kappa_\nu = 0$) の相対論的有効自由度は、フェルミ・ディラック統計にしたがう場合 ($\ell = 0, \kappa_\nu = 1$) より大きくなる $g_*^{\ell=0, \kappa_\nu=0} > g_*^{\ell=0, \kappa_\nu=1}$ 。しかしながら図 3.1 で示したように $\ell = 0.03$ ほどの大きなレプトン非対称のある場合、マクスウェル・ボルツマン分布にしたがうニュートリノ ($\ell = 0.03, \kappa_\nu = 0$) を含む場合の相対論的有効自由度は、フェルミ・ディラック統計にしたがう場合 ($\ell = 0.03, \kappa_\nu = 1$) よりも小さくなる $g_*^{\ell=0.03, \kappa_\nu=0} < g_*^{\ell=0.03, \kappa_\nu=1}$ 。

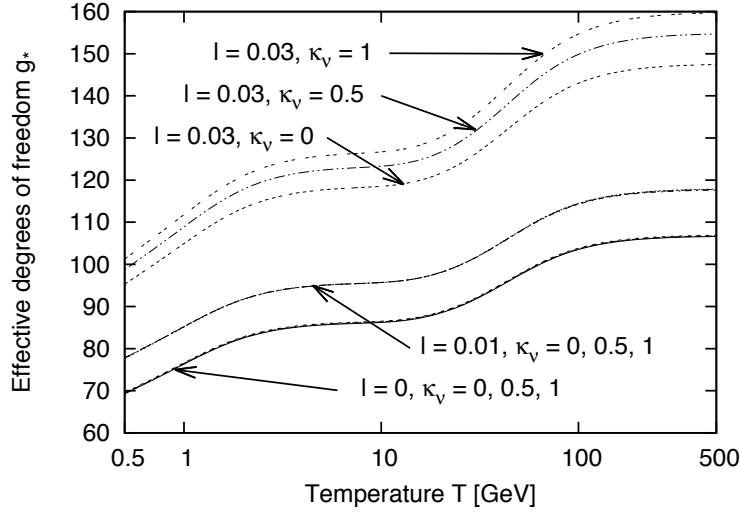


図 3.1: 相対論的有効自由度の変化

図 3.3 は相対論的有効自由度 g_* とレプトンフレーバー数 l の関係を示したものである。図 3.3 は $T = 0.5\text{GeV}$ の場合、図 3.4 は $T = 500\text{GeV}$ の場合の計算結果を示している。

$T = 0.5\text{GeV}$ の場合は、 $l^{eq} \sim 0.0112$ で $g_*^{\kappa_\nu=1}$ と $g_*^{\kappa_\nu=0}$ が一致する。 $l \leq l^{eq}$ では $g_*^{\kappa_\nu=1} \leq g_*^{\kappa_\nu=0}$ となり $l \geq l^{eq}$ では $g_*^{\kappa_\nu=1} \geq g_*^{\kappa_\nu=0}$ となる。

また、 $T = 500\text{GeV}$ では、レプトンフレーバー数が $l^{eq} \sim 0.0087$ であるとき、 $T = 5\text{GeV}$ の場合よりも有効ニュートリノ数が小さくなる。 $0.5 \leq T[\text{GeV}] \leq 500$ の範囲で $0.0087 \leq l^{eq} \leq 0.0112$ の範囲の等価なレプトンフレーバー数は、温度 T の増加に伴って減少している。相対論的有効自由度 g_* の増加がエネルギー密度 ρ の増加及び分布関数 $f_i(E) = \frac{1}{\exp(E-\mu_i)/T+\kappa}$ によって起こる。レプトン非対称がなく ($l = 0$)、ニュートリノのケミカルポテンシャルも無視でき $\mu_\nu = 0$ 、かつ小さい κ_ν が大きな f_ν 及び g_* を生んでいるとき、 $g_*^{\kappa_\nu=0} > g_*^{\kappa_\nu=1}$ となる。さらに、レプトン非対称がゼロでなく $l \neq 0$ 、小さい κ_ν が高い g_* を生んでいるときケミカルポテンシャル μ_ν は一定になる。言い換えればケミカルポテンシャル μ_ν が κ_ν と独立かつ一定なら、 $g_*^{\mu_\nu=const, \kappa_\nu=0} > g_*^{\mu_\nu=const, \kappa_\nu=1}$ の関係を得る。我々は常に純粋なフェルミオンとしてのニュートリノ ($\kappa_\nu = 1$) を想定しているので、常に一定のケミカルポテンシャル μ_ν とレプトン数 l を得ている。しかしながら、フェルミ・ボースパラメーター κ_ν によって $\kappa_\nu = 1$ から $\kappa_\nu \neq 1$ に変更を施したとき、レプトン数が一定であったとしても、ケミカルポテ

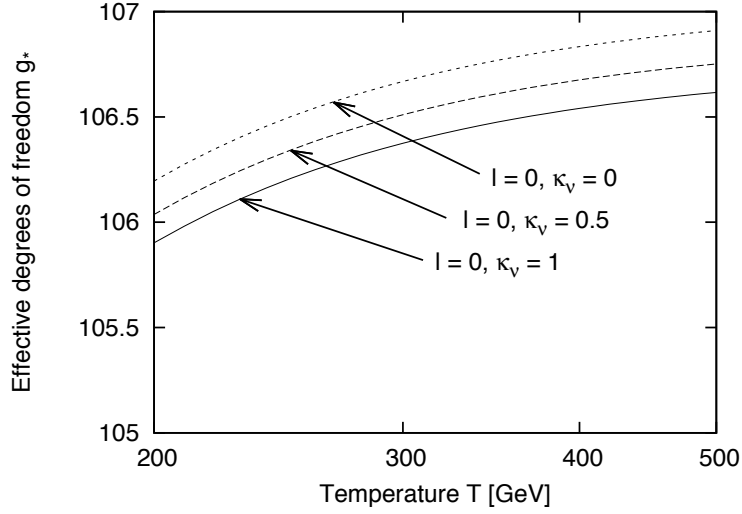


図 3.2: 相対論的有効自由度の増加

表 3.1: 電子ニュートリノの化学ポテンシャルとエネルギー密度

	$l = 0$		$l = 0.01$		$l = 0.03$	
κ_ν	μ_{ν_e}	$\rho_{\nu_e} + \rho_{\bar{\nu}_e}$	μ_{ν_e}	$\rho_{\nu_e} + \rho_{\bar{\nu}_e}$	μ_{ν_e}	$\rho_{\nu_e} + \rho_{\bar{\nu}_e}$
1	0	0.0359	0.318	0.0848	0.903	0.191
0.5	0	0.0369	0.299	0.0863	0.829	0.184
0	0	0.0379	0.277	0.0879	0.732	0.173

ンシャル μ_ν が κ_ν とともに一定ではなくなる。小さい κ_ν は大きな f_ν を生み、小さい μ_ν は小さな f_ν を生む。この場合 $g_*^{\mu_\nu=const, \kappa_\nu=0} > g_*^{\mu_\nu=const, \kappa_\nu=1}$ となる保証はなく、 $g_*^{\mu_\nu \neq const, \kappa_\nu=0} < g_*^{\mu_\nu \neq const, \kappa_\nu=1}$ となる可能性もある。 μ_ν の f_ν に対する影響が極めて大きいとき、エネルギー密度は減少する場合がある。これが、我々が図 3.1 において $g_*^{\ell=0.003, \kappa_\nu=0} < g_*^{\ell=0.003, \kappa_\nu=1}$ を示した理由である。 $g_*^{\ell=0.003, \kappa_\nu=0} < g_*^{\ell=0.003, \kappa_\nu=1}$ の関係についてより具体的に考察するために、我々は明確な例を挙げる。表 3.1 に示したのは、 $T = 0.5 \text{ GeV}$ における電子ニュートリノのケミカルポテンシャル μ_{ν_e} とエネルギー密度 $\rho_{\nu_e} + \rho_{\bar{\nu}_e}$ の数値である。表 3.1 におけるエネルギー密度 $\rho_{\nu_e} + \rho_{\bar{\nu}_e}$ の振る舞いは、図 3.1 に示した相対論的有効自由度 g_* の振る舞いと合致している。レプトン数 $l = 0.01$ または $l = 0.03$ が一定だとしても、ケミカルポテンシャル μ_{ν_e} と κ_ν は一定ではない。 $l = 0.03$ のとき $(\mu_{\nu_e}^{\kappa_\nu=1}, \mu_{\nu_e}^{\kappa_\nu=0.5}, \mu_{\nu_e}^{\kappa_\nu=0}) = (0.903, 0.829, 0.732)$ であり、 $\mu_{\nu_e}^{\kappa_\nu=1} > \mu_{\nu_e}^{\kappa_\nu=0.5} >$

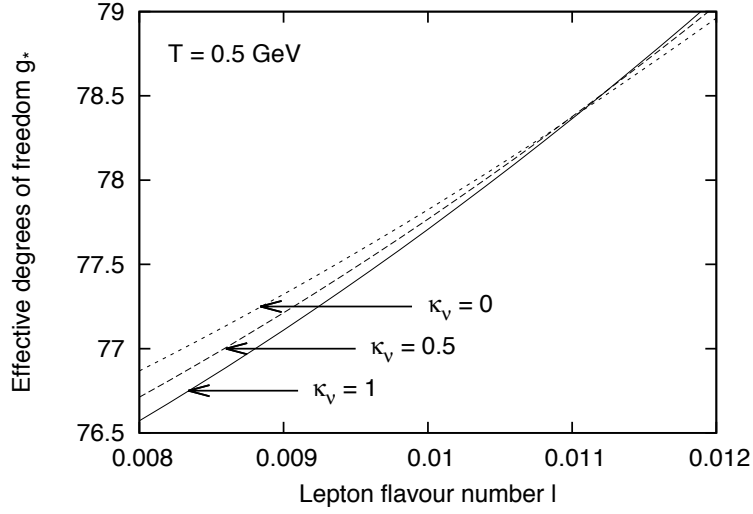


図 3.3: 有効自由度とレプトン数 $T=0.5\text{GeV}$

$\mu_{\nu_e}^{\kappa=0}$ である。

我々は、これらニュートリノのケミカルポテンシャルの $\mu_{\nu_e}^{\kappa=1} > \mu_{\nu_e}^{\kappa=0.5} > \mu_{\nu_e}^{\kappa=0}$ という振る舞いを、現象論的にも、半数値計算的にも評価することができる。GeV スケールにおいて、ニュートリノを含む粒子 i は、ほぼ相対論的 ($m_i \ll T$) であるとみなすことができる。質量を無視できる粒子 i に対して正味の数密度はフェルミ・ディラック統計の場合

$$(n_i - n_{\bar{i}})_{\kappa=1} = \frac{g_i T^3}{6\pi^2} \left[\pi^2 \left(\frac{\mu_i^{\kappa=1}}{T} \right) + \left(\frac{\mu_i^{\kappa=1}}{T} \right)^3 \right] \quad (3.20)$$

となり、マクスウェル・ボルツマン分布の場合

$$(n_i - n_{\bar{i}})_{\kappa=0} = \frac{g_i T^3}{6\pi^2} (e^{\mu_i^{\kappa=0}/T} - e^{-\mu_i^{\kappa=0}/T}) \quad (3.21)$$

となる [20, 32]。ここで議論を単純化するためにニュートリノのみを仮定し他の粒子の影響を一切無視しよう。この場合には、フェルミ・ディラック統計に対して $sl_\nu = (n_\nu - n_{\bar{\nu}})_{\kappa=1}$ 、マクスウェル・ボルツマン統計に対して $sl_\nu = (n_\nu - n_{\bar{\nu}})_{\kappa=0}$ の保存則が与えられる。この2つが等しくなる時 $(n_\nu - n_{\bar{\nu}})_{\kappa=1} = (n_\nu - n_{\bar{\nu}})_{\kappa=0}$ すなわち

$$\pi^2 \left(\frac{\mu_\nu^{\kappa=1}}{T} \right) + \left(\frac{\mu_\nu^{\kappa=1}}{T} \right)^3 = 6(e^{\mu_\nu^{\kappa=0}/T} - e^{-\mu_\nu^{\kappa=0}/T}) \quad (3.22)$$

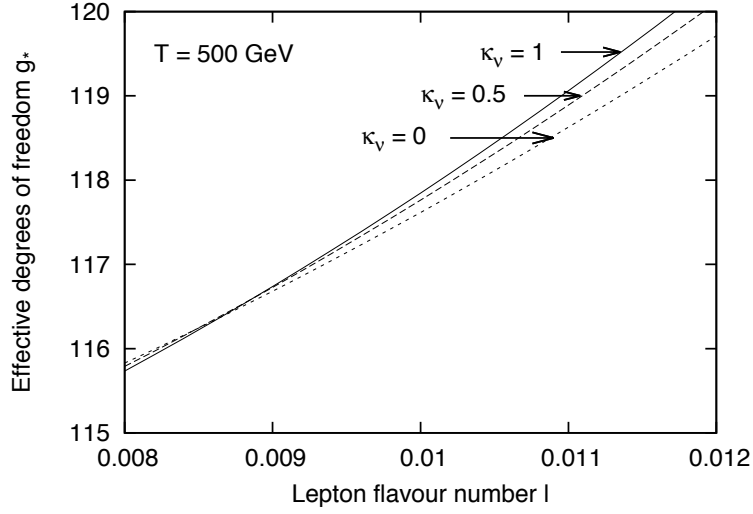


図 3.4: 有効自由度とレプトン数 $T=500\text{GeV}$

は、 sl_ν が一定であるとき可能となる [33]。ここで我々は sl_ν が一定であるとき $\mu_\nu^{\kappa=1} > \mu_\nu^{\kappa=0}$ となる結果を得ている。実例として $T = 0.5$ であるとき $l = 0.01$ で $(\mu_{\nu_e}^{\kappa=1}, \mu_{\nu_e}^{\kappa=0}) = (0.318, 0.277)$, $l = 0.03$ で $(\mu_{\nu_e}^{\kappa=1}, \mu_{\nu_e}^{\kappa=0}) = (0.903, 0.732)$ になる (表 3.1)。よって、 $(n_\nu - n_{\bar{\nu}})_{\kappa=1} = (n_\nu - n_{\bar{\nu}})_{\kappa=0}$ の条件をおおよそ満たしている。

質量を無視できる粒子の、エネルギー密度はフェルミ・ディラック統計の場合

$$(\rho_i - \rho_{\bar{i}})_{\kappa=1} = \frac{\pi^2 g_i T^3}{15} \left[\frac{7}{8} + \frac{15}{4} \left(\frac{\mu_i^{\kappa=1}}{\pi T} \right)^2 + \frac{15}{8} \left(\frac{\mu_i^{\kappa=1}}{\pi T} \right)^4 \right] \quad (3.23)$$

となり、マクスウェル・ボルツマン分布の場合

$$(\rho_i - \rho_{\bar{i}})_{\kappa=0} = \frac{3g_i T^4}{\pi^2} (e^{\mu_i^{\kappa=0}/T} - e^{-\mu_i^{\kappa=0}/T}) \quad (3.24)$$

となる [20, 32]。ここで、ケミカルポテンシャルが一定で $\kappa_\nu, \mu_i^{\kappa=1} = \mu_i^{\kappa=0}$ であるとき、マクスウェル・ボルツマン統計にしたがう場合の方が、フェルミ・ディラック統計にしたがう場合よりもエネルギー密度が大きくなる $(n_\nu - n_{\bar{\nu}})_{\kappa=0} > (n_\nu - n_{\bar{\nu}})_{\kappa=1}$ ことが我々の調査で分かった。一方、 $\mu_\nu^{\kappa=0} < \mu_\nu^{\kappa=1}$ であるとき、 $(n_\nu - n_{\bar{\nu}})_{\kappa=0} \leq (n_\nu - n_{\bar{\nu}})_{\kappa=1}$ もまた可能となることが表 (3.1) で示されている。

3.4 有効ニュートリノ数

温度 $T \simeq 1\text{MeV}$ (BBN 周辺) でのニュートリノの縮退パラメータ $\xi_{\nu_f} = \mu_{\nu_f}/T$ とフェルミ・ボースパラメーター κ_{ν} は、BBN における有効ニュートリノ数 N_{eff} に影響を及ぼす。

純粋なフェルミオンとしてのニュートリノ $\kappa_{\nu} = +1$ であるとき、有効ニュートリノ数 N_{eff} は、 ξ_{ν_f}

$$N_{eff} = 3 + \frac{30}{7} \sum_f \left[\left(\frac{\xi_{\nu_f}}{\pi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\xi_{\nu_f}}{\pi} \right)^4 \right] \quad (3.25)$$

となる [10]。これは、ニュートリノが瞬時に脱結合すると仮定した場合の式である (再加熱時の e^+e^- 対消滅効果を含めると、 $\xi_{\nu_f} = 0$ での有効ニュートリノ数は 3 ではなく $N_{eff} = 3.046$ となる)。一方で、有効ニュートリノ数 N_{eff} は放射を構成するエネルギー密度 ρ_R に依存する。これは、光子 ρ_γ とニュートリノ $\rho_R = \sum_f \rho_{\nu_f}$ を用いて、

$$\rho_R = \left[1 + \frac{7}{8} \left(\frac{T_\nu}{T} \right)^4 N_{eff} \right] \rho_\gamma = \rho_\gamma + \rho_\nu \quad (3.26)$$

である。ここで $\rho_\gamma = (\pi^2/30)g_\gamma T^4$ であり $g_\gamma = 2$ である。この有効ニュートリノ数 N_{eff} は、ニュートリノと光子のエネルギー密度の比

$$N_{eff} = \frac{\rho_\nu}{\frac{7}{8} \left(\frac{T_\nu}{T} \right)^4 \rho_\gamma} \quad (3.27)$$

を決めるのに重要であり、 N_{eff} は ρ_ν と同様縮退パラメーター ξ_{ν_f} に依存する。もしここで、標準模型にはない相対論的粒子が介在するならば、ニュートリノのエネルギー密度もそれを含んだものにならなくてはならない。

図 3.5 は、ニュートリノの縮退パラメーター ξ_ν とフェルミ・ボースパラメーター κ_ν の関係を示したものである。図 3.5 の 6 本の曲線は下から順に $N_{eff} = 3.01, 3.05, 3.1, 3.2, 3.4, 4.0$ に対する ξ_ν の計算結果を示している。

BBN で生成された粒子は、ニュートリノのケミカルポテンシャルと有効ニュートリノ数の強い制限を受ける。例えば、近年の BBN における有効ニュートリノ数の考察の結果において、 $N_{eff} = 3.71^{+0.47}_{-0.45}$ という結果が出ている [34]。一方で、特殊な例では、ケミカルポテンシャルは ($|\xi_\nu| < 0.07$) の制限を受ける。図 3.5 で示した、すべてのニュートリノの大きな縮退パ

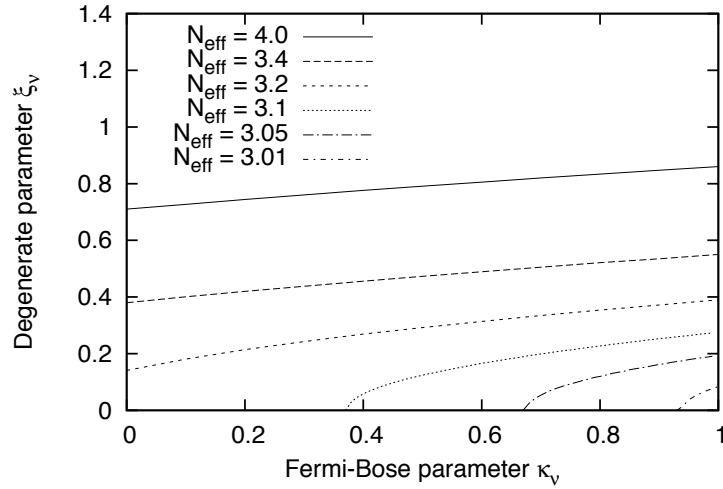


図 3.5: 縮退パラメーターと統計パラメーター

ラメーターは、有効ニュートリノ数の過剰を説明するためには、非標準模型の粒子を含まずに $N_{\text{eff}} > 3$ を要求している。すなわち、フェルミ・ディラック統計からマクスウェル・ボルツマン統計への統計性の変更では有効ニュートリノ数の過剰を説明できない。このことは、もし $N_{\text{eff}} > 3$ ならダーク放射には非標準模型の粒子を含むことを示唆している。

3.5 まとめ

本章の内容をまとめておく。我々は、ニュートリノが純粋なフェルミ・ディラック統計に従うのではなく、純粋なフェルミ・ディラック統計 (F.D.) から純粋なマクスウェル・ボルツマン統計 (M.B.) の間の中間の統計に従うとした。そして、初期宇宙 (0.5 ~ 500 GeV の温度) における非純粋フェルミオンであるニュートリノと相対論的有効自由度の関係について考察した。

通常、放射優勢期におけるエネルギー密度はニュートリノのフェルミ・ディラック統計からのずれに伴って増加する。しかしながら、我々は GeV スケールの宇宙で大きなレプトン非対称があるときは、ニュートリノのフェルミ・ディラック統計からのずれに伴って相対論的有効自由度が減少することを示した。

すなわち、相対論的有効自由度はエネルギー密度の増加に従って増加し、エネルギー密度は分布関数 $f_i(E) = \frac{1}{\exp(E-\mu_i)/T+\kappa}$ の増加に従って増加する。フェルミ・ボースパラメータ κ_ν を、 $\kappa_\nu = 1$ より $\kappa_\nu \neq 1$ に連続的に変化させると、レプトン数が一定であったとしても、ケミカルポテンシャル μ_ν 、及び κ_ν は一定ではなくなる。小さな κ_ν は大きな f_ν を生み、また小さな μ_ν は小さな f_ν を生む。 f_ν に対して μ_ν が影響を持つ時、エネルギー密度も相対論的有効自由度も減少する。

我々はまた、温度が $T \simeq 1\text{MeV}$ (BBN 周辺の温度) であるときのフェルミ・ボースパラメータ κ_ν と縮退パラメータ $\xi_{\nu_f} = \mu_{\nu_f}/T$ についても考察した。その結果、ニュートリノの統計性がフェルミ・ディラック統計からマクスウェル・ボルツマン統計へ変化するだけでは、有効ニュートリノ数の過剰 ($N_{eff} > 3$) を説明できなことが明らかになった。このことは、初期宇宙のダーク放射には非標準模型の粒子を含むことを示唆している。

本章では、 $0 \leq \kappa_i \leq 1$ を想定した。もし、さらに低い値 $\kappa_\nu < 0$ (ボソンに近いニュートリノ) がみとめられるのなら、ケミカルポテンシャルの最大値は、 f_ν が負数でなくなる可能性があるので、 $\mu_\nu^{(max)} = m_\nu - T \ln(-\kappa_\nu)$ となる。次章においてこの場合のケミカルポテンシャルと相対論的有効自由度の関係についても考察する。

第4章 ニュートリノ量子統計と 相対論的有効自由度II： F.D.からB.E.へ

4.1 はじめに

前章で我々は、ニュートリノが初期宇宙における相対論的有効自由度 g_* に与える影響について、ニュートリノの統計性をフェルミ・ディラック統計 (FD) からマクスウェル・ボルツマン統計 (MB) まで変化すると仮定して考察した。

本章ではさらにこの統計性の変化を拡張し、ニュートリノの統計性がフェルミ・ディラック統計 (FD) からマクスウェル・ボルツマン統計 (MB) を介してボース・アインシュタイン統計 (BE) まで変化できるものとして議論する。

まず次の4.2節では、ニュートリノの統計性がフェルミ・ディラック統計 (FD)、マクスウェル・ボルツマン統計 (MB)、ボース・アインシュタイン統計 (BE) のどれかに一致している場合について議論する。これは、分布関数の統計パラメータを離散的に変更することを意味している。続く4.3節では、ニュートリノの統計性がフェルミ・ディラック統計 (FD) からマクスウェル・ボルツマン統計 (MB) を経てボース・アインシュタイン統計 (BE) へ連続的に変化する場合について議論する。これは、分布関数の統計パラメータを連続的に変更することを意味している。この場合には、例えばニュートリノにはマクスウェル・ボルツマン統計 (MB) とボース・アインシュタイン統計 (BE) の中間の統計も許される。なお、あらかじめ4.2節でニュートリノが3つの量子統計のどれかに一致する場合を議論しておくことで、4.3節での分布関数が連続変化した場合の考察が容易になる。

4.2 分布関数の形を離散的に変化させた場合

4.2.1 分布関数

ニュートリノの分布関数が、フェルミ・ディラック統計 (FD), マクスウェル・ボルツマン統計 (MB), ボース・アインシュタイン統計 (BE) のどれかに一致しているとする。分布関数は

$$f_i = \frac{g_i}{e^{(E_i - \mu_i)/T + \Theta_i}} \quad (4.1)$$

である。ここでパラメータ $\Theta_i = 1, 0, -1$ がそれぞれフェルミ・ディラック統計、マクスウェル・ボルツマン統計、ボースアインシュタイン統計に対応する [35]~[43]。

超相対論的な粒子 ($m_i \ll T$) の正味の数密度 $\tilde{n}_i = n_i - n_{\bar{i}}$ 及び正味のエネルギー密度 $\tilde{\rho}_i = \rho_i - \rho_{\bar{i}}$ は以下のように与えられる [18, 20, 32, 44, 45, 46]。

$$\tilde{n}_i^{FD} = \frac{g_i T^3}{6\pi^2} [p_i^2 \xi_i^{FD} + (\xi_i^{FD})^3] \quad (4.2)$$

$$\tilde{n}_i^{MB} = \frac{g_i T^3}{\pi^2} (e^{\xi_i^{MB}} - e^{-\xi_i^{MB}}) \quad (4.3)$$

$$\tilde{n}_i^{BE} = \frac{g_i T^3}{3} \xi_i^{BE} \quad (4.4)$$

$$\tilde{\rho}_i^{FD} = \frac{\pi^2 g_i T^3}{6\pi^2} \left[\frac{7}{8} + \frac{15}{4} \left(\frac{\xi_i^{FD}}{\pi} \right)^2 \right] \quad (4.5)$$

$$\tilde{\rho}_i^{MB} = \frac{3g_i T^4}{\pi^2} (e^{\xi_i^{MB}} + e^{-\xi_i^{MB}}) \quad (4.6)$$

$$\tilde{\rho}_i^{BE} = \frac{\pi^2 g_i T^4}{15} \left[1 + \frac{15}{2} \left(\frac{\xi_i^{BE}}{\pi} \right)^2 \right] \quad (4.7)$$

我々は、BE統計に従う粒子 i のケミカルポテンシャルは、 $\mu_i^{BE} \leq \mu_i^{BE,max} = m_i$ の束縛を受けているとした。なぜなら、 f_i は負数にはなりえないからである。言い換えれば、ボソンの縮退パラメータは、

$$\xi_i^{BE} \leq \xi_i^{BE,max} = \frac{\mu_i^{BE,max}}{T} = \frac{m_i}{T} \quad (4.8)$$

となる。よって超相対論的な純粋ボソンの縮退パラメータは無視して良い。例えば $T = 0.5 - 500 \text{ GeV}, m_\nu = 1 \text{ eV}$ で $2 \times 10^{-12} \leq \xi_\nu^{BE,max} \leq 2 \times 10^{-9}$ を得る。初期宇宙の、純粋ボソンの縮退パラメータ ξ_ν^{BE} は無視して良いのである。

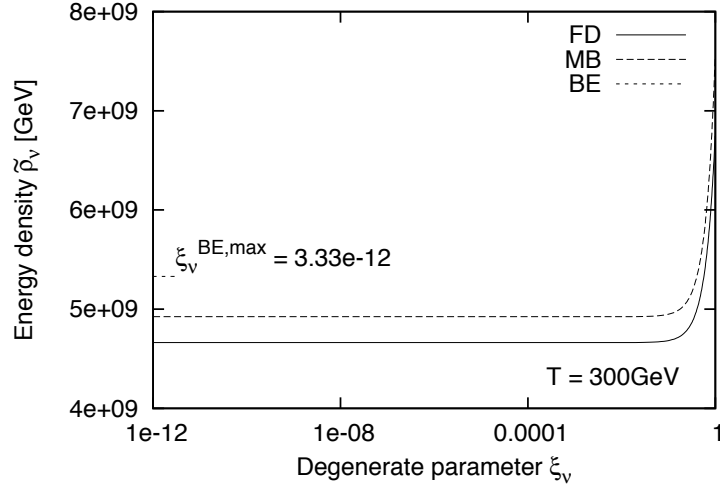


図 4.1: エネルギー密度と擬ケミカルポテンシャル

4.2.2 エネルギー密度

式(4.7)より、ニュートリノのエネルギー密度の温度依存性はよく知られているように $\tilde{\rho}_\nu^{FD,MB,BE} \propto T^4$ となる。 $\tilde{\rho}_\nu^{FD,MB,BE}$ の縮退パラメータ $\xi_\nu^{FD,MB,BE}$ への依存性を以下に議論する。なお、量子力学では複数の状態でエネルギーが同一になることを縮退というが、量子統計力学ではケミカルポテンシャルがゼロではないことも縮退という。

縮退のない場合

縮退がないので $\xi_\nu^{FD} = \xi_\nu^{MB} = \xi_\nu^{BE} = 0$ である。この時には式(4.7)から

$$\frac{\tilde{\rho}_\nu^{FD}}{\tilde{\rho}_\nu^{MB}} = \frac{7\pi^4}{890} < 1, \frac{\tilde{\rho}_\nu^{MB}}{\tilde{\rho}_\nu^{BE}} = \frac{7\pi^4}{890} < 1, \frac{\tilde{\rho}_\nu^{FD}}{\tilde{\rho}_\nu^{BE}} = \frac{7}{8} < 1 \quad (4.9)$$

を得る。ニュートリノ統計性がFDからMB, BEと変化すると、ニュートリノのエネルギー密度は $\tilde{\rho}_\nu^{FD} < \tilde{\rho}_\nu^{MB} < \tilde{\rho}_\nu^{BE}$ と増加していく [19]。

縮退のある場合

ニュートリノに縮退があり $\xi_\nu^{FD, MB, BE} \neq 0$ の時、ボソンとしてのニュートリノの縮退パラメータは式(4.8)より $\xi_\nu^{BE} \leq m_\nu/T$ の制限を受ける。図

4.1は温度 $T = 300\text{GeV}$ において正味のエネルギー密度 $\tilde{\rho}_\nu$ と縮退パラメータ ξ_ν の関係を示したものである。“ FD_ν ”, “ MB_ν ”, “ BE_ν ” は、フェルミ・ディラック統計、マクスウェル・ボルツマン統計、ボース・アインシュタイン統計に従う $m_\nu \sim \text{eV}$ でのニュートリノを示している。 BE_ν の縮退パラメータの最大値は $T = 300\text{GeV}, m_\nu = 1$ で $\xi_\nu^{BE, \max} = 3.3 \times 10^{-12}$ となる。 BE_ν の様子はドットラインで示してある。

縮退パラメータ $\xi^{FD}, \xi^{MB}, \xi^{BE}$ は互いに独立しているとする。まず、縮退パラメータが $\xi_\nu^{FD} = \xi_\nu^{MB} = \xi_\nu^{BE} \leq 0$ の場合、ニュートリノが純粋なボソンの場合、縮退パラメータは $\xi_\nu^{BE} \leq \xi_\nu^{BE, \max}$ であるので、すべての縮退パラメータは無視できるほど小さく $\tilde{\rho}_\nu^{FD} < \tilde{\rho}_\nu^{MB} < \tilde{\rho}_\nu^{BE}$ となる。次に、もっと一般的なケースである $\xi_\nu^{FD} \neq \xi_\nu^{MB} \neq \xi_\nu^{BE} \neq 0$ では、 $\xi_\nu^{BE} \leq \xi_\nu^{BE, \max}$ のもとでは $\tilde{\rho}_\nu^{FD}, \tilde{\rho}_\nu^{MB}, \tilde{\rho}_\nu^{BE}$ について以下のパターンが考えられうる。

(a) $\tilde{\rho}_\nu^{FD} \leq \tilde{\rho}_\nu^{MB} \leq \tilde{\rho}_\nu^{BE}$

(b) $\tilde{\rho}_\nu^{MB} \leq \tilde{\rho}_\nu^{FD} \leq \tilde{\rho}_\nu^{BE}$ 。

(c) $\tilde{\rho}_\nu^{FD} \leq \tilde{\rho}_\nu^{BE} \leq \tilde{\rho}_\nu^{MB}$ 。

(d) $\tilde{\rho}_\nu^{BE} \leq \tilde{\rho}_\nu^{FD} \leq \tilde{\rho}_\nu^{MB}$ 。

(e) $\tilde{\rho}_\nu^{MB} \leq \tilde{\rho}_\nu^{BE} \leq \tilde{\rho}_\nu^{FD}$ 。

(f) $\tilde{\rho}_\nu^{BE} \leq \tilde{\rho}_\nu^{MB} \leq \tilde{\rho}_\nu^{FD}$ 。

この6つのパターンの内いずれが実現するかは、縮退パラメータ $\xi^{FD}, \xi^{MB}, \xi^{BE}$ によって決まる。6つのパターンを図4.2に示した。FDは赤線、MBは緑線、BEは青線で描画した。これらの曲線はエネルギー密度の関係性から許容される値を示している。例として、(f) $\tilde{\rho}_\nu^{BE} \leq \tilde{\rho}_\nu^{MB} \leq \tilde{\rho}_\nu^{FD}$ においては $(\xi_\nu^{BE}, \xi_\nu^{MB}, \xi_\nu^{FD}) = (0.0, 0.6, 0.8)$ の時に $(\tilde{\rho}_\nu^{BE}, \tilde{\rho}_\nu^{MB}, \tilde{\rho}_\nu^{FD}) = (5.3, 5.8, 6.0)$ を得る。

4.2.3 相対論的有効自由度

縮退のない場合

縮退のないニュートリノでは、全エネルギー密度 ρ は超相対論的粒子の場合は式(3.7)となり、相対論的有効自由度 g_* は、よく知られている相対論的有効自由度の形である式(3.8)で与えられる。ニュートリノがBE

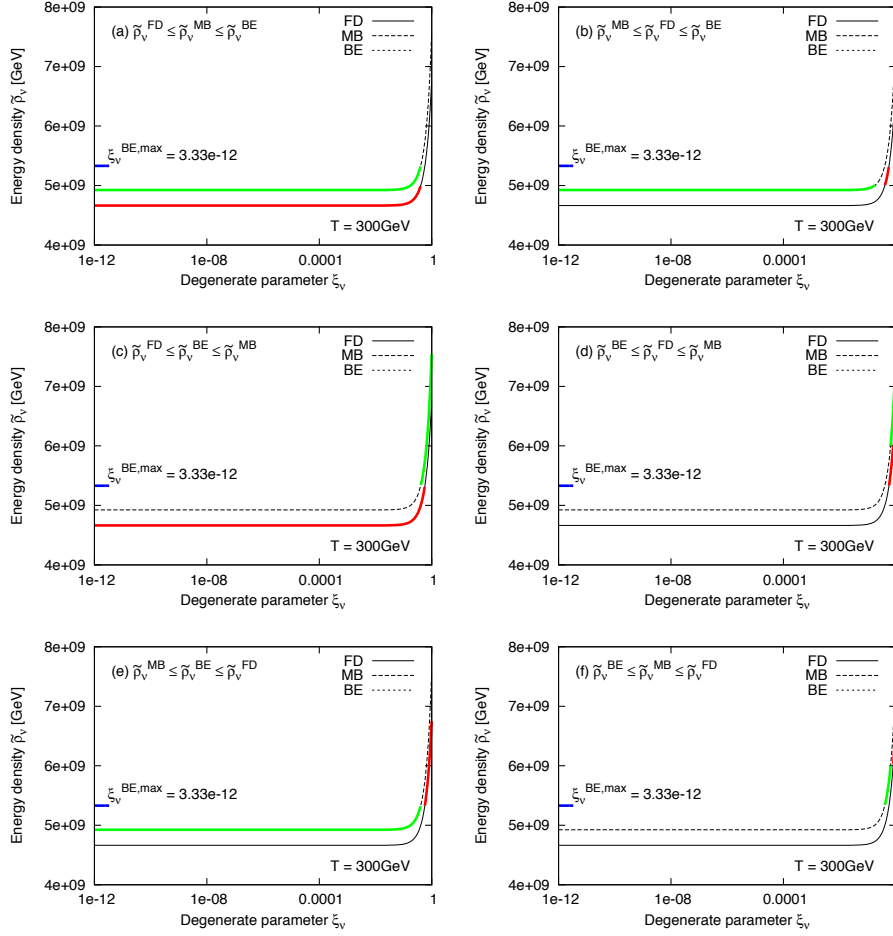


図 4.2: エネルギー密度の統計性による大小のパターン

統計に従うならば、FD から BE への統計性の変更によって相対論的有效自由度は $g_*^{BE} = g_*^{FD} + 3/4$ と増加する。よって、非縮退ニュートリノの場合は $\tilde{\rho}_\nu^{FD} < \tilde{\rho}_\nu^{MB} < \tilde{\rho}_\nu^{BE}$ 及び式 (3.7) より

$$g_*^{FD} < g_*^{MB} < g_*^{BE} \quad (4.10)$$

が得られる。

図 4.3 は、縮退のないニュートリノにおける相対論的有效自由度 g_* と温度 T の関係を表したものである。三つの曲線は FD_ν, MB_ν, BE_ν を表す。三つの線はほぼ互いに重なっているが、因子 $3/4$ のために相対論的有效自由度は BE_ν の方が FD_ν よりも大きい。

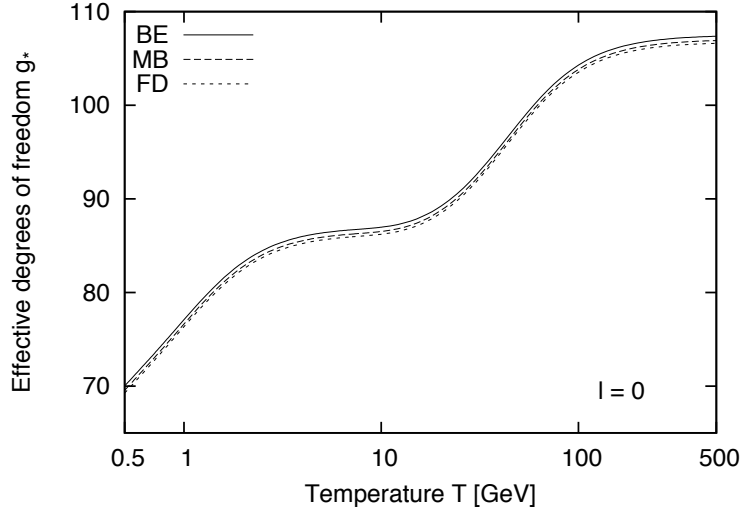


図 4.3: 有効自由度と温度

縮退のある場合

縮退のあるニュートリノの相対論的有効自由度は

$$g_* = \frac{30}{\pi^2 T^4}(\xi_\nu) = g_*^{\xi_\nu=0} + \Delta g_*(\xi_\nu) \quad (4.11)$$

となる [10]。ここで $g_*^{\xi_\nu=0}$ は式 (4.11) の第二項で与えられる。 $\Delta g_*(\xi_\nu)$ が標準的な $g_*^{\xi_i=0}$ からのずれである。

前章と同様に、相対論的有効自由度を求めるためには、全ての粒子のエネルギー密度の評価をしなければならない。そして、エネルギー密度を評価するためには、すべての粒子のケミカルポテンシャルが決定されていなければならない。そこで、前章で用いた手法を本章でも採用する。すなわち、GeV スケールでのレプトン非対称は $l = 0.003$ とする。また、エネルギー密度を数値的に積分して評価するためにガウス・ラゲール法を用い、ケミカルポテンシャルを含む非線形連立方程式はブロイデン法を用いて解く。各粒子の質量はパーティクルデータグループの値を採用する。宇宙論的なニュートリノの質量制限 $\sum m_\nu < 0.21 - 1.11\text{eV}$ から [28]、ニュートリノ質量を $m_\nu = m_{\nu_e} = m_{\nu_\mu} = m_{\nu_\tau} = 1\text{eV}$ とする。

一般に、相対論的有効自由度 g_* はエネルギー密度 ρ の総和の増加に伴って増加する。また、エネルギー密度は分布関数 $f_i = g_i/e^{(E_i-\mu_i)/T+\Theta_i}$ の増加に伴って増加する。レプトン非対称がない場合にはケミカルポテンシャル

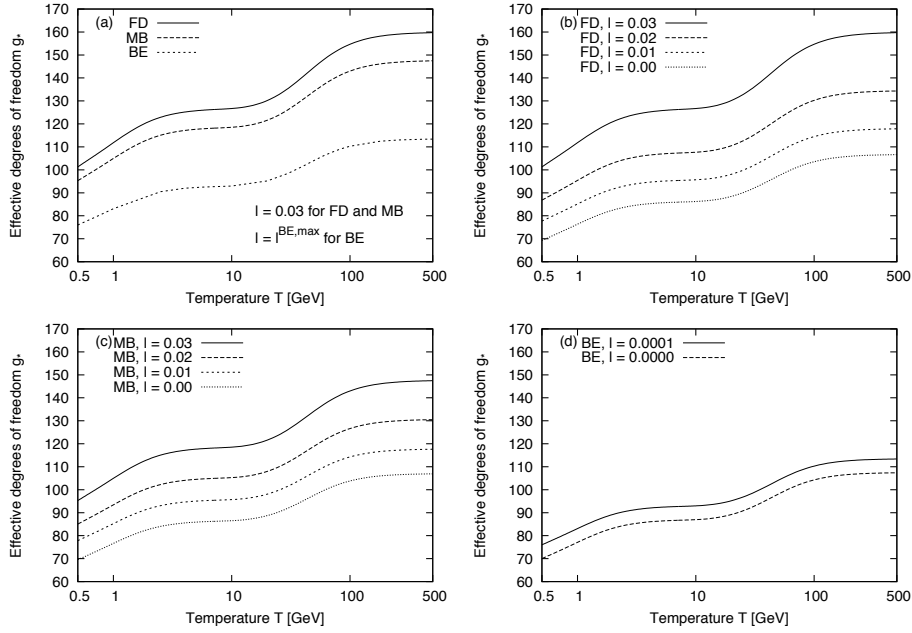


図 4.4: 有効自由度と温度（レプトン非対称あり）

ルも消え、分布関数は $f_i = g_i / (e^{E_i/T} + \Theta_i)$ となるので、小さな Θ は大きな f_ν を生み ($g_*(g_*^{FD} < g_*^{MB} < g_*^{BE})$) となる。一方、レプトン非対称がある場合には小さい Θ_ν はケミカルポテンシャルが一定である場合には ($\mu^{FD} = \mu^{MB} = \mu^{BE} \neq 0$) となり、大きな g_* を生む。

しかしながら、パラメータ Θ_ν が $\Theta_\nu = 1$ から $\Theta_\nu = -1$ を通り $\Theta_\nu = 0$ に変化し、かつレプトン数が消滅せず一定の時、ケミカルポテンシャルはもはや Θ_ν とともに一定ではなく、分布関数は $f_i = g_i / e^{(E_i - \mu_i)/T + \Theta_i}$ となる。小さな Θ_ν は大きな f_ν を生み、大きな μ_ν は大きな f_ν を生む。この場合は $g^{FD} < g^{MB} < g^{BE}$ の関係はもはや保証されず、 $g^{BE} < g^{MB} < g^{FD}$ のような他のパターンも可能である。これら許容されるパターンからの関係の選択は、レプトン数に依存する。

図 4.4 に、ニュートリノが縮退している場合（すなわち、一定のレプトン数がある場合）の相対論的有效自由度 g_* と温度 T の関係を示した。図 4.4 ではレプトン数は FD_ν と MB_ν について $l = l^{BEmax}$ で $l = 0.03$ とした。 BE_ν の場合は l^{BEmax} は $\mu_\nu^{BB} \leq \mu_\nu^{BB}$ から導かれるレプトン数の上限を示している。図 4.4 の (b)-(d) はそれぞれ FD_ν 、 MB_ν 、 BE_ν のレプトンの有効自由度の数である。図 (4.3) と図 (4.4)(a) を参照すると、ニュート

リノに縮退がない場合 ($l = 0$) の場合) には $g^{FD} < g^{MB} < g^{BE}$ を得る。一方、強く縮退したニュートリノ ($l = 0.03$) の場合には、逆の関係

$$g_*^{BE} < g_*^{MB} < g_*^{FD} \quad (4.12)$$

も許されることがわかる。

4.3 分布関数の形を連続的に変化させた場合

4.3.1 分布関数

次に、ニュートリノの統計性がフェルミ・ディラック統計 (FD) からマクスウェル・ボルツマン統計 (MB) を経てボース・アインシュタイン統計 (BE) へ連続的に変化する場について議論する。

このために、ニュートリノの量子統計分布関数において、前節で用いた Θ の代わりに連続的なパラメータ κ に帰る。

$$f_i(E) = \frac{1}{\exp(E_i - \mu_i)/T + \Theta_i} \rightarrow f_i(E) = \frac{1}{\exp(E - \mu_i)/T + \kappa_i} \quad (4.13)$$

フェルミボースパラメータ κ_i は、ボース・アインシュタイン統計 ($\kappa_i = -1$) からマクスウェル・ボルツマン統計 ($\kappa_i = 0$) を介してフェルミ・ディラック統計 ($\kappa_i = 1$) まで変化する。ニュートリノを除く標準モデル粒子のフェルミボースパラメータ κ_i は、荷電レプトンとクォークでは $\kappa_l = \kappa_q = +1$ 、ゲージボゾンとヒッグスボゾンでは $\kappa_\gamma, W, Z, G, H = -1$ となる。一方、ニュートリノについては、 $\kappa_\nu \equiv \kappa_{\nu_e} = \kappa_{\nu_\mu} = \kappa_{\nu_\tau}$ とし、 $-1 \leq \kappa_\nu \leq 1$ とする。

ここで、 $-1 \leq \kappa < 0$ を満たす粒子をボース・ボルツマン粒子 (BB 粒子) とよぶことにする。同様にして $\kappa_i = 0$ を満たす粒子をマクスウェル・ボルツマン粒子 (MB 粒子) とよび、 $0 < \kappa_i \leq 1$ を満たす粒子をフェルミ・ボルツマン粒子 (FB 粒子) とよぶ。

フェルミ・ボースパラメータ κ_i を導入すると、ボソンのケミカルポテンシャルの制約は (4.8) から次のように一般化される [19]。

$$\xi_i^{BE, max} = \frac{m_i}{T} \rightarrow \xi_i^{BB, max} = \frac{m_i}{T} - \ln(-\kappa_i) \quad (4.14)$$

なお、MB 粒子および FB 粒子の縮退パラメータには制約がない。ニュートリノは非常に小さい質量 $m_\nu \leq 1\text{eV}$ を持つので、 BB_ν の最大縮退パラ

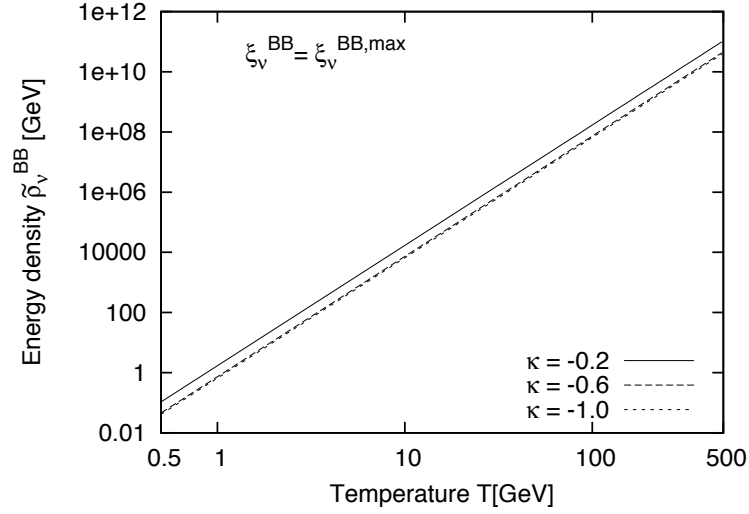


図 4.5: 最大の縮退パラメータ値 $\xi_\nu^{BB,max}$ を取る場合の、正味のエネルギー密度 $\tilde{\rho}_\nu$ とニュートリノの統計性の関係.

メータは

$$\xi_\nu^{BB, max} \sim -\ln(-\kappa_\nu) > 0, \quad (4.15)$$

と初期宇宙ではなる。

ここで、左辺の制限が次のようになることが重要である。

$$\lim_{\kappa_\nu \rightarrow -0} \xi_\nu^{BB, max} = \infty \quad (4.16)$$

純粋なボゾンニュートリノ ($\kappa_\nu = -1$) の縮退パラメータ (ケミカルポテンシャル) は無視できる。しかし、純粋な BE ($\kappa_\nu = -1$) から純粋な MB ($\kappa_\nu = 0$ への統計の変化は BB_ν の最大縮退パラメータの上限を m_ν/T から無限大まで増加させるのである。当然ながら、縮退パラメータは実験および観測から制約されるべきであるが、ここでは縮退パラメータに対する κ_ν の連続的遷移の結果のみを論じる。

4.3.2 エネルギー密度

図 4.5 は、 BB_ν が最大の縮退パラメータ値 $\xi_\nu^{BB,max}$ を取るとして、正味のエネルギー密度 $\tilde{\rho}_\nu$ とニュートリノの統計性の関係を示している。図 4.6

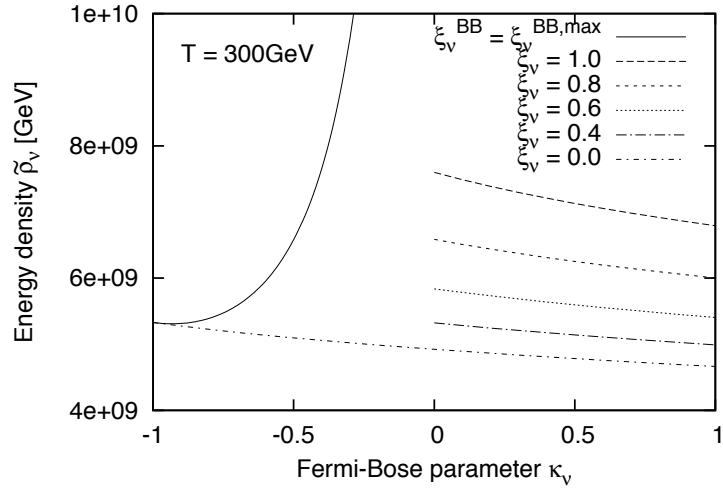


図 4.6: $T = 300 \text{ GeV}$ における正味のエネルギー密度 ρ_ν とフェルミ - ボーズパラメータ κ_ν の関係.

は、 $BB_\nu, \xi_\nu = \xi_\nu^{BB, \max}$ で $T = 300 \text{ GeV}$ における、正味のエネルギー密度 ρ_ν とフェルミ - ボーズパラメータ κ_ν の関係を表している。

前節で行った「分布関数の形を離散的に変化させた場合」の考察と同様にして、ニュートリノに縮退がある場合とない場合では、エネルギー密度の振る舞いが異なる。

縮退のない場合

縮退していないニュートリノは式 (4.13) の分布関数 $f_\nu = g_\nu / (e_\nu^{E/T} + \kappa_{nu})$ に従う。フェルミボースパラメータを 1 から 0 を通じて -1 まで連続的に変化させると、 $xi_\nu^{FD} = xi_\nu^{MB} = xi_\nu^{BE}$ で $\tilde{\rho}_\nu^{FB} < \tilde{\rho}_\nu^{MB} < \tilde{\rho}_\nu^{BB}$ を得る。

縮退のある場合

縮退パラメータが互いに独立しているとしよう。この場合、 $\tilde{\rho}_\nu^{FB}, \tilde{\rho}_\nu^{MB}, \tilde{\rho}_\nu^{BB}$ において以下のパターンが考えられる。

(a) $\tilde{\rho}_\nu^{FB} \leq \tilde{\rho}_\nu^{MB} \leq \tilde{\rho}_\nu^{BB}$

(b) $\tilde{\rho}_\nu^{MB} \leq \tilde{\rho}_\nu^{FB} \leq \tilde{\rho}_\nu^{BB}$ 。

$$(c) \tilde{\rho}_\nu^{FB} \leq \tilde{\rho}_\nu^{BB} \leq \tilde{\rho}_\nu^{MB}.$$

$$(d) \tilde{\rho}_\nu^{BB} \leq \tilde{\rho}_\nu^{FB} \leq \tilde{\rho}_\nu^{MB}.$$

$$(e) \tilde{\rho}_\nu^{MB} \leq \tilde{\rho}_\nu^{BB} \leq \tilde{\rho}_\nu^{FB}.$$

$$(f) \tilde{\rho}_\nu^{BB} \leq \tilde{\rho}_\nu^{MB} \leq \tilde{\rho}_\nu^{FB}.$$

この6つのパターンの内いずれが実現するかは、縮退パラメータ $\xi^{FD}, \xi^{MB}, \xi^{BE}$ によって決まる。6つのパターンを図4.7に示した。FDは赤線、MBは緑線、BEは青線で描画した。これらの曲線はエネルギー密度の関係性から許容される値を示している。例として、(f) $\tilde{\rho}_\nu^{BB} \leq \tilde{\rho}_\nu^{MB} \leq \tilde{\rho}_\nu^{FB}$ については、 10^9 GeV の単位で $(\xi_\nu^{BB}, \xi_\nu^{MB}, \xi_\nu^{FB}) = (0.6, 0.8, 1.0)$ の時に $(\tilde{\rho}^{BB}, \tilde{\rho}^{MB}, \tilde{\rho}^{FB}) = (6.2, 6.6, 6.8)$ を得る。

4.3.3 相対論的有効自由度

相対論的有効自由度はフェルミボーズパラメータ κ_i の関数になる

$$g_* = \frac{30}{\pi^2 T^4} \rho(\xi_i) \rightarrow g_* = \frac{30}{\pi^2 T^4} \rho(\kappa_i, \xi_i) \quad (4.17)$$

ここで $\rho = \sum_i \rho_i(\kappa_i, \xi_i)$ である。これは

$$g_* = g_*^{\xi_i=0} + \Delta g_*(\xi_i) \rightarrow g_*^{\xi_i=0} + \Delta g_*(\kappa_i, \xi_i) \quad (4.18)$$

とも書ける。右辺第3項の $\Delta g_*(\kappa_i, \mu_i)$ がニュートリノの量子統計性が連続的に変化した場合の、相対論的有効自由度の変化量を示している。

縮退のない場合

縮退がないニュートリノでは、エネルギー密度に $\tilde{\rho}^{FB} < \tilde{\rho}^{MB} < \tilde{\rho}^{BB}$ の関係がある。よってフェルミボーズパラメータ κ_ν が1から0を介して-1へ連続的に遷移すると、ニュートリノは正味のエネルギー密度を増加させる。 $\xi^{FB} = \xi^{MB} = \xi^{BB} = 0$ では

$$g_*^{FB} < g_*^{MB} < g_*^{BB} \quad (4.19)$$

となる。

縮退のある場合

レプトン非対称性が存在する場合には、小さな κ_ν は大きな f_ν を誘導し、大きな μ_ν は大きな f_ν を誘導する。この場合、 $g_*^{FB} < g_*^{MB} < g_*^{BB}$ の関係はもはや保証されない。この場合

$$g_*^{BB} < g_*^{MB} < g_*^{FB} \quad (4.20)$$

や

$$g_*^{MB} < g_*^{BB} < g_*^{FB} \quad (4.21)$$

もしくは

$$g_*^{MB} < g_*^{FB} < g_*^{BB} \quad (4.22)$$

となる可能性がある。

図 4.8 は温度 T に対する相対論的有効自由度 g_* の依存性を示している。レプトン数は FB_ν と MB_ν は $l = 0.03$ 、 BB_ν では $l = l^{BB, max}$ と仮定した。図 4.9 (a) は、 BB_ν の場合の最大縮退パラメータ $\xi^{BB, max}$ の温度 T に対する依存性を示している。図 4.9 (b) は最大レプトン数 $l^{BB, max}$ の温度 T に対する依存性を示す。

4.4 ダークマターと宇宙の物質生成への影響

ニュートリノが純粋なフェルミオンではない場合にもたらされる現象論的帰結についても議論しなければならない。例えば、レプトンの非対称性がどの程度ビッグバン元素合成前に初期宇宙に影響するかなどである。

まず、ニュートリノの統計性の違いがダークマター (WIMP) の残留密度にどのように影響するかを議論しよう。ニュートリノが純粋フェルミオンである場合の暗黒物質については [10, 48] で研究されている。

レプトン非対称がある場合の暗黒物質の残留密度 $\Omega_{WIMP}^{\ell \neq 0}$ と、レプトン非対称性がない場合の残存密度 $\Omega_{WIMP}^{\ell=0}$ との比は、およそ $\Omega_{WIMP}^{\ell \neq 0} / \Omega_{WIMP}^{\ell=0} \sim \sqrt{g_*^{\ell \neq 0} / g_*^{\ell=0}} \times g_*^{\ell \neq 0} / g_*^{\ell=0}$ として推定される。ここで $g_*^{\ell \neq 0}$ と $g_*^{\ell \neq 0} / g_*^{\ell=0}$ はそれぞれレプトン非対称がある場合と無い場合の相対論的エントロピー自由度を示している。初期宇宙では $g_{*s} \sim g_*$ であるので、 $\Omega_{WIMP}^{\ell \neq 0} / \Omega_{WIMP}^{\ell=0} \sim \sqrt{g_*^{\ell \neq 0} / g_*^{\ell=0}}$ を得る。したがって、有効自由度の変化に伴って、非純粋フェルミオンの縮退しているニュートリノのために、暗黒物質の存在量に変化が生じる。

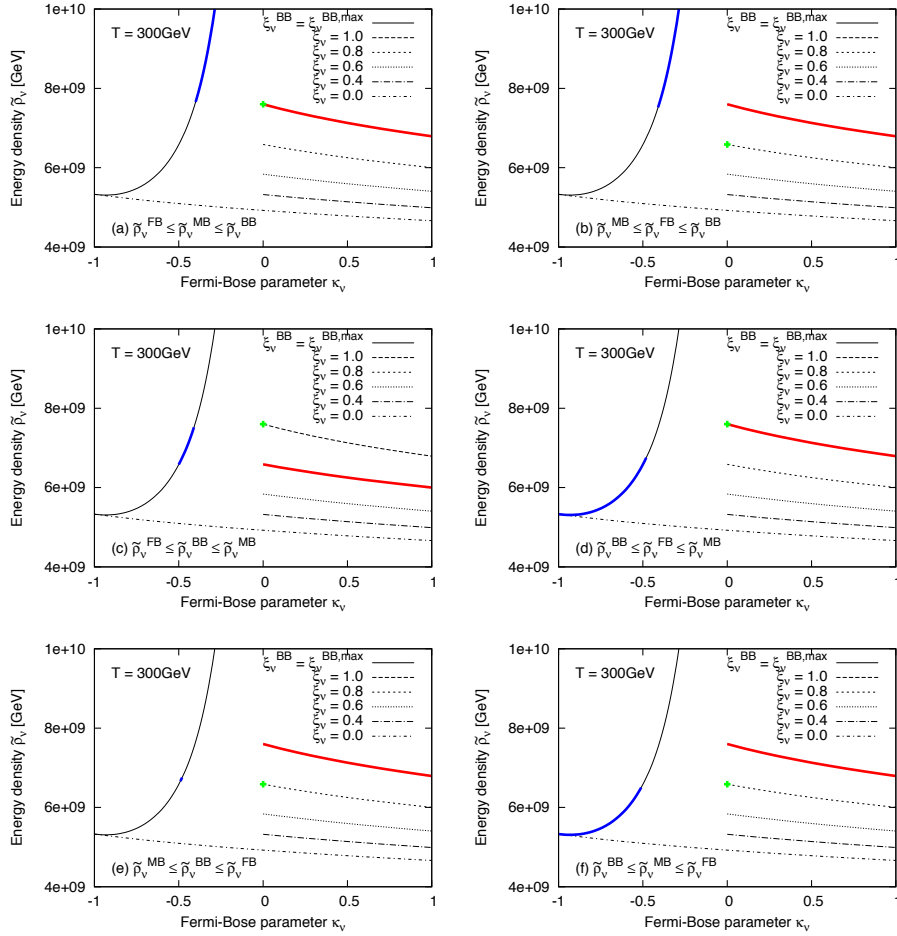


図 4.7: エネルギー密度と統計性のパターン

2つの極端な事例を示そう。純粋なフェルオンニュートリノについては 500 GeV で $g_*^{l=0} = 107$ (図 4.3) および $g = 0.03 = 160$ (図 4.3) を得るので、ダークマターの残留密度はおおよそ 18% 増加する。一方、ニュートリノが純粋なボーズ・アインシュタイン統計に従うならば $g_*^{l=BE, max} = 113$ (図 4.3) でありダークマターの残存量はおおよそ 3% 減少する。

別の例として、宇宙レプトジェネシスのシナリオによる物質生成 (バリオンの非対称性の生成) に与える影響について考えよう [47]。レプトジェネシスのシナリオでは、宇宙におけるバリオン - 光子比 η_B は、バリオン非対称 Y_B から $\eta_B = 7.04 Y_B$ と求まる。このバリオン非対称 Y_B は、sphaleron プロセスを経てレプトン非対称性 Y_L と $Y_B = a Y_L$ の関係にあ

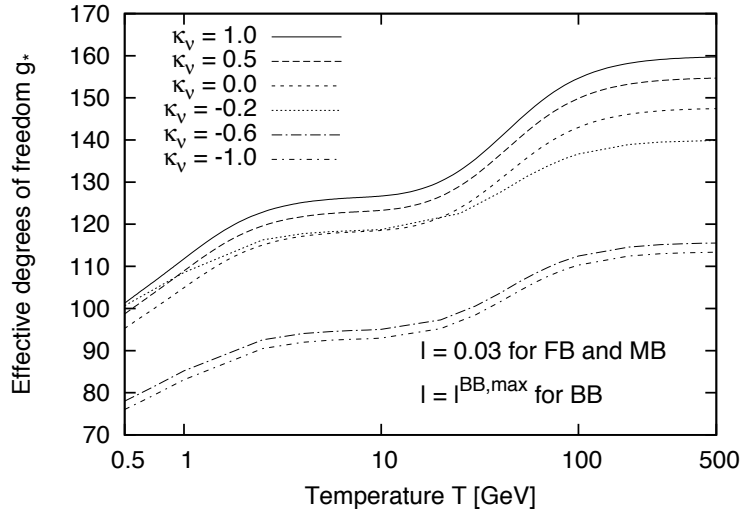


図 4.8: 相対論的有効自由度の温度依存性

る．ここで、 a は sphaleron プロセスによる因子である．レプトン非対称性 Y_L は、3つのパラメータで $Y_L = d\epsilon/g_*$ と表される．ここで d は宇宙膨張に起因する希釈因子であり、 ϵ はレプトン CP 非対称性を表すパラメータである（なお、フレーバーの違いを考慮するレプトジェネシスのシナリオでは、 $Y_L = d\epsilon/g_*$ の関係はより複雑な形になる．また、仮にフレーバーの違いを無視したとしても、 $Y_L = d\epsilon/g_*$ は近似解であり、より正確にはボルツマン方程式を数值的に解く必要がある）．

縮退しているニュートリノが純粋なフェルミオンではないとすると、相対論的有効自由度 g_* が変化する．したがって、相対論的有効自由度に依存しているバリオン - 光子比も変化する ($\eta \propto g_*^{-1}$)．バリオン - 光子比の変化 $\eta_B^{\kappa_\nu=1}$ は $\eta_B(\kappa_\nu)/\eta_B^{\kappa_\nu=1} = g_*^{\kappa_\nu=1}/g_*(\kappa_\nu)$ として得られる．

極端な場合を考えよう．純粋なフェルミオンニュートリノの場合は $g_*^{l=0.03} = 155^*$ に対して $g_*^{l=0.03} = 160$ を得る (図 4.8)．500 GeV で $\kappa_\nu = 0.5$ のフェルミオンのニュートリノの場合、バリオン - 光子比は約 3% 増加する．バリオン - 光子比の観測データは $5.7 \times 10^{-10} \leq \eta_B \leq 6.7 \times 10^{-10}$ (95% CL) [27] (3% の差が許される) である．フェルミ - ボルツマンニュートリノの存在の可能性はバリオン - 光子比の観測から完全に排除されない．

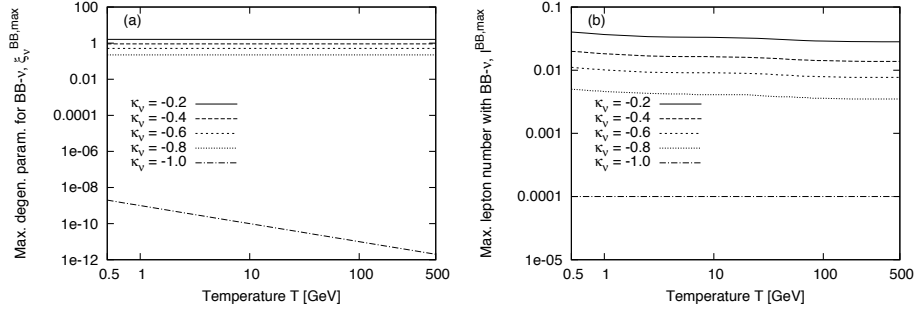


図 4.9: 縮退パラメーターとレプトン数の温度依存性

4.5 まとめ

前章で我々は、ニュートリノが初期宇宙における相対論的有効自由度 g_* に与える影響について、ニュートリノの統計性をフェルミ・ディラック統計 (FD) からマクスウェル・ボルツマン統計 (MB) まで変化すると仮定して考察した。本章ではさらにこの統計性の変化を拡張し、ニュートリノの統計性がフェルミ・ディラック統計 (FD) からマクスウェル・ボルツマン統計 (MB) を介してボース・アインシュタイン統計 (BE) まで変化できるものとした。

本章の議論によって、ニュートリノにマクスウェル・ボルツマン統計からボース・アインシュタイン統計までの連続変化を許容する場合、ニュートリノの縮退パラメーターが次のようになることが重要であることが明らかになった。

$$\lim_{\kappa_\nu \rightarrow -0} \xi_\nu^{BB, max} = \infty \quad (4.23)$$

一般に、純粋なボゾン ($\kappa_\nu = -1$) の縮退パラメーター (ケミカルポテンシャル) は無視できる。しかし、純粋な BE ($\kappa_\nu = -1$) から純粋な MB ($\kappa_\nu = 0$) への統計の変化は BB_ν の最大縮退パラメーターの上限を m_ν/T から無限大まで増加させるのである。

また、前章と同様にして、一般には相対論的有効自由度の大小関係は $g_*^{FD} < g_*^{MB} < g_*^{BE}$ となるが、縮退ニュートリノが存在する (より正確には、大きくかつ一定のレプトン非対称性がある) 場合、逆の関係 $g_*^{BB} < g_*^{MB} < g_*^{FB}$ など他のパターンも可能であることが明らかになった。

さらに我々は、非純粋なフェルミオンニュートリノによる現象論的帰結を議論した。そして、例えば非純粋なフェルミオンニュートリノはダー

クマターの存在量を減少させ、バリオン - 光子比を増加させることを示した。

第5章 ニュートリノ量子統計と 相対論的有効自由度 III : 解析的考察

5.1 はじめに

前章までは、ニュートリノが純粋なフェルミ・ディラック統計に従わない場合の相対論的有効自由度についてを数値解析で調査した。その結果として、大きなレプトン非対称性がある場合には、必ずしも通常期待される $g_*^{FD} < g_*^{MB} < g_*^{BE}$ は成り立たないことを示した。これが本研究の最大の成果である。

この数値的に得られた帰結をより明確に理解するためには、数値計算だけではなく、近似的であったとしても解析解による議論が必要である。本章では、フェルミ - ボーズパラメータの関数としての正味エネルギー密度の近似的な解析式を導き、相対論的有効自由度がレプトン非対称性に大きく依存することを示す。

5.2 分布関数

粒子と反粒子対の数密度は、分布関数 f_i を用いて

$$n_{i+\bar{i}} = \frac{g_i}{2\pi^2} \int_{m_i}^{\infty} E(E^2 - m_i^2)^{1/2} [f_i(E) - f_{\bar{i}}(E)] dE \quad (5.1)$$

と表せる [1]。これに式 (3.1) の分布関数を代入すると、

$$n_i = \frac{g_i}{2\pi^2} T^3 \left(4\xi \int_0^{\infty} \frac{z}{e^z + \kappa} dz + \int_0^{\xi} \frac{z^2 - 2z\xi + \xi^2}{e^z + \kappa} dz + \int_0^{\xi} \frac{z^2 - 2z\xi + \xi^2}{e^{-z} + \kappa} dz \right) \quad (5.2)$$

となる。ここで、 $\xi = \mu_i/T$, $z = (E - \mu_i)/T$ とした。右辺第 2 項と第 3 項は、第 1 項に比べて微小であるため無視すると、

$$n_{i+\bar{i}} \simeq \frac{g_i}{2\pi^2} T^3 \left(4\xi \int_0^\infty \frac{z}{e^z + \kappa} dz \right) \quad (5.3)$$

$$(5.4)$$

となる [20, 32]。いま、ポリ対数関数

$$\begin{aligned} \text{Li}(x) &= \int_0^x \frac{\text{Li}_{n-1}(t)}{t} dt \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-1)} \int_0^1 \frac{\log^{n-2}(t) \log(1-xt)}{t} dt \end{aligned} \quad (5.5)$$

を用いて

$$\int_0^\infty \frac{z^{n-1}}{e^z - Y} dz = \frac{\text{Li}_n(Y) \Gamma(n)}{Y} \quad (5.6)$$

が成り立つことを使うと、

$$\begin{aligned} n_{i+\bar{i}} &= \frac{g_i}{2\pi^2} T^3 \left(4\xi \frac{\Gamma(2) \text{Li}_2(-\kappa)}{-\kappa} \right) \\ &= \frac{g_i}{2\pi^2} T^3 \left(4\xi \sum_{n=1}^\infty \frac{(-\kappa)^{n-1}}{n^2} \right) \end{aligned} \quad (5.7)$$

が得られる。ここで

$$F_s(\kappa) \equiv \sum_{n=1}^\infty \frac{(-\kappa)^{n-1}}{n^s} \quad (5.8)$$

を定義すると、正味の数密度は

$$n_{i+\bar{i}} = \frac{g_i}{\pi^2} 2\mu_i T^2 F_2(\kappa) \quad (5.9)$$

と書ける。

同様にして、正味のエネルギー密度についても、

$$\rho_{i+\bar{i}} = \sum_{j=\bar{i}} \frac{g_j}{2\pi^3} \int_{m_i}^\infty E^2 (E^2 - m^2)^{1/2} f_j(E) dE \quad (5.10)$$

となるが、数密度 n_i と同様の計算により、

$$\rho_{i+\bar{i}} = \frac{g_i T^4}{2\pi^2} \left(\int_0^\infty \frac{2z^3 + 6z\xi^2}{e^z + \kappa} dz + \int_{-\xi}^0 \frac{z^3 + 3z^2\xi + 3z\xi^2 + \xi^3}{e^z + \kappa} dz + \int_0^\xi \frac{\xi^3 - 3\xi^2 z + 3\xi z^2 - z^3}{e^z + \kappa} dz \right) \quad (5.11)$$

となる。右辺第2項と第3項は、第1項に比べて微小であるため無視して第1項のみを採用し、

$$\begin{aligned} \rho_{i+\bar{i}} &\simeq \frac{g_i T^4}{2\pi^2} \left(2 \int_0^\infty \frac{z^3}{e^z + \kappa} dz + 6\xi^2 \int_0^\infty \frac{z}{e^z + \kappa} dz \right) \\ &= \frac{g_i T^4}{2\pi^2} \left(2 \frac{\text{Li}_4(-\kappa)\Gamma(4)}{-\kappa} + 6\xi^2 \frac{\text{Li}_2(-\kappa)\Gamma(2)}{-\kappa} \right) \\ &= \frac{g T^4}{2\pi^2} \left(12F_4(\kappa) + \frac{6\mu^2}{T^2} F_2(\kappa) \right) \end{aligned} \quad (5.12)$$

と表せる。

ここで得た数密度とエネルギー密度の近似的解析式は、本研究で得られた大きな成果の1つである。

なお、 $\kappa = 1$ とおくと、数密度とエネルギー密度はそれぞれ、

$$\begin{aligned} n_{i+\bar{i}} &= \frac{g_i}{6} \mu_i T^2 \left[1 + \left(\frac{\mu_i}{\pi T} \right)^2 \right] \\ \rho_{i+\bar{i}} &= \frac{\pi^2 g_i T^4}{15} \left(\frac{7}{8} + \frac{15}{4} \left(\frac{\mu}{\pi T} \right)^2 + \frac{15}{8} \left(\frac{\mu}{\pi T} \right)^4 \right) \end{aligned} \quad (5.13)$$

となり、よく知られているフェルミオンの式に帰着する。これは、我々が得た近似的な解析式の妥当性を示している。

5.3 相対論的有効自由度

相対論的有効自由度

$$g_*(T, \mu_i) \equiv \frac{30}{\pi^2 T^4} \sum \rho_{i+\bar{i}} \quad (5.14)$$

に、前節で導いたエネルギー密度の近似式を代入すると

$$g_*(\xi, \kappa_\nu) = g_*(\xi_i = 0, \kappa_\nu = 1) + \Delta g_*, \quad (5.15)$$

となる。ここで

$$g_*(\xi_i = 0, \kappa_\nu = 1) = \sum_{b=\text{bosons}} g_b + \frac{7}{8} \sum_{f=\text{fermions}} g_f, \quad (5.16)$$

は、よく知られているケミカルポテンシャル抜き ($\xi_i = 0$) 純粋フェルミオンニュートリノ ($\kappa_\nu = 1$) の式である。ケミカルポテンシャルを含み、純粋フェルミオンではないニュートリノにおける g_* の効果は、

$$\Delta g_*(T, \mu_i) = \sum \frac{15g_{i+\bar{i}}}{\pi^4} \left(\frac{6\mu_i^2}{T^2} F_2(\kappa_i) \right) \quad (5.17)$$

である。これも本研究での最大の成果の1つである、相対論的有効自由度の近似的な解析解である。

なお、 $\kappa = 1$ とおくと相対論的有効自由度は

$$\Delta g_*(T, \mu_i) = \sum g_{i+\bar{i}} \left(\frac{15}{4} \left(\frac{\mu_i}{\pi T} \right)^2 + \frac{15}{8} \left(\frac{\mu_i}{\pi T} \right)^4 \right) \quad (5.18)$$

となり、よく知られているフェルミオンの式に帰着する。これも我々が得た近似的な解析式の妥当性を示している。

レプトン非対称性と相対論的有効自由度の関係を (近似的に) 解析的に考察しよう。まず、ニュートリノの統計パラメータは変数の κ_ν として相対論的有効自由度を求める。なお、ニュートリノ以外の素粒子については

$$\frac{\mu_i}{\pi T} \ll 1, \frac{m_w}{3} > T \frac{m_b}{3} \quad (5.19)$$

であるとする。また、前章までと同様にケミカルポテンシャルの間には

$$\mu_i = \mu_{\bar{i}} \quad (5.20)$$

$$\mu_u + \mu_f = \mu_d + \mu_{\nu_f} \quad (5.21)$$

$$\mu_u = \mu_c = \mu_t \quad (5.22)$$

$$\mu_d = \mu_s = \mu_b \quad (5.23)$$

が成り立つとし、電荷 q 、バリオン数 b 、レプトン数 l を次の式で表す [10]。

$$sq = - \sum_{i=e,\mu,\tau} n_i + \frac{2}{3} \sum_{i=u,c,t} n_i - \frac{1}{3} \sum_{i=b,s,d} n_i \quad (5.24)$$

$$sb = \frac{1}{3} \sum_{i=u,d,c,s,t,b} n_i \quad (5.25)$$

$$sl_f = n_f + n_{\nu_f}, (f = e, \mu, \tau) \quad (5.26)$$

$$l = \sum_{f=e,\mu,\tau} = 0 \quad (5.27)$$

s はエントロピー密度である。そして、宇宙全体は電氣的に中性であるとし、

$$sq = 0 \quad (5.28)$$

とする。粒子の内部自由度は、 $g_u = g_c = g_t = g_d = g_s = g_b = 6, g_f = 2, g_{\nu_f} = 1, (f = e, \mu, \tau)$ とする。式 (5.20)~式 (5.23) を式 (5.24)~式 (5.27) に代入して整理すると、

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_u + \mu_f = \mu_d + \mu_{\nu_f} \end{array} \right. \quad (5.29)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_e + \mu_\mu + \mu_\tau = 4\mu_u - 3\mu_d \end{array} \right. \quad (5.30)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3s}{T^2} b = 2\mu_u + 3\mu_d \end{array} \right. \quad (5.31)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{6s}{T^2} l_f = 2\mu_f + \frac{12F_2(\kappa_\nu)}{\pi^2} \mu_{\nu_f} \end{array} \right. \quad (5.32)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} l = \sum_{f=e,\mu,\tau} l_f \end{array} \right. \quad (5.33)$$

および

$$\begin{aligned} 0 &= -(\xi_e + \xi_\mu + \xi_\tau) + 4\xi_u - 3\xi_d, \\ \frac{3sB}{T^3} &= 2\xi_u + 3\xi_d, \\ \frac{3sL_\ell}{T^3} &= \xi_\ell + \frac{6}{\pi^2} F_2(\kappa_\nu) \xi_{\nu_\ell}, \end{aligned} \quad (5.34)$$

が得られる。これを解いて、アップクォーク、ダウンクォーク、レプトン、ニュートリノのケミカルポテンシャルを求める。 $m_W < T < m_t$, $\kappa_\nu = \kappa_{\nu_e} = \kappa_{\nu_\mu} = \kappa_{\nu_\tau}$ とする。またニュートリノ以外のフェルミオンに

ついては $\kappa_i = 1$ とすると

$$\begin{aligned}
\xi_u &= \frac{s}{2T^3} \frac{1}{1 + \frac{11}{\pi^2} F_2(\kappa_\nu)} \left\{ L + \left[1 + \frac{12}{\pi^2} F_2(\kappa_\nu) \right] B \right\}, \\
\xi_d &= \frac{s}{3T^3} \frac{1}{1 + \frac{11}{\pi^2} F_2(\kappa_\nu)} \left\{ -L + \left[2 + \frac{21}{\pi^2} F_2(\kappa_\nu) \right] B \right\}, \\
\xi_{\nu_\ell} &= \frac{s}{T^3} \frac{1}{1 + \frac{6}{\pi^2} F_2(\kappa_\nu)} \left\{ 3L_\ell + \frac{1}{6(1 + \frac{11}{\pi^2} F_2(\kappa_\nu))} \left[5L - \left(1 + \frac{6}{\pi^2} F_2(\kappa_\nu) \right) B \right] \right\}, \\
\xi_\ell &= \frac{s}{T^3} \frac{1}{1 + \frac{6}{\pi^2} F_2(\kappa_\nu)} \left\{ 3L_\ell - \frac{F_2(\kappa_\nu)}{\pi^2(1 + \frac{11}{\pi^2} F_2(\kappa_\nu))} \left[5L - \left(1 + \frac{6}{\pi^2} F_2(\kappa_\nu) \right) B \right] \right\},
\end{aligned} \tag{5.35}$$

を得る。ここで $L = \sum_{\ell=e,\mu,\tau} L_\ell$ である。

純粋フェルミオンではないニュートリノにおける相対論的有效自由度 g_* への効果は、

$$\begin{aligned}
\Delta g_* &= \frac{15}{4\pi^2} \sum_{i=\text{fermions} \neq \nu} g_i \xi_i^2(\kappa_\nu) + \sum_{i=\nu} \frac{45}{\pi^4} F_2(\kappa_\nu) g_\nu \xi_i^2(\kappa_\nu) \\
&\quad + \sum_{i=\nu} g_i \left(\frac{90}{\pi^4} F_4(\kappa_\nu) - \frac{7}{8} \right)
\end{aligned} \tag{5.36}$$

となる。この Δg_* を用いて、前章までに数値計算で得られた結果を近似的に再現することを示そう。まず、純粋フェルミオンに対する Δg_* は

$$\begin{aligned}
\Delta g_*(\kappa_\nu = 1) &= \frac{50}{529\pi^2} \\
&\quad \times \left(\frac{s}{T^3} \right)^2 \left(873B^2 - 162BL + 362L^2 + 1587 \sum_{\ell} L_\ell^2 \right)
\end{aligned} \tag{5.37}$$

となり、純粋ボソンに対する Δg_* は

$$\begin{aligned}
\Delta g_*(\kappa_\nu = -1) &= \frac{45}{289\pi^2} \\
&\quad \times \left(\frac{s}{T^3} \right)^2 \left(529B^2 - 78BL + 140L^2 + 867 \sum_{\ell} L_\ell^2 \right) + \frac{3}{4}
\end{aligned} \tag{5.38}$$

となる。

ここで、大きなレプトン非対称性 $L_\ell = L/3$ および $L \gg B \sim 0$ の存在を仮定しよう。この時、 $T = 100$ GeV では近似的に $s/T^3 = 2\pi^2 g_{*s}/45 =$

$2\pi^2 g_*/45 \sim 44$ が成り立つことを用いると

$$\begin{aligned}\Delta g_*(\kappa_\nu = 1) &\simeq 1.65 \times 10^4 L^2, \\ \Delta g_*(\kappa_\nu = -1) &\simeq 1.31 \times 10^4 L^2 + \frac{3}{4}.\end{aligned}\quad (5.39)$$

を得る。これから、

$$L \gtrsim 0.015 \quad (5.40)$$

の場合には、

$$\Delta g_*(\kappa_\nu = 1) \gtrsim \Delta g_*(\kappa_\nu = -1) \quad (5.41)$$

すなわち

$$g_*^{\text{FD}} \gtrsim g_*^{\text{BE}} \quad (5.42)$$

が得られる。このように、通常は $g_*^{\text{BE}} \gtrsim g_*^{\text{FD}}$ と考えられているが、初期宇宙で大きなレプトン非対称性がある場合には、 $g_*^{\text{FD}} \gtrsim g_*^{\text{BE}}$ の関係が許されることが示された。

5.4 まとめ

本章では、前章までに数値的に得られた帰結をより明確に理解するためには、正味エネルギー密度と相対論的有效自由度の近似的な解析式を導き、相対論的有效自由度がレプトン非対称性に大きく依存することを以下のように示した。

相対論的有效自由度は

$$g_*(\xi, \kappa_\nu) = g_*(\xi_i = 0, \kappa_\nu = 1) + \Delta g_*, \quad (5.43)$$

となる。ここでケミカルポテンシャルを含み、純粋フェルミオンではないニュートリノにおける g_* への効果は、

$$\Delta g_*(T, \mu_i) = \sum \frac{15g_{i+\bar{i}}}{\pi^4} \left(\frac{6\mu_i^2}{T^2} F_2(\kappa_i) \right) \quad (5.44)$$

で表される。ここで

$$F_s(\kappa) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\kappa)^{n-1}}{n^s} \quad (5.45)$$

である。

素粒子のケミカルポテンシャルに適切な仮定を行うと，

$$\begin{aligned} \Delta g_* &= \frac{15}{4\pi^2} \sum_{i=\text{fermions}\neq\nu} g_i \xi_i^2(\kappa_\nu) + \sum_{i=\nu} \frac{45}{\pi^4} F_2(\kappa_\nu) g_\nu \xi_i^2(\kappa_\nu) \\ &+ \sum_{i=\nu} g_i \left(\frac{90}{\pi^4} F_4(\kappa_\nu) - \frac{7}{8} \right) \end{aligned} \quad (5.46)$$

を得る．レプトン非対称性 $L_\ell = L/3$ および $L \gg B \sim 0$ の存在を仮定すると，

$$\begin{aligned} \Delta g_*(\kappa_\nu = 1) &\simeq 1.65 \times 10^4 L^2, \\ \Delta g_*(\kappa_\nu = -1) &\simeq 1.31 \times 10^4 L^2 + \frac{3}{4}. \end{aligned} \quad (5.47)$$

を得る．これから $L \gtrsim 0.015$ の場合には $g_*^{\text{FD}} \gtrsim g_*^{\text{BE}}$ ．初期宇宙で大きなレプトン非対称性がある場合には， $g_*^{\text{FD}} \gtrsim g_*^{\text{BE}}$ の関係が許される．

第6章 結言

本論では、非純粋フェルミオンニュートリノが初期宇宙（放射優勢期）で、相対論的有効自由度に与える影響を考察した。なお、本研究の目的はニュートリノがフェルミ・ディラック統計に従うという通説を否定することではない。あくまでも可能性の1つとして、ニュートリノが純粋なフェルミ・ディラック統計に従わない場合に起こりうる物理現象を考察した。

第2章では、本研究の基礎となる量子統計力学とニュートリノ物理学をまとめた。

第3章では、ニュートリノが純粋なフェルミ・ディラック統計に従うのではなく、純粋なフェルミ・ディラック統計 (F.D.) から純粋なマクスウェル・ボルツマン統計 (M.B.) の間の中間の統計に従うとした。そして、初期宇宙 ($0.5 \sim 500\text{GeV}$ の温度) における非純粋フェルミオンであるニュートリノと相対論的有効自由度の関係について考察した。

通常、放射優勢期におけるエネルギー密度はニュートリノのフェルミ・ディラック統計からのずれに伴って増加する。しかしながら、我々は GeV スケールの宇宙で大きなレプトン非対称があるときは、ニュートリノのフェルミ・ディラック統計からのずれに伴って相対論的有効自由度が減少することを示した。

我々はまた、温度が $T \simeq 1\text{MeV}$ (BBN 周辺の温度) であるときのフェルミ・ボースパラメータ κ_ν と縮退パラメータ $\xi_{\nu_f} = \mu_{\nu_f}/T$ についても考察した。その結果、ニュートリノの統計性がフェルミ・ディラック統計からマクスウェル・ボルツマン統計へ変化するだけでは、有効ニュートリノ数の過剰 ($N_{eff} > 3$) を説明できないことが明らかになった。このことは、初期宇宙のダーク放射には非標準模型の粒子を含むことを示唆している。

第4章では、さらに統計性の変化を拡張し、ニュートリノの統計性がフェルミ・ディラック統計 (FD) からマクスウェル・ボルツマン統計 (MB) を介してボース・アインシュタイン統計 (BE) まで変化できるものとした。ニュートリノにマクスウェル・ボルツマン統計からボース・アインシュタイン統計までの連続変化を許容する場合、ニュートリノの縮退パ

ラメータが次のようになることが重要であることが明らかになった。

$$\lim_{\kappa_\nu \rightarrow -0} \xi_\nu^{BB, max} = \infty \quad (6.1)$$

一般に、純粋なボゾン ($\kappa_\nu = -1$) の縮退パラメータ (ケミカルポテンシャル) は無視できる。しかし、純粋な BE ($\kappa_\nu = -1$) から純粋な MB ($\kappa_\nu = 0$) への統計の変化は BB_ν の最大縮退パラメータの上限を m_ν/T から無限大まで増加させるのである。

また、第3章と同様にして、一般には相対論的有効自由度の大小関係は $g_*^{FD} < g_*^{MB} < g_*^{BE}$ となるが、縮退ニュートリノが存在する (より正確には、大きくかつ一定のレプトン非対称性がある) 場合、逆の関係 $g_*^{BB} < g_*^{MB} < g_*^{FB}$ など他のパターンも可能であることが明らかになった。

さらに我々は、非純粋なフェルミオンニュートリノによる現象論的帰結を議論した。そして、例えば非純粋なフェルミオンニュートリノはダークマターの存在量を減少させ、バリオン - 光子比を増加させることを示した。

第5章では、数値的に得られた帰結をより明確に理解するためには、正味エネルギー密度と相対論的有効自由度の近似的な解析式を導き、相対論的有効自由度がレプトン非対称性に大きく依存することを示した。

純粋フェルミオンではないニュートリノにおける相対論的有効自由度 g_* への効果は、

$$\Delta g_*(T, \mu_i) = \sum \frac{15g_{i+\bar{i}}}{\pi^4} \left(\frac{6\mu_i^2}{T^2} F_2(\kappa_i) \right) \quad (6.2)$$

で表される。ここで

$$F_s(\kappa) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\kappa)^{n-1}}{n^s} \quad (6.3)$$

である。素粒子のケミカルポテンシャルに適切な仮定を行うと、

$$\begin{aligned} \Delta g_* &= \frac{15}{4\pi^2} \sum_{i=fermions \neq \nu} g_i \xi_i^2(\kappa_\nu) + \sum_{i=\nu} \frac{45}{\pi^4} F_2(\kappa_\nu) g_\nu \xi_i^2(\kappa_\nu) \\ &+ \sum_{i=\nu} g_i \left(\frac{90}{\pi^4} F_4(\kappa_\nu) - \frac{7}{8} \right) \end{aligned} \quad (6.4)$$

を得る。レプトン非対称性 $L_\ell = L/3$ および $L \gg B \sim 0$ の存在を仮定す

ると,

$$\begin{aligned}\Delta g_*(\kappa_\nu = 1) &\simeq 1.65 \times 10^4 L^2, \\ \Delta g_*(\kappa_\nu = -1) &\simeq 1.31 \times 10^4 L^2 + \frac{3}{4}.\end{aligned}\tag{6.5}$$

を得る. これから $L \gtrsim 0.015$ の場合には $g_*^{\text{FD}} \gtrsim g_*^{\text{BE}}$. 初期宇宙で大きなレプトン非対称性がある場合には, $g_*^{\text{FD}} \gtrsim g_*^{\text{BE}}$ の関係が許される.

謝辞

私に素粒子理論、および様々な研究手法の手ほどきをしてくださり、また途中体調を崩すことも多かった私に、温かいお気遣いのもと研究を支えてくださった指導教員の北林照幸教授に心から感謝申し上げます。

また、私の学部生の時分の担任でもあり、主査を務めてくださった新屋敷直木教授、学部時代より私を気遣ってくださり様々な面倒を見てくださった山口滋教授、私の学位論文に対して有益なアドバイスをしてくださった数学科の山本義郎教授、ニュートリノ研究プロジェクトに拙い私を参加させてくださった安江正樹教授、私に量子力学、統計力学、物性物理学の基礎、そして研究者としてあるべき態度を教えてくださった豊田正教授にも心から感謝申し上げます。

そして、同じ学問を志す友として私を支えてくださった研究室のメンバーの皆様にも心からの御礼を申し上げます。

最後に、これまで経済的にも精神的にも支えてくださった父母、祖父母、妹にも心から感謝いたします。

参考文献

- [1] S. Bartalucci, et. al., (VIP Collaboration), Phys. Lett. B **641** (2006) 18.
- [2] 戸塚洋二, “岩波講座現代の物理学第 10 巻 素粒子物理学”, (1992) 岩波書店.
- [3] 小出義夫, 信州大学理学部物理学科における集中講義「量子力学 III」講義ノート (2004), 横浜国立大学大学院工学府における集中講義「高エネルギー先端科学」講義ノート (2004).
- [4] S. Choubey and K. Kar, Phys. Lett. B **634** (2006) 14.
- [5] W. Tornow, Nucl. Phys. A **844** (2010) 57c.
- [6] R. Arnold et.al, (NEMO-3 Collaboration), Nucl. Phys. A **925** (2014) 25.
- [7] R. Arnold et.al, (NEMO-3 Collaboration), Phys. Rev. Lett. **95** (2005) 182302.
- [8] L. Cucurull, J. A. Grifols and R. Toldra, Astropart. Phys. **4** (1996) 391.
- [9] A. D. Dolgov and A. Yu. Smirnov, Phys. Lett. B **621** (2005) 1.
- [10] M. Stuke, D. J. Schwarz and G. Starkman, JCAP **03** (2012) 040.
- [11] H. S. Green, Phys. Rev. **90(2)** (1953) 270.
- [12] O. W. Greenberg and A. M. L. Messiah, Phys. Rev. **138** (1965) B1155.
- [13] A. S. Barabash, A. D. Dolgov, R. Dvornický, F. Šimkovic and A. Yu. Smirnov, Nucl. Phys. B **783** (2007) 90.

- [14] 阿部龍蔵, “統計力学 第2版”, (1992) 東京大学出版会.
- [15] 井上一, 小山勝二, 高橋忠幸, 水元好彦, “シリーズ現代の天文学第17巻. 宇宙の観測 III 高エネルギー天文学”, (2008) 日本評論社.
- [16] A. Yu. Ignatiev and V. A. Kuzmin, Phys. Lett. A **359** (2006) 26.
- [17] J. D. Vergados, H. Ejiri and F. Šimkovic, Rep. Prog. Phys. **75** (2012) 106301.
- [18] R. Ichimasa, R. Nakamura, M. Hashimoto and K. Arai, Phys. Rev. D **90** (2014) 023527.
- [19] A. D. Dolgov, S. H. Hansen and A. Yu. Smirnov, JCAP **06** (2005) 004.
- [20] E. W. Kolb and M. S. Turner, “The Early Universe”, Addison-Wesley, (1990).
- [21] G. Mangano, G. Miele, S. Pastor, O. Pisanti and S. Sarikas, Phys. Lett. B **708** (2012) 1.
- [22] A. D. Dolgov, S. H. Hansen, S. Pastor, S. T. Petcov, G. G. Raffelt and D. V. Semikoz, Nucl. Phys. B **632** (2002) 363.
- [23] K. N. Abazajian, J. F. Beacom and N. F. Bell, Phys. Rev. D **66** (2002) 013008.
- [24] Y. Y. Y. Wong, Phys. Rev. D **66** (2002) 025015.
- [25] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling and B. P. Flannery, “Numerical recipes in C 2nd edition”, Cambridge University Press, (1992).
- [26] D. J. Schwarz and M. Stuke, JCAP **11** (2009) 025.
- [27] K. A. Olive, et.al., (Particle Data Group), Chin. Phys. C **38** (2014) 090001.
- [28] E. Giusarma, E. D. Valentino, M. Lattanzi, A. Melchiorri and O. Mena, Phys. Rev. D **90** (2014) 043507.

- [29] C. L. Bennett, et.al., *Astrophys. J. Suppl.* **208** (2013) 20.
- [30] P. A. R. Ade, et. al. (Planck Collaboration), *Astron. Astrophys.* **571** (2014) A16.
- [31] P. A. R. Ade, et. al. (Planck Collaboration), arXiv:1502.01589v2 (Feb,2015).
- [32] E. W. Kolb and S. Wolfram, *Nucl. Phys. B* **172** (1980) 224.
- [33] J. Iizuka and T. Kitabayashi, *Mod. Phys. Lett. A* **30** (2015) 1550003.
- [34] G. Steigman, “Neutrinos and big bang nucleosynthesis”, *Adv. High Energy Phys.* 2012, 268321 (2012).
- [35] Semikoz and Tkachev, *Phys. Rev. Lett.* **74** (1995) 3093.
- [36] H. E. Haber and H. A. Weldon, *Phys. Rev. Lett.* **46** (1981) 1497.
- [37] H.-S. Kang and G. Steigman, *Nucl. Phys. B* **372** (1992) 494.
- [38] P. B. Pal and K. Kar, *Phys. Lett. B* **451** (1999) 136.
- [39] J. Lesgourgues and S. Pastor, *Phys. Rev. D* **60** (1999) 103521.
- [40] S. H. Hansen, G. Mangano, A. Melchiorri, G. Miele and O. Pisanti, *Phys. Rev. D* **65** (2001) 023511.
- [41] P. D. Serpico and G. G. Raffelt, *Phys. Rev. D* **71** (2005) 127301.
- [42] V. Simha and G. Steigman, *JCAP* **08** (2008) 011.
- [43] J. Gava and C. Volpe, *Nucl. Phys. B* **837** (2010) 50.
- [44] H. E. Haber and H. A. Weldon, *J. Math. Phys.* **23** (1982) 1852.
- [45] L. Salasnich, *Nuovo Cimento* **117B** (2002) 637.
- [46] K. Freese, E. W. Kolb and M. S. Turner, *Phys. Rev. D* **27** (1983) 1689.
- [47] S. Davidson, E. Nardi and Y. Nir, *Phys. Rep.* **466** (2008) 105.
- [48] K. Ichikawa and M. Kawasaki, *Phys. Lett. B* **570** (2003) 154.

刊行論文一覧

[i] K. Yamada, T. Uchida, J. Iizuka, M. Fujita, T. Toyoda, “The magnetic induction dependence of the quantum Hall resistivity of graphene two-dimensional electron system”, *Solid State Communications* 155 (2013) 79.

[ii] 金子喜和, 小泉直人, 飯塚純, 北林照幸, 安江正樹, “修正 bipair ニュートリノ混合による初期宇宙でのフレーバー依存型レプトジェネシス”, *東海大学理学部紀要* 49 (2014) 91.

[iii] J. Iizuka, Y. Kaneko, T. Kitabayashi, N. Koizumi, M. Yasuè “CP violation in modified bipair neutrino mixing and leptogenesis”, *Physics Letters B* 732 (2014) 191.

[iv] J. Iizuka, T. Kitabayashi, “Fermi-Boltzmann statistics of neutrinos and relativistic effective degrees of freedom in the early universe”, *Modern Physics Letters A* 30 (2015) 1550003.

[v] J. Iizuka, T. Kitabayashi, Y. Minagawa, M. Yasuè, “Parametrization of Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata mixing matrix based on CP-violating bipair neutrino mixing”, *Modern Physics Letters A* 30 (2015) 1550019.

[vi] J. Iizuka, T. Kitabayashi, “Fermi-Boltzmann statistics of neutrinos and relativistic effective degrees of freedom in the early universe”, *Proceedings of Flavor Physics & CP violation 2015, May 25-29, 2015, Nagoya, Japan, PoS(FPCP2015)066*.

[vii] J. Iizuka, T. Kitabayashi, “Statistics of neutrinos and relativistic effective degrees of freedom in the early universe”, *Physics of the Dark Universe* 11 (2016) 54.

[viii] J. Iizuka, T. Kitabayashi, “Relativistic effective degrees of freedom and quantum statistics of neutrinos”, *Modern Physics Letters A* 32 (2017) 1750069.