

東海大学大学院平成 26 年度学位申請論文

化学ロケットの振動燃焼に関する理論的研究

森田 貴和

## 目次

### 論文の要旨

### 第1章 緒言

1.1 本研究の背景	2
1.2 本研究の目的と概要	4
参考文献	10

### 第2章 固体ロケットの $L^*$ -不安定に関する解析

2.1 まえがき	12
2.2 解析対象	14
2.3 準一次元流の支配方程式	14
2.4 $L^*$ バーナー方程式	16
2.5 固体推進薬の非定常・非線形燃焼方程式	17
2.6 $L^*$ 振動の計算結果	18
2.7 数値流体力学による計算結果と $L^*$ バーナー理論との比較	20
2.8 $L^*$ -不安定に及ぼす固体推進薬のパラメータの影響	21
2.9 まとめ	23
記号表	24
参考文献	32

### 第3章 ハイブリッドロケットの燃料後退速度に関する解析

3.1 まえがき	34
3.2 境界層燃焼に適合したアナログ	34
3.3 プラントル数の影響を考慮した燃料後退速度	39
3.4 境界層内の火炎面の位置	43
3.5 まとめ	45

記号表	47
参考文献	53
第4章 バルクモードを仮定したハイブリッドロケットの低周波燃焼不安定の線形安定性解析	
4.1 まえがき	55
4.2 低周波燃焼不安定の線形安定性解析	56
4.3 内部安定性に基づく増幅係数	58
4.4 安定限界および中立振動の周波数	59
4.5 推進薬ガス滞留時間と酸化剤の燃焼時間遅れ	60
4.6 ハイブリッドロケットの燃焼実験との比較	62
4.7 まとめ	63
記号表	64
参考文献	69
第5章 軸方向の物理量の変化を考慮したハイブリッドロケットの低周波燃焼不安定の線形安定性解析	
5.1 まえがき	71
5.2 燃料ポート部のガスの支配方程式に対する摂動展開	71
5.3 前部, 後部燃焼室およびノズルの支配方程式に対する摂動展開	74
5.4 ポートと前部, 後部燃焼室の摂動方程式の結合	76
5.5 線形安定限界と中立振動の周波数	79
5.6 線形安定性解析による計算結果	80
5.7 LOX/PMMA ハイブリッドロケットエンジンの燃焼実験との比較	82
5.8 まとめ	84
記号表	86
参考文献	96

謝辭

## 論文の要旨

固体推進薬は高エネルギー化に向けて不断の研究開発が続けられている。これにより推進性能等は向上するであろうが、高エネルギー化したことにより振動燃焼が発生しやすくなると考えられる。また将来的には上段固体モータにおいてスペースデブリ低減の観点からアルミ粒子の使用が規制されることが想定される。したがって、アルミナ粒子の使用が制限されることにより以前には問題とならなかった状況下でも振動燃焼が発生するようになると思われる。一方、固体ロケットは構造が簡単で信頼性も高いことからマイクロスラスターへの適用に向けても研究が進められており、将来超小型人工衛星の姿勢制御等への応用が考えられている。ただし、従来型の固体ロケットと比べノズルなどの構造に制約が生じやすいため、その振動燃焼特性も異なると思われる。これらのことにより現在および将来に亘って固体ロケットの振動燃焼の理解と対策の重要性はますます増大すると考えられる。

ハイブリッドロケットは安全で安価であることから、民間企業や大学をはじめとして実用や教育における取り組みが盛んに行われている。ただし、同ロケットの構想は以前から存在するものの、その実用化を妨げているのが、燃料後退速度の低さ、燃焼効率の低さ、振動燃焼の存在などである。中でも、振動燃焼の問題はその種類が多岐に渡っているため調べる内容がいろいろとあり、未解明の問題も多い。特に理論的研究は固体ロケットと比べると未だ十分ではない。

本論文では、固体ロケットに関してはノズルレスロケットモータを含む小型モータを対象に燃焼室内の流れが  $L^*$ 燃焼不安定に及ぼす影響について数値解析を行った。そこで得られた線形安定限界よりモータ内部の流れが速くなるにつれて安定性が増大する傾向があることが分かった。燃焼圧が低下すると圧力振動の非線形性が表出してきたりリミットサイクルや消炎が発生したりする。本研究では  $L^*$ バーナーに対し、これら挙動を数値シミュレーションして消炎曲線を求めた。この研究に関しては将来の超小型衛星の姿勢制御などへの適用が考えられるマイクロスラスターの燃焼安定性を解明するのに役立つと考えられる。

ハイブリッドロケットに関しては、まず振動燃焼の基盤となる定常燃焼特性の重要な要素である燃料後退速度について理論的な研究を行った。具体的には境界層燃焼に適合した運動量輸送と熱輸送のアナロジを求め、これを利用して燃料後退速度式を導出し、その燃焼特性を理論的に求め実験値と比較した。また、モータ内の熱損失等を考慮した時の液体酸化剤の燃焼時間遅れによる低周波燃焼不安定の線形安定性解析を行った。これにより振動周波数や線形安定限界を求め、実験結果と比較した。これにより従来ハイブリッドロケットの振動燃焼、特にバルクモードでの特性がより詳細に理解できるようになった。また、燃料後退速度を導出する際に用いられたアナロジは今後燃焼応答関数などを求める際に利用することが可能である。

# 第 1 章 緒言

## 1.1 本研究の背景 —— 化学ロケットの振動燃焼

推進薬が化学反応を起こして高温のガスを発生し、ノズルを利用してその高速噴流を生み出し、その反作用として推力を得るロケットを総称して化学ロケットと呼んでいる。使用する推進薬において燃料と酸化剤が共に固体のものを固体ロケット、液体のものを液体ロケットという。燃料および酸化剤の相が異なるものはハイブリッドロケットと呼ばれている。特にロケットの原動機部分はエンジンまたはモータと呼ぶことがあるが、図 1.1 から 1.3 にかけて上記の各ロケットの原動機部分についてその基本的な構造を示す。また、推進性能、制御性能、環境適合性などに対してこれらのロケットについて概ねに評価した結果を表 1.1 に示す[1-1, 2, 3]。

固体ロケットは推力を大きくすることが可能なことから、永らく打ち上げロケットのブースター等に用いられており、一般に完成度も高いと考えられている。ただし、打ち上げ要求が高度になるにつれ高性能なロケットモータが要求され、そのため推進薬は高エネルギー化に向けてたゆまず研究開発が続けられている。これにより推進性能等は向上するであろうが、高エネルギー化したことにより振動燃焼が発生しやすくなる。また将来的には上段固体モータにおいてスペースデブリ低減の観点からアルミ粒子の使用が規制されることが想定される。アルミ粒子は助燃剤として大きな熱源になっているだけでなく、燃焼室内部に浮遊するアルミナ粒子がそこで発生する音響振動を抑制するという役目も果たしており、実際これにより固体ロケットの振動燃焼の問題はかなり軽減されてきた。したがって、アルミナ粒子の使用が制限されることにより以前には問題とならなかった状況下でも振動燃焼が発生するようになると思われる。

一方、固体ロケットは構造が簡単で信頼性も高いことからマイクロスラスターへの適用に向けても研究が進められており、超小型人工衛星の姿勢制御への応用等が考えられている。ただし、従来型の固体ロケットと比べノズルなどの構造に制約が生じやすいため、その振動燃焼特性も自ずと異なってくると思われる。これらの事情により今後も固体ロケットの振動燃焼の理解と対策の重要性はますます増大すると考えられる。



固体ロケットモータの燃焼不安定は、音響的燃焼不安定(acoustic combustion instability)と非音響的燃焼不安定(non-acoustic combustion instability)の二つに大別される。音響的燃焼不安定は燃焼室固有の音響振動と固体推進薬の燃焼のカップリングによって生じるものであり、さらに周波数の比較的低い軸方向モードと高周波振動の半径方向モードや接線方向モードに分かれる。一方、非音響的燃焼不安定はチャフティングと低周波燃焼不安定、衝撃波により誘起される不安定、内部流の剥離に伴う不安定(vortex shedding による不安定)、渦流動を伴う不安定などがあり、これらは周波数的には低い部類に入る。

現在主流の固体推進薬は過塩素酸アンモニウムを含んでいるため燃焼生成物に塩酸や塩素ガス、固体微粒子を高濃度で含み、大気汚染やオゾン層の破壊、さらにはスペースデブリの増大が懸念されている。これに対してハイブリッドロケットの燃料は主に酸素と高分子系燃料が用いられるため上記のような懸念が少なく環境にやさしい。またハイブリッドロケットの燃料は一般に火薬類ではないため、ロケット製造時や運搬時の安全管理や設備の簡素化をもたらし、運用時の危険性を低減させる。その上、かなり低いとされる TNT 換算率により警戒区域を縮小することが可能である。これらにより、製造コストの低減、および製造期間の短縮、打ち上げ準備期間が短縮される。このようにハイブリッドロケットは安全で安価であることから、民間企業や大学をはじめとして実用や教育における取り組みが盛んに行われている。ただし、ハイブリッドロケットは、安全性、経済性、低公害等の観点から長らく研究開発が進められてきたが、比較的最近まで実用化に到る例は少なかった。それは同ロケット特有の境界層拡散燃焼といった形態に起因する燃料後退速度や燃焼効率の低さ、および振動燃焼の問題等を有していたからである。近年、燃料後退速度については技術的な試みが国内外で活発に進められ、その結果かなり改善されてきている。それに対し、ハイブリッドロケットの燃料後退速度に関する理論的な研究は様々な燃焼機構が存在するために、理論と実験の比較は十分ではない。また、燃焼効率の低さについては技術的に幾つかの改善策が立てられ、研究が進められている。一方で、燃焼安定性の評価等については固体ロケット程、十分に検討されているわけではな

い。振動燃焼の問題はその種類が多岐に渡っているため調べる内容がいろいろとあり、解明すべき点も多い。具体的には酸化剤供給系と燃焼のカップリングによるチャッキング、低い燃料後退速度での炭化層形成と分離によって生じるチャフイング、境界層燃焼における遅れに起因する低周波燃焼不安定、バルクモードで低周波数の  $L^*$ -不安定、燃焼室に生じる渦により励起される燃焼振動、各種のモードでの音響的燃焼不安定などがある。

## 1.2 本研究の目的と概要

ハイブリッドロケットの非定常燃焼に関する理論的研究は少なく、更なる研究が必要である[1-4, 5]。非定常燃焼は、定常燃焼に関する知識を基に展開されるため燃料後退速度等の定常燃焼特性に関する理論的な検討も必要である。本論文では、境界層燃焼に適合した運動量輸送と熱輸送のアナログを求め、これを利用してハイブリッドロケットの燃料後退速度式を導出し、その燃焼特性を理論的に求め、実験値と比較した。これらの知見は燃焼応答関数を求める際に有効となる。また、深宇宙では推進薬の温度管理の観点から重力天体の探査機のエンジンとして小型のハイブリッドロケットの採用が考えられるが、このとき小型モータにバルクモードの低周波燃焼不安定が発生する可能性がある。本研究ではこれに関してハイブリッドロケットモータ内の熱損失等を考慮した時の液体酸化剤の燃焼時間遅れによる低周波燃焼不安定の線形安定性解析を行った。これにより振動周波数や安定限界を求め、実験結果と比較した。

一方、固体ロケットにおいては非定常燃焼に関して多くの理論的研究がある。固体推進薬の非定常燃焼については ZN 法(Zeldovich-Novozhilov method)[1-6]や FM 法(flame modeling method)[1-7]に関する研究があり、中でも FM 法の一つである判澤の準定常火炎モデルは反応性流体力学に忠実に基づいているため、他と比べて優れている[1-8]。固体ロケットモータの音響的燃焼不安定については、Culick らの理論が有名である[1-9]。反対に非音響的燃焼不安定、特に  $L^*$ -不安定の理論については秋葉らによって先駆的な研究がなされた[1-10]。著者も微力ながら固体ロケットにおける非定常燃焼に

ついて幾つかの研究に取り組んできた[1-11, 12, 13, 14]. ただし, ノズルレスロケットモータの燃焼不安定の研究例は比較的少ない[1-15, 16]. ノズルレスロケットモータは内部流が他のモータと比べて高速になっているため, 流れ場の影響が無視できないと考えられている. 本論文ではこのことを主眼に置いて燃焼室内の流れ場が  $L^*$ -不安定に及ぼす影響について数値解析を行った. ノズルレスロケットモータは構造が簡単であることからモータの構造に制約が生じやすいマイクロスラスタへの適用が容易と考えられ, そこで生じる燃焼不安定に対する知見を深めることが可能になる. 以下に, 本文中の各章の内容について詳しく説明する.

第 2 章では, 固体ロケットモータ内に高速流がある場合のバルクモードの低周波燃焼不安定の特徴を数値的に求めた. 数値解法としては, 燃焼室内のガスに対するオイラー方程式を有限体積法で, 固体推進薬内部の非定常熱伝導方程式を有限差分法で解いた. そして, それらの結果は全ての物理量が燃焼室内で空間的に一様であると仮定した  $L^*$ バーナー方程式を解いて得られた結果と比較した. モータ内の流れが速い場合であっても燃焼室の前端と後端の定常圧力の差を考慮することで, 両者の計算から得られた線形安定限界はよく一致した. 定常燃焼の作動条件が不安定領域の中でも安定限界に近い時は, 微小振動はまず成長し, その後リミットサイクルに移行する. 一方, 安定限界から遠い場合は微小振動は成長した後一時的な消炎を引き起こす. CFD により得られた  $L^*$ 振動の周波数は,  $L^*$ バーナー方程式を解いて得られた周波数とよく一致した.

第 3 章では, 従来型ハイブリッドロケットの燃料後退速度のモデルに関する研究を扱う. 標準的な燃料後退速度のモデルとされているものに Marxman らの式があるが, 簡単化のためにプラントル数および乱流プラントル数を共に 1 においたレイノルズのアナログを使用している. 過去の研究では, プラントル数の効果を考慮したものが幾つか存在するが, それらの多くが境界層内の火炎の影響を考慮しておらず, 相似性が崩れた火炎の後流部分に対してもアナログを適用している. これに対し本研究はこれらの影響を考慮し, ハイブリッドロケットの燃焼に適切に応用した. このモデルを用いて上記の無次元数が燃料後退速度に及ぼす影響を調べた. また, 燃料後退速度の指数が実験上

Marxman らの理論値 0.8 よりしばしば低いことが GOX/PMMA のハイブリッドロケットにおいてみられるが、本研究によりその傾向が理論的に示された。さらに、Marxman らの GOX/PMMA を使った従来型ハイブリッドロケットの実験結果と比較し、よく一致することを確認した。上記の燃料後退速度のモデルを求める際に、湧き出しのある平板上の境界層について運動量輸送と熱輸送のアナロジを導出したが、これは火災等の境界層燃焼を取り扱う際にも有効な手段となることが期待される。

第 4 章では、バルクモードとみなせる場合の液体酸化剤の燃焼時間遅れに起因する振動燃焼について述べる。従来の研究はチャンバー内のガスに対し等温過程で記述しているが、振動数の増大や壁面での熱損失等により実際にはポリトロップ過程であると考えられ、本研究ではその効果を導入した。また、従来の研究は安定限界等を計算するには若干計算が面倒であったが、本研究ではバルクモードでの安定限界を表す式を簡潔な形に導き、一般的な形に整理した。また LOX/PMMA を使った酸化剤旋回流型ハイブリッドロケットの実験結果と比較し、振動周波数に対しては理論と一致することを確認した。従来の研究では実験との比較があまりなされていなかったため、液体酸化剤の燃焼時間遅れや推進薬ガス滞留時間の実験的評価は十分に行われていなかった。本研究ではこれらの数値の評価方法を検討し、その上で実験との比較を行っている。さらに、安定限界については理論的な結果と定性的に適合していることを確認した。

第 5 章では、機軸方向の変化を考慮した液体酸化剤の燃焼時間遅れに起因する振動燃焼について述べる。従来の研究はバルクモードの仮定に基づくものが主流であったが、本研究ではチャンバー内の質量保存則だけでなく運動量保存則とポリトロップ変化の式を合わせて解くことで液体酸化剤の燃焼時間遅れに起因する振動燃焼の線形安定性解析を行った。ポート長が長く、機軸方向に物理量に変化するような場合はバルクモードの仮定が不適切となるが、本研究によりそのような場合に対しても合理的に取り扱うことが可能となった。この方法を使って供給系やモータの形状の変更等による振動燃焼特性の変化を調べた。特に、小型のモータにおいて液体酸化剤の燃焼時間遅れが大きい場合についてはバルクモードとの違いは十分小さいことが分かった。また、実験結果と比較し

た結果, 振動周波数は理論と一致し, 安定限界については定性的に適合した. ここでの成果はハイブリッドロケットのみならず, 固体ロケットの振動燃焼の問題にも応用されている[1-17, 18, 19].

第 6 章では, 各章の結果についてまとめ, 本論文の結論を述べた.

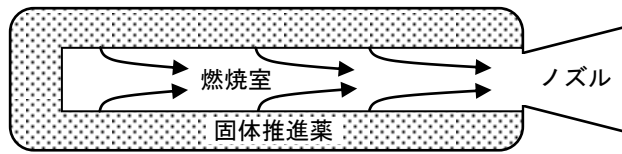


図 1.1 固体ロケットモータの概略図

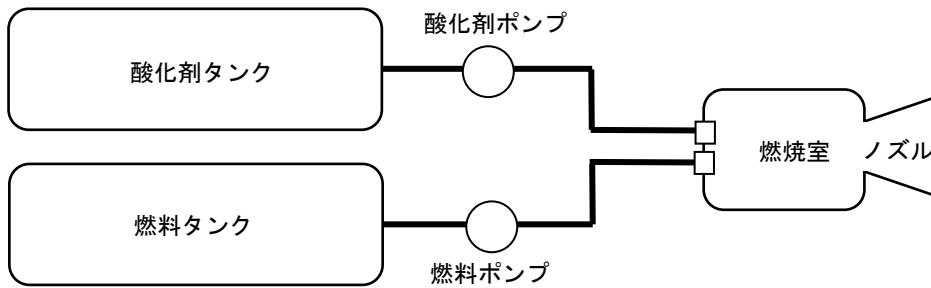


図 1.2 ポンプ方式の液体ロケットエンジンの概略図

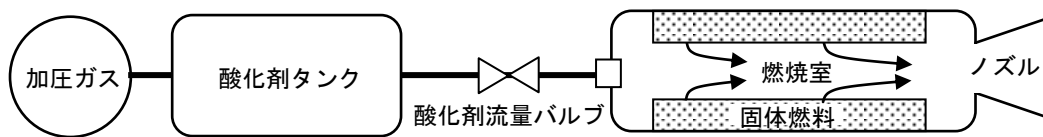


図 1.3 タンク加圧方式のハイブリッドロケットモータの概略図

表 1.1 化学ロケットの推進系の評価

化学ロケット	固体	液体	ハイブリッド
比推力	○	◎	○
密度	◎	○	○
燃焼効率	◎	◎	●
環境汚染	●	◎	◎
ジェット騒音	●	●	●
安全性	●	●	◎
加速度	◎	○	○
開発費	◎	●	○
打上げ費	○	◎	○
残留推進薬の量	少	少	多
推力方向制御	可	可	可
推力大きさ制御	不可	可	可
比推力の制御	不可	可	不可

(評価) ◎：優, ○：良, ●：可

## 1章 参考文献

- [1-1] Sutton, G. P., and Biblarz, O.: *Rocket Propulsion Elements*, 7th ed., John Wiley & Sons, 2001.
- [1-2] 木村逸郎: *ロケット工学*, 養賢堂, 1993.
- [1-3] 秋葉鎌二郎: *ロケット技術と有人宇宙輸送への課題*, *機械の研究*, 第48巻, 第1号, pp. 71-79.
- [1-4] Karabeyoglu, A., Stevens, J., and Cantwell, B.: *Investigation of Feed System Coupled Low Frequency Combustion Instabilities in Hybrid Rockets*, AIAA Paper 2007-5366, 2007.
- [1-5] Karabeyoglu, M. A.: *Transient Combustion in Hybrid Rockets*, Ph.D. Dissertation, Stanford University, Dept. of Aeronautics and Astronautics, 1998.
- [1-6] Novozhilov, B. V.: *Theory of Nonsteady Burning and Combustion Stability of Solid Propellants by the Zeldovich-Novozhilov Method*, *Non-steady Burning and Combustion Stability of Solid Propellants*, edited by L. De Luca, E. W. Price and M. Summerfield, Vol.143, *Progress in Astronautics and Aeronautics*, AIAA, pp. 601-641, 1992.
- [1-7] De Luca, L.: *Theory of Nonsteady Burning and Combustion Stability of Solid Propellants by Flame Models*, *Non-steady Burning and Combustion Stability of Solid Propellants*, edited by L. De Luca, E. W. Price and M. Summerfield, Vol.143, *Progress in Astronautics and Aeronautics*, AIAA, pp. 519-600, 1992.
- [1-8] Hanzawa M.: *A Theoretical Study on the Extinction of Solid Propellants by a Rapid Pressure Decay*, Doctoral Thesis, Tokyo University, 1975.
- [1-9] Culick, F. E. C., and Yang, V.: *Prediction of the Stability of Unsteady Motions in Solid-Propellant Rocket Motors*, *Non-steady Burning and Combustion Stability of Solid Propellants*, edited by L. De Luca, E. W. Price and M. Summerfield, Vol.143, *Progress in Astronautics and Aeronautics*, AIAA, pp. 719-779, 1992.
- [1-10] Akiba R., and Tanno M.: *Low Frequency Instability in Solid Propellant Rocket Motors*, *Proceedings of the First International Symposium on Rockets and Astronautics*, Tokyo, Japan, pp. 74-82, 1959.
- [1-11] 森田貴和, 判澤正久, 加藤一成: *いくつかの固体モータ内音波増幅係数評価式の比較解析*, *東海大学工学部紀要*, Vol.24, No.1, pp.211-216, 1984.
- [1-12] 森田貴和, 判澤正久: *固体推進薬の着火特性に関する数値解析*, *東海大学工学部紀要*, Vol.30, No.1, p.185-195, 1990.
- [1-13] 森田貴和, 高野雅弘, 山本洋一, 判澤正久: *上段固体ロケットモータの残留推力に関する考察*, *東海大学工学部紀要*, Vol.32, No.1, pp.293-304, 1992.
- [1-14] 森田貴和, 鈴木啓介: *固体推進薬の気相非定常過程を考慮した放射応答関数の線形解析*, *東海大学工学部紀要*, Vol.39, No.1, pp.205-210, 1999.
- [1-15] Tanaka M., and Nakaji K.: *An Experimental Study on Low-Frequency Combustion Instability of Composite Propellants*, *AIAA Paper*, 98-3552, 1998.
- [1-16] 田中雅文, 中路和法: *ノズルレスロケットモータにおける低周波振動燃焼の理論解析*, *火薬学会誌*, Vol.62, No.3, pp. 126-131, 2001.
- [1-17] 森田貴和, 徳留真一郎, 矢代顕慎, 中野信之, 反野晴仁: *トロイダル点火器における振動燃焼に関する考察*, *平成 22 年度宇宙輸送シンポジウム*, SCTP-2010-059, 2011.
- [1-18] 森田貴和, 福地亜宝郎, 小田島広明, 大野健: *固体ロケットモータの機軸方向速度振動により励起される振動燃焼に関する研究*, *平成 23 年度宇宙輸送シンポジウム*, STCP-2011-010, 2012.
- [1-19] 森田貴和, 臼井雄太郎, 藤松清人, 山本研吾, 福地亜宝郎: *機軸方向のモードを有する固体ロケットの音響的な振動燃焼に関する解析*, *平成 25 年度宇宙輸送シンポジウム*, STCP-2013-058, 2014.



## 第 2 章

### 固体ロケットモータの $L^*$ -不安定に関する解析

## 2.1 まえがき

固体ロケットの燃焼圧はしばしば振動的挙動を引き起こすことがある。これはチャンバー内のガス力学とグレインを構成する固体推進薬の非定常燃焼のカップリングから生じる不安定である。したがって、モータ設計の初期の段階で振動燃焼が発生するかもしれないかを予測することは重要である。アルミ粒子を多く含有するコンポジット推進薬を使用した固体モータにおいては、高周波振動は燃焼ガス中に含まれる小さい粒子によりすみやかに減衰させられる。したがって、高周波振動に関しては今ではあまり問題では無くなっているが、数百 Hz 以下の低周波振動の方は依然として解決すべき問題として残っている。低周波燃焼不安定は、一般的に軸方向モードの音響的燃焼不安定とバルクモードの非音響的燃焼不安定 ( $L^*$ -不安定) に分けられる。 $L^*$ 振動は当該モータの  $L^*$  と呼ばれる特性長が短く、定常燃焼圧が低い時に発生する。ただし、 $L^*$ 振動は軸方向の 0 次の音響振動と解釈できるので、広義の意味でそれらを区別する必要は無い[2-1]。本研究では、特にこの  $L^*$ -不安定について着目するが、このタイプの振動燃焼は通常小型の固体ロケットモータで発生することが多い。

超小型衛星の姿勢制御等にマイクロスラスタが使われているが、構造が簡単で製作し易く、長期保存も可能であることから小型の固体モータが有効である。ただし、ノズル部の耐熱性や微細加工などの問題からノズルレスロケットモータを採用することが少なくないと思われる。また、ミサイル等にも応用されている。このノズルレスロケットモータはチョークする場所が燃焼室出口付近になるため、内部の流れは高速になる。

軸方向の音響的燃焼不安定を予測するために、モータ内の非定常流の保存方程式に基づく線形安定性解析が開発されてきた[2-2]。しかし、これらの手法がモータ内の高速流に適用できるかどうかについては未だ不明な点が多い。また、昨今のコンピュータの急速な発達に伴い CFD 技術による非線形な支配方程式の直接解法が、微小擾乱の時の解析も含め、有力な解析手法となってきている。したがって、本研究では、線形・非線形を問わず解析できる CFD 技術を用いてモータの安定性を調べることにした。なお本手法では、境界条件として超音速ノズルの入口部を採用する代わりにその出

口部まで計算領域を伸ばしている。こうすることにより音波の反射等の問題を解決し、境界条件を簡単にするという利点が生じる。その上、この手法は適切な非線形・非定常燃焼モデルが作成できれば、モータの点火過程を模擬することも可能になると思われる[2-3]。固体ロケットモータの燃焼のシミュレーションを様々な条件下で実行するために CFD コードを開発し、そしてモータ内に高速流が生じている時の線形的な軸方向モードの音響的燃焼不安定に適用した[2-4]。さらに、その後の研究により三次元に拡張されている[2-5]。一方、 $L^*$ -不安定自体はこれまでに多くの研究者により調べられてきた。これらの研究は共通して以下の仮定に基づいている。

- 1) モータ内には定常流はない
- 2) 音波の伝播時間は、内圧振動の周期と比べて十分小さい。

ただし、モータ内部に高速流が生じた場合、モータの定常内圧はノズル入口部に向かって減少する。この影響は、流れのマッハ数が増大すると共に大きくなる。したがって、これらの場合では最初の仮定は保たれない。

本研究では、固体ロケットモータ内に高速流がある場合のバルクモードの低周波燃焼不安定の特徴を数値的に求めた。その際、固体ロケットモータの音響的燃焼不安定を調べるのに使われた CFD コードを用いた。数値解法としては、燃焼室内のガスに対するオイラー方程式を有限体積法で、固体推進薬内部の非定常熱伝導方程式を有限差分法で解いた。そして、それらの結果は燃焼室内の物理量が空間的に一様であると仮定した  $L^*$ -バーナー方程式を解いて得られた結果と比較した。モータ内の流れが速い場合であっても燃焼室の前端と後端の定常圧力の差を考慮することで、両者の計算から得られた線形安定限界はよく一致した。定常燃焼の作動条件が不安定領域の中でも安定限界に近い時は、微小振動はまず成長し、その後リミットサイクルに移行する。一方で安定限界から遠い場合は、微小振動は成長した後、一時的な消炎を引き起こす。CFD により得られた  $L^*$ 振動の周波数は、 $L^*$ -バーナー方程式を解いて得られた周波数とよく一致した。

## 2.2 解析対象

本研究で扱う固体ロケットモータの概略図を図 2.1 に示す。簡単化のために、ポート断面は軸方向に一樣とする。また、計算対象とする時間は比較的短いので、ポート断面は時間的に変化しないものとする。モータの機軸方向に  $x$  軸を取り、燃焼室前端で  $x=0$ 、ノズル入口部で  $x=L$  とおく。グレインは内面燃焼型で、 $x=0$  から  $x=L$  の所まで推進薬が充填されている。また、ポート断面はノズル入口部で滑らかに接続されているものとする。本研究では、二つのタイプの気体力学方程式を使用する。一つは固体推進薬の燃焼による質量付加の項を持つ非定常のオイラー方程式で、もう一つは燃焼室内の流れの効果を無視した  $L^*$ バーナー方程式である。

## 2.3 準一次元流の支配方程式

機軸方向に座標を取った準一次元の連続の式、運動量保存式、エネルギー保存式は以下のように表される。

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} = S \quad (2.1)$$

ここで、

$$Q = \begin{pmatrix} \rho A_p \\ \rho u A_p \\ e A_p \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} \rho u A_p \\ (\rho u^2 + p) A_p \\ (e + p) u A_p \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} l_p \dot{m}_s \\ p \frac{dA_p}{dx} \\ l_p \dot{m}_s c_p T_{fl} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

ここで、 $l_p$  はグレインの周囲長を示している。固体推進薬の表面から湧き出す質量流束  $\dot{m}_s$  と火炎温度  $T_{fl}$  は、後述する非定常燃焼方程式を解くことにより得られる。完全気体では、圧力は次式で評価される。

$$p = (\gamma - 1) \left( e - \frac{1}{2} \rho u^2 \right) \quad (2.3)$$

燃焼室の前端での境界条件は  $u=0$ 、 $\frac{\partial p}{\partial x}=0$ 、 $\frac{\partial T}{\partial x}=0$  とし、 $M > 1$  となるノズル出口では  $\frac{\partial u}{\partial x}=0$  と

おいた。上記のチャンバーの支配方程式は有限体積法を用いて離散化したが、対流項の評価方法としては AUSM (Advection Upstream Splitting Method)の発展形の一つである一粒子的風上法を用いた [2-6]。セル境界面での圧力、密度、流速の値は MUSCL 法を用いて三次の空間精度で計算した。ここで、Van Albada の制限関数を使用した。時間積分の手法については陰解法の LU-ADI法を用いた。一般的に、非定常問題においては時間積分の方法として陽的なルンゲ-クッタ法が使用されることが多いが、この場合、時間刻みが細かくなり、なおかつ多段階の積分を行うことから演算時間が飛躍的に掛かる。一般に速い現象を対象とした場合は時間精度が問題となるが、 $L^*$ 振動等の現象は物理的にゆっくりとした現象のために、時間精度をあまり高めなくても最終的な特性については影響が少ない。このことは著者らの計算で確認されている。また多数のケースについて計算を行う必要から本研究では時間刻みを大きく取れる陰解法を採用した。一方、空間精度を高く保つために格子間隔はノズルにおいて短く取った。これと格子点の取り方を簡単にするため等間隔の格子を使い、燃焼室は比較的粗くノズル部は細かいものを使った。格子間隔の粗い燃焼室と細かいノズルをうまく接続させるために、燃焼室の最後の格子は、より細かいノズルの格子間隔で再分割されて構成されている。標準的なケースでは、燃焼室に 200 点、ノズル部に 800 点の格子を設定している。簡単な手法ではあるが、これにより空間精度は十分なものになっている。なおソース項についてはすべて陽的に計算している。今回の計算ではポート部で断面積は一樣と仮定しているため、ソース項の中でも断面積の変化を含む項については 0 となる。ノズル部については断面積を適当な多項式で表し、それを解析的に微分することによりその値を求めている。本計算では、適当な流れ(初期条件)を課して支配方程式を数値的に解いて定常流まで十分に発達させた後、微小擾乱を加えてそれが増幅するか減衰するかについて調べた。

## 2.4 $L^*$ バーナー方程式

後述する燃焼室の連続の式とエネルギー保存式は、 $L^*$ -不安定を解析するためによく用いられる。

ここで、燃焼室内の定常流の影響は小さいものとして無視し、圧力と温度はその中で一様と仮定する。このような近似を用いた  $L^*$ -不安定の線形安定性解析は、これに関する研究の初期の頃から存在し、 $L^*$ バーナー理論とも呼ばれている。この  $L^*$ バーナー理論と CFD による数値解とを比較するため、以下の支配方程式は非定常燃焼方程式と共に数値的に積分される。

$$\frac{d}{dt}(\rho V) = \dot{m}_s A_b - \frac{1}{c^*} A_t p \quad (2.4)$$

エネルギー保存式は以下のように表される。

$$\frac{d}{dt}(\rho V c_v T) = \dot{m}_s A_b c_p T_{fl} - \frac{1}{c^*} A_t p c_p T \quad (2.5)$$

ここで、 $A_b$  は固体推進薬の燃焼面積を表す。また特性排気速度に関しては一次元ノズル理論により、以下の式が成り立つ。

$$c^* = \frac{\sqrt{\gamma R T}}{\gamma \sqrt{\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}}} \quad (2.6)$$

なお上記のエネルギー保存式は、しばしば気体の等温変化、または断熱変化の式で置き換えられる場合がある。

## 2.5 固体推進薬の非定常・非線形燃焼方程式

特殊な例を除けば、固体推進薬の非定常燃焼における律束段階は、固相の非定常熱伝導によるものとみられており、気相火炎と表面反応は準定常であると仮定される。この仮定は一般的に QSHOD (quasi-steady, homogeneous, one-dimensional) 火炎モデルと呼ばれ、多くの研究者によって様々なモデルが提案されている。ただし、気相反応のモデル化については研究者によりその取り扱いが異なる。固相の一次元熱伝導方程式は以下のように表される。

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \dot{r} \frac{\partial T}{\partial y} - \alpha_c \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (y < 0) \quad (2.7)$$

ここで、 $\dot{r}$  は固体推進薬の線燃焼速度、 $\alpha_c$  は固体推進薬の熱拡散率を表す。線燃焼速度は、圧力に依

存しないアレニウス型の反応速度式で表される.

$$\dot{r} = A_s \exp\left(-\frac{E_s}{R_u T_s}\right) \quad (2.8)$$

ここで,  $A_s$  は前指数因子,  $E_s$  は表面反応の活性化エネルギーで, それぞれ固体推進薬固有の値である. 火炎から固相表面に加わる熱流束は以下のように表される[2-7].

$$\lambda_g \left[ \frac{\partial T}{\partial y} \right]_{0+} = K_p \frac{p^\nu (T_{fl} - T_s)^\sigma}{\dot{r}} \quad (2.9)$$

ここで,  $K_p$  は 推進薬の組成に依存する定数で, 定常燃焼の固有値に当たる. また  $\sigma = \nu + \beta + 1$  の関係がある.  $\nu$  は総括反応の次数,  $\beta$  は気相反応の活性化エネルギーに相当する. この熱フィードバック則は空間的に分布した気相総括反応をベースとして導かれている. なお,  $\sigma$  の値が大きい場合は薄い火炎または flame sheet に対応しており,  $\sigma = 1$  の場合は空間的に一様に分布する化学反応速度のモデルに相当する. 後者の熱フィードバック則は, L\*-不安定を説明するために Akiba ら[2-8]により初めて用いられたが, Krier らによってコンポジット推進薬の燃焼に対する理論モデルとして導かれたため, しばしば KTSS モデルと呼ばれる[2-9]. 上述の熱フィードバック則は両方のケースを包含している. また, 気相過程を準定常と仮定することにより, 火炎温度は次式を使って求めることができる.

$$T_{fl} - T_s = \frac{1}{\dot{m}_s c_p} \left( \dot{m}_s Q - \lambda_g \left[ \frac{\partial T}{\partial y} \right]_{0+} \right) \quad (2.10)$$

境界条件は以下の通りである.

$$T = T_0 \quad (y \rightarrow -\infty) \quad (2.11)$$

$$T = T_s \quad (y = 0) \quad (2.12)$$

ここで,  $T_s$  は次式で示される固相表面でのエネルギーの釣り合い式によって決定される.

$$\lambda_c \left[ \frac{\partial T}{\partial y} \right]_{0-} = \lambda_g \left[ \frac{\partial T}{\partial y} \right]_{0+} + \rho_c \dot{r} Q_s \quad (y = 0) \quad (2.13)$$

線燃焼速度の圧力依存性は、以下の式でよく近似されることがわかっている。

$$\bar{r} = a\bar{p}^n \quad (2.14)$$

圧力の変化によって引き起こされる非定常な燃焼速度ならびに火炎温度は、上記の一連の支配方程式を初期条件の下で数値的に解くことにより得られる。実際の計算では上記の方程式を基準となる定常燃焼値で無次元化しているため  $\lambda_c, \lambda_g$  の値は不要である。さらに式(2.7)を有限差分法で解くために半無限の物理空間  $[-\infty, 0]$  を有限の計算空間  $[-1, 0]$  に写像した[2-10]。標準的なケースでは計算領域の格子点数は 100 である。本計算で使用した値を表 2.1 に示す。ただし、これらの値は特定の固体推進薬として定めたものではない。

## 2.6 L\*振動の計算結果

本研究では、高速の内部流を有する固体モータの L\*-不安定に対して主として数値流体力学を用いて解析した。大体のケースにおいてノズル入口部のマッハ数を  $\bar{M}_e = 0.4$  においた。比較のために  $\bar{M}_e = 0.05$  と  $\bar{M}_e = 0.995$  の場合についても解析を行った。ノズルスロート面積に対するポート断面積の比によりノズル入口マッハ数が定まり、 $L^*$  の値はこの値とチャンバー長さによって決定される。したがって、 $\bar{M}_e$  と  $L^*$  を一定に保った上でノズルスロート面積を変化させて定常燃焼圧を変更した。モータ長については、 $L = 0.07 \sim 0.6m$  の範囲に設定して計算を行った。定常燃焼圧がある特定の値より高い時、微小擾乱は徐々に減衰した。一方、この臨界値より低い場合は振動は成長した。この振動の形態はバルクモードで、周波数は 15-60Hz だった。これは、相応する音響定在波の基本モード(>1000Hz)と比べて十分低い。図 2.2 の L\*振動( $\bar{p}_f = 0.433$  MPa)は減衰するケースを表しており、図 2.3 の L\*振動 ( $\bar{p}_f = 0.407$  MPa) は増幅する場合である。両方のケースとも  $L^*$  と  $\bar{M}_e$  の値は  $L^* = 0.7m$ ,  $\bar{M}_e = 0.4$  で等しい。この限界圧力は  $\bar{p}_f = 0.418$  MPa である。これは  $L^* = 0.7m$  の時の線形安定限界での圧力値である。ここで、定常燃焼圧が低くなると共に、L\*振動の周波数が少し低下することが見られた。 $\bar{M}_e = 0.4$  の時、圧力分布の時間的な変化を 1 サイクルに渡って描いたものが図



2.4 である。これを見ると、圧力振動の分布は空間的に一様ではなく、ノズル入口付近で曲がっていることが分かる。これは燃焼室前端の圧力振動の振幅と比べて下流側のそれはより小さいことを表している。比較のために、 $\overline{M}_e = 0.05$  の場合を図 2.5 に示す。この場合、圧力振動はほとんど一様になっていることが分かる。この圧力分布の非一様性は、モータ内部の流れのマッハ数が増えるにしたがって大きくなった。元来の  $L^*$ -不安定の理論は定常な内部流を含まず、圧力振動の振幅は空間的に一様であると仮定しているが、上記の結果よりモータ内部の流れが高速である場合はこの仮定は正確ではないことが分かる。図 2.6 から図 2.8 までは  $L^*$  振動の非線形的なふるまいを示している。定常燃焼圧が線形安定限界より低い場合、まず初期に振動は成長していくが、その後の挙動は条件により異なってくる。定常燃焼圧が安定限界に近い場合、図 2.6 に示すように振動は安定なリミットサイクルに移行する。このリミットサイクルは、1 サイクル中のエネルギーの釣り合いから生じる。ここでは、ある 1 サイクルに着目すると、瞬間的な圧力が平均圧より低い半周期では振幅の増大が生じ、瞬間的な圧力が平均圧より高い残りの半周期では減衰する。一方で、二番目の臨界値より圧力がかなり低い場合、振動は一旦成長するが、その後、急減圧により一時消炎を生じる。この様子を図 2.7 に示す。ここで、この二番目の限界線上の圧力を消炎圧力と呼ぶ。これは、固体推進薬単体の特性と  $L^*$  の値に依存する。リミットサイクルに移行する以前に振動発生により引き起こされる減圧率がある値を超えた時、一時的な消炎(temporal extinction)が発生する。定常燃焼圧が消炎限界に近いがまだそれより低くない場合は、リミットサイクルはかなり不安定になる。この様子を図 2.8 に示す。

## 2.7 数値流体力学による計算結果と $L^*$ バーナー理論との比較

本節では、CFD により得られた  $L^*$  振動の特性を  $L^*$ バーナー方程式(2.4), (2.5)を解いた結果と比較する。前節で述べたように、チャンバー内の圧力振動の分布は、内部流のマッハ数が高くなるにつれて変形する。この効果は線形安定限界を変化させる。 $\overline{M}_e = 0.4$  の場合について、 $L^* - p$  平面上にプロットした安定限界線図が図 2.9 である。図中の二つの実線は  $L^*$ バーナー方程式を解いて得られた線

形安定限界と消炎線である。一方でモータ内に速い流れが存在する場合、燃焼室前端とノズル入口部の燃焼圧に圧力差が生じる。ここで、黒丸は燃焼室前端の圧力で、白丸はノズル入口部の圧力を表している。これらの圧力は以下の関係式を満たしている。なお、この式は圧縮性流体力学から容易に導くことができる。

$$\frac{\bar{p}_f - \bar{p}_e}{\bar{p}_e} = \frac{\gamma \bar{M}_e^2}{1 + \gamma \bar{M}_e^2} \quad (2.15)$$

安定限界に関しては、CFD の結果と従来の L\*バーナー理論の間で若干の違いがあることが分かる。

$\bar{M}_e = 0.995$  の場合について図 2.9 の結果と同様のものを図 2.10 に示す。この場合は、内部流が燃焼室のほぼ出口でチョークするノズルレスロケットモータに相当する。図 2.11 は、 $L^*$  と振動周波数の関係を表している。これより  $\bar{M}_e = 0.4$  の場合については、L\*バーナーの線形安定性理論と CFD の結果はよく一致していることが分かる。しかし、 $\bar{M}_e = 0.995$  の場合は、 $L^* - f$  平面上において L\*バーナーの線形解と比べ CFD による数値解の方が周波数的に低くなることが分かる。

## 2.8 L\*-不安定に及ぼす固体推進薬のパラメータの影響

ここでは、古典的な L\*-不安定の線形安定性理論を使って各パラメータが線形安定限界に及ぼす影響を調べることにする。同様の解析により、ノズルレスロケットモータの低周波燃焼不安定を扱った研究があるが、本研究とは計算に用いている固体推進薬の火炎モデルが異なっている[2-11, 12]。固体推進薬の非定常燃焼において圧力振動に対する固相表面の質量流束の応答を表すものに圧力応答関数( pressure-driven frequency response function )がある。Culick の研究によると、多くの圧力応答関数は一般的に以下のように表される[2-13]。

$$R_p = \frac{nAB}{\lambda + \frac{A}{\lambda} - (1+A) + AB} \quad (2.16)$$

ここで、

$$\lambda = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + 4i\omega^*} \right) \quad (2.17)$$

本研究で使用した QSHOD 火炎モデルにより圧力応答関数を導出しパラメータ  $A$ ,  $B$  および  $n$  を求めると、以下のようになる。

$$A = \frac{E_s (\bar{T}_s - T_0)}{R_u \bar{T}_s^2} \quad (2.18)$$

$$B = \frac{1}{A} + \frac{2}{H} \quad (2.19)$$

$$n = \frac{\nu}{2 + \frac{H}{A}} \quad (2.20)$$

ここで、

$$H = \frac{\sigma}{\frac{c_p}{c_c} (\bar{T}_f^* - 1)} + \frac{1}{1 - Q_s^*} \quad (2.21)$$

L\*-不安定の線形安定限界は、式(2.4)と式(2.5)から導かれるチャンバーの伝達関数  $G$  と固体推進薬の圧力応答関数  $R_p$  から成る次式を使って決定される[2-14,15].

$$\frac{1}{G(i\omega^*)} - R_p(i\omega^*) = 0 \quad (2.22)$$

ここで、 $G(i\omega^*)$  は以下で定義される量の臨界値を含んでいる。

$$\tau^* = \frac{\tau_r}{\tau_c} \quad (2.23)$$

ここで、 $\tau_r$  は推進薬ガス滞留時間、 $\tau_c$  は固相の熱的特性時間を表わしている。それらは以下のように定義される。

$$\tau_r = \frac{W_m c^* L^*}{R_u \bar{T}_f} \quad (2.24)$$

$$\tau_c = \frac{\alpha_c}{\bar{r}^2} = \frac{\alpha_c}{a^2 \bar{p}^{2n}} \quad (2.25)$$

式(2.22)より、臨界値  $\tau_{cr}^*$  は圧力指数  $n$  と圧力応答関数のパラメータ  $A, B$  のみの関数である。

$$\tau_{cr}^* = f(n, A, B) \quad (2.26)$$

式(2.24)と式(2.25)を式(2.26)に代入すると、線形安定限界線図における  $L^*$  と定常燃焼圧の関係が直ちに得られる。

$$L^* = \frac{\alpha_c R_u \bar{T}_f}{W_m c^* a^2} \tau_{cr}^* \bar{p}^{-2n} \quad (2.27)$$

$A$  と  $B$  の値は定常燃焼圧に依存するが、 $\tau_{cr}^*$  は広範囲の定常圧力域において少ししか変化しない。したがって、 $L^*$  はほぼ  $\bar{p}^{-2n}$  に比例する。 $\tau_{cr}^*$  の計算結果から、 $\tau_{cr}^*$  は  $A$  または  $n$  の増加に従って増え、 $B$  の減少によっても  $\tau_{cr}^*$  は増大する。これらのケースでは、図 2.9 に示す線形安定限界曲線が上にシフトするので  $L^*$ -不安定が起きやすくなる。言い換えれば、 $L^*$ -不安定の発生を妨げるには、 $\tau_{cr}^*$  の値が小さいことが望ましい。

## 2.9 まとめ

固体ロケットモータ内の0次の軸方向モードの音響定在波（バルクモード）に対し、オイラーの運動方程式と固体推進薬の非定常・非線形燃焼方程式を数値的に解いて次元解析を行った。本研究で得られた結果をまとめると以下ようになる。

- (1) 燃焼室内の流れが  $L^*$ -不安定に及ぼす影響を調べるため、低速から高速までの流れが存在する条件下で  $L^*$ -不安定の数値解析を行った。この解析は、音響的燃焼不安定についても解析できる CFD コードを使って実行した。これより、固体ロケットモータの様々な非定常燃焼現象を統一的に解析する手段として有効であることが実証できた。
- (2)  $L^*$ 振動が微小擾乱から成長した時、その振動がリミットサイクルに移行するか、または消滅するかのどちらかになる。それは、 $L^*$  の値および定常燃焼の状態に依存する。
- (2)  $L^*$ バーナー内の流速が遅い時、線形安定限界と  $L^* - f$  線図に関して CFD の結果と  $L^*$ 燃焼安定性理論とはよく一致する。

(3) L\*バーナー内の流速が速い場合は、圧力振動の振幅は下流にいくにしたがって小さくなる。

(4) CFD の計算結果において  $\bar{p}_f$  と  $\bar{p}_e$  の平均を線形安定限界の臨界圧としたとき、従来の L\*バーナー理論と比べると  $L^* - \bar{p}$  平面上で相対的に低くなる。ノズル入口マッハ数  $\bar{M}_e$  が増加するにつれて、これらの線形安定限界の差は大きくなる。

## 2章 記号表

- $A_p$  : ポート断面積
- $A_s$  : 表面分解反応速度式における前指数因子
- $A_t$  : ノズルスロート面積
- $a$  : 線燃焼速度式の係数
- $c_s$  : 固体推進薬の比熱
- $c_p$  : 燃焼ガスの定圧比熱
- $c^*$  : 特性排気速度
- $E_s$  : 表面反応の活性化エネルギー
- $f$  : 周波数
- $e$  : よどみ点比内部エネルギー
- $L^*$  :  $L^* = V/A_t$
- $M$  : マッハ数
- $\dot{m}_s$  :  $\dot{m}_s = \rho_c \dot{r}$
- $n$  : 圧力指数
- $p$  : 圧力
- $Q$  : 気相反応熱
- $Q_s$  : 表面反応熱
- $Q_s^*$  :  $Q_s^* = Q_s / \{c_s(T_{s,0} - T_0)\}$
- $R$  : ガス定数
- $R_u$  : 普遍気体定数
- $\dot{r}$  : 固体推進薬の線燃焼速度
- $T$  : 温度
- $T_{fl}$  : 火炎温度
- $T_s$  : 固体推進薬の表面温度
- $T_0$  : 初期温度
- $T_{fl}^*$  :  $T_{fl}^* = (T_{fl} - T_0) / (T_{s,0} - T_0)$

- $u$  : 軸方向の流速  
 $V$  : 燃焼室の容積  
 $W_m$  : 燃焼ガスの平均分子量  
 $x$  : 軸方向距離  
 $y$  : 固体推進薬の表面に対して垂直方向の距離

### ギリシャ文字

- $\alpha_c$  : 固体推進薬の熱拡散率  
 $\gamma$  : 燃焼ガスの比熱比  
 $\lambda_c$  : 固体推進薬の熱伝導係数  
 $\lambda_g$  : 燃焼ガスの熱伝導係数  
 $\nu$  : 気相総括反応の次数  
 $\sigma$  : 式(2.9)で定義される無次元パラメータ  
 $\omega^*$  : 無次元角振動数

### 上添え字

- : 定常燃焼時の値

### 下添え字

- $e$  : ノズル入口  
 $f$  : 燃焼室前端

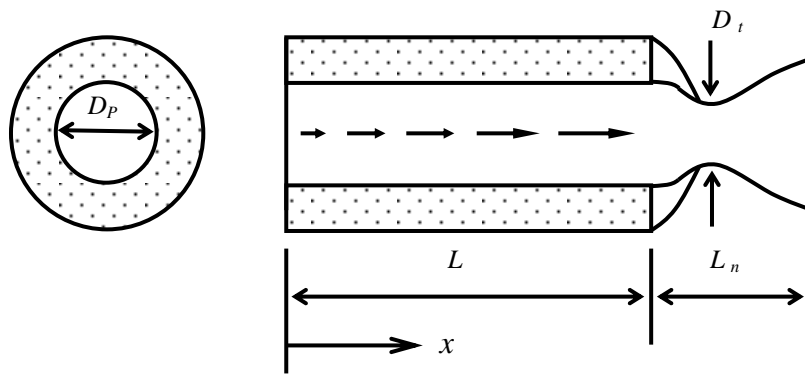


図 2.1 L\*バーナーの概略図

表 2.1 固体推進薬の熱特性・燃焼特性

項目	数値	単位
$c_p, c_c$	1.381	J/gK
$E_s/R_u$	9000	K
$Q_s$	250	J/g
$T_0$	300	K
$T_{s,0}$	900	K
$T_{fl,0}$	2800	K
$\alpha_c$	0.001	cm <sup>2</sup> /s
$\gamma$	1.301	
$\sigma$	4	



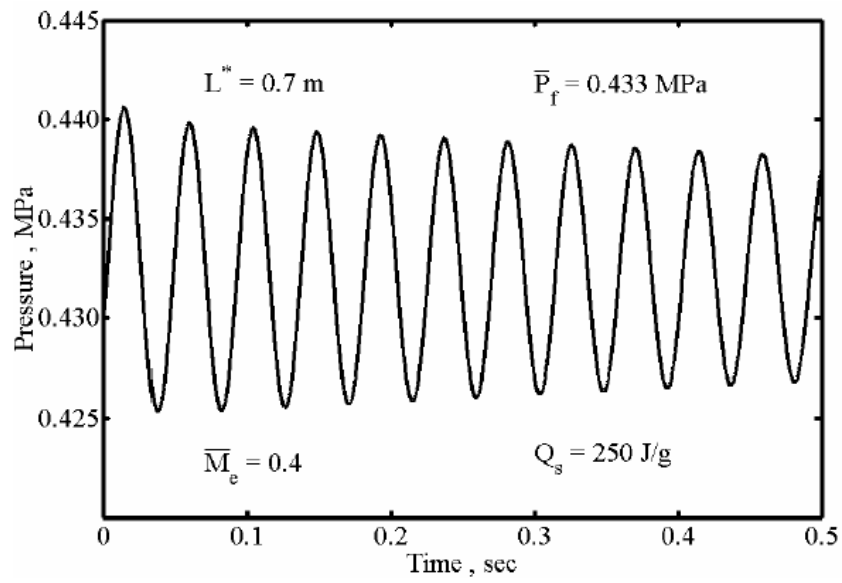


図 2.2 燃焼室前端の内圧の微小振動の様子(減衰する場合)

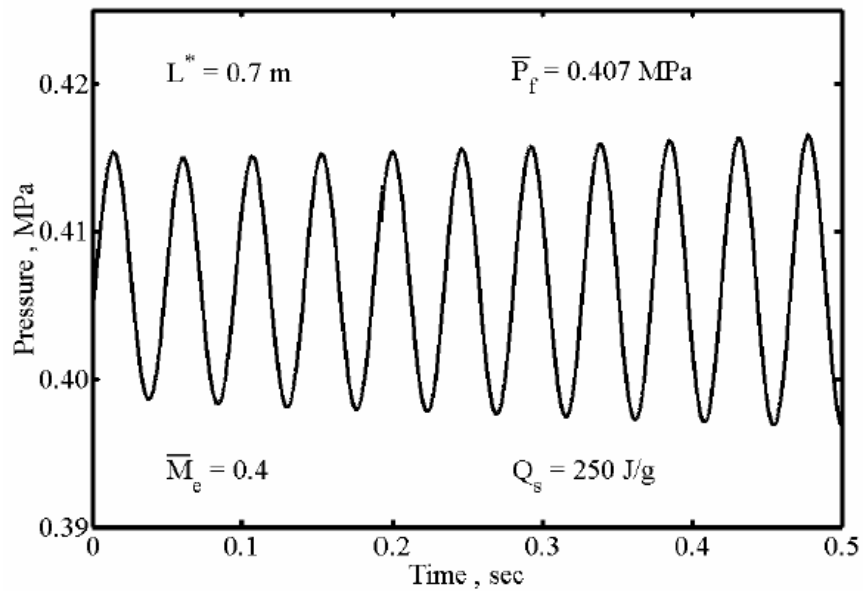


図 2.3 燃焼室前端の内圧の微小振動の様子(増幅する場合)

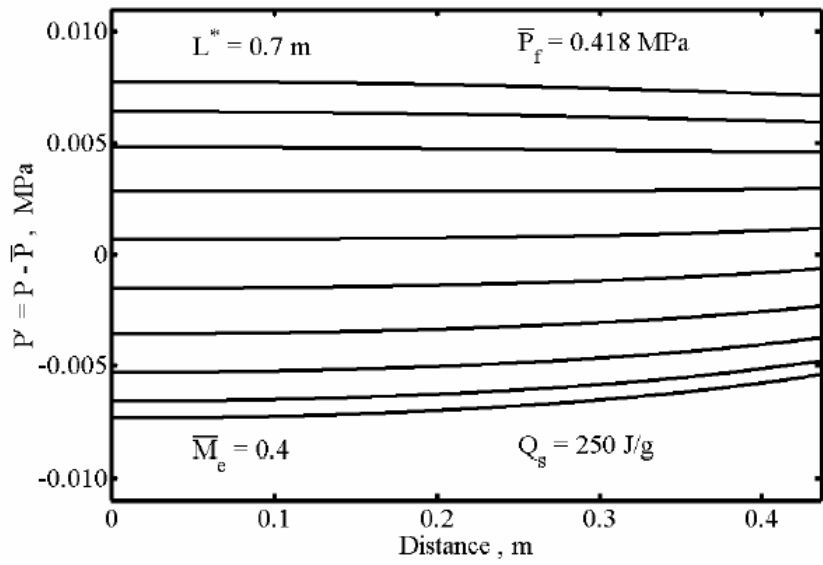


図 2.4  $L^*$ バーナー内の摂動圧力分布の時間的变化 ( $\bar{M}_e = 0.4$ )

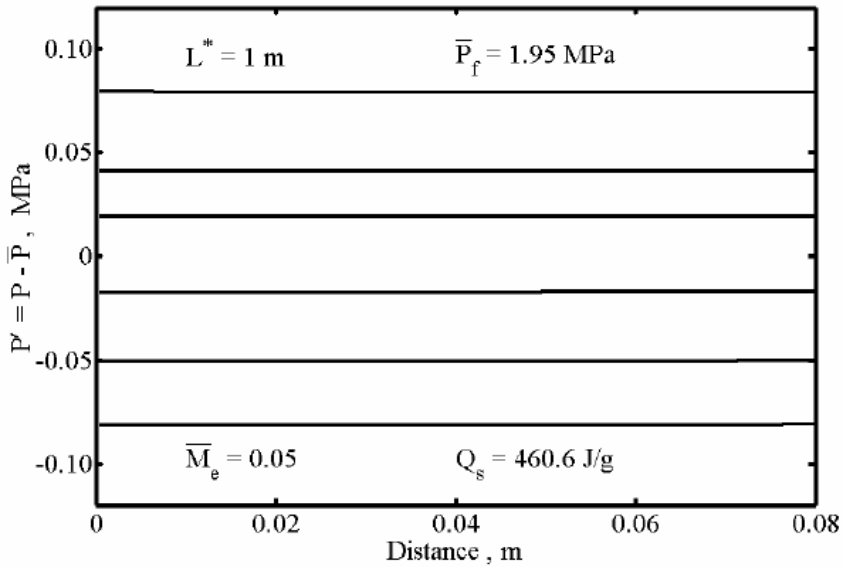


図 2.5  $L^*$ バーナー内の摂動圧力分布の時間的变化 ( $\bar{M}_e = 0.05$ )

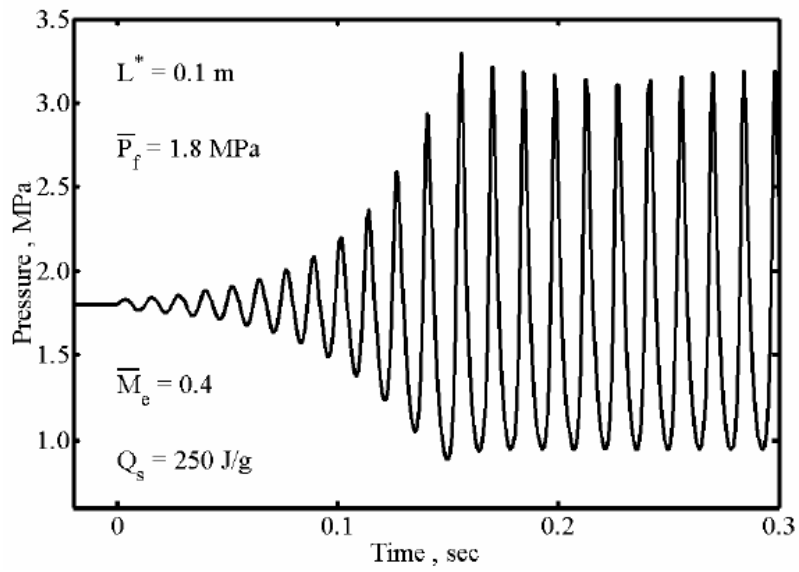


図 2.6 燃焼室前端の内圧振動の非線形的な挙動 (安定的なリミットサイクル)

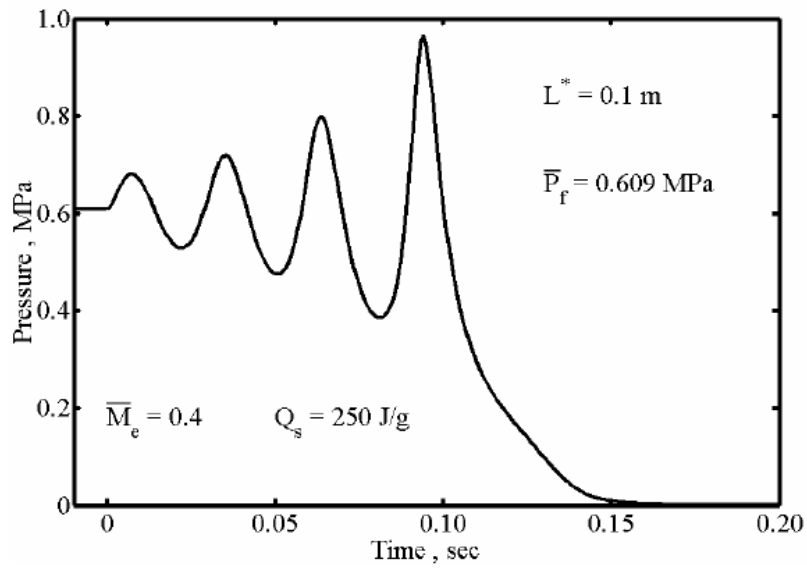


図 2.7 燃焼室前端の内圧振動の非線形的な挙動 (消炎)

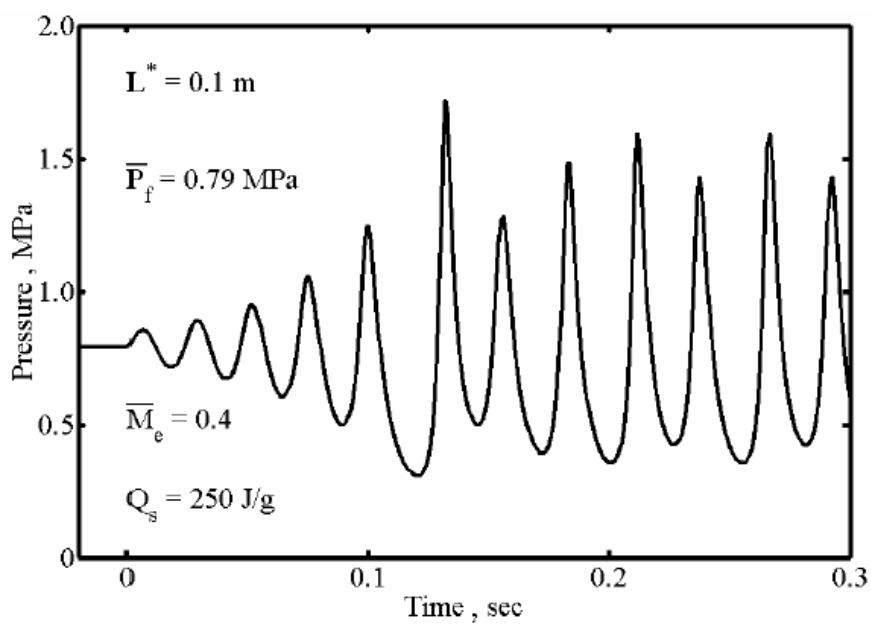


図 2.8 燃焼室前端の圧力の非線形挙動  
(不安定なリミットサイクル)

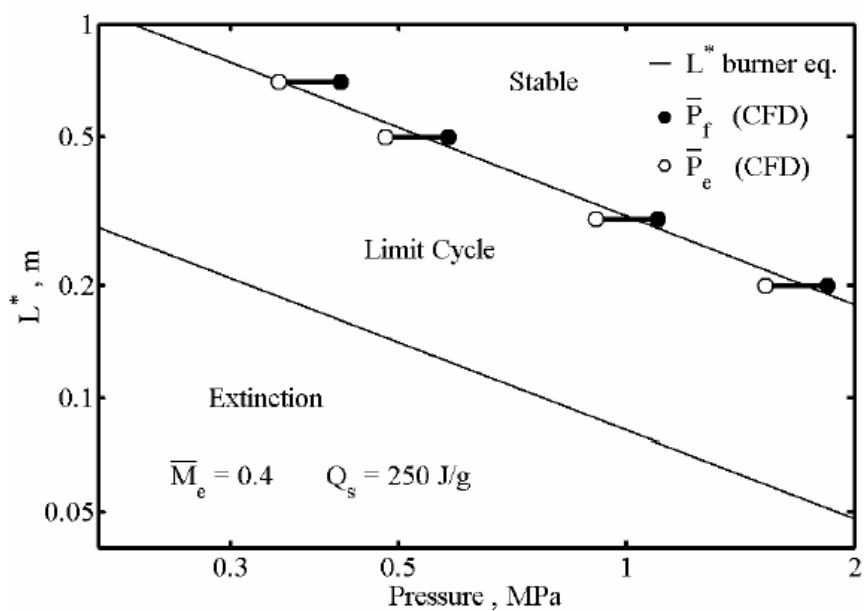


図 2.9  $L^*$ -不安定の安定限界線図 ( $\bar{M}_e = 0.4$ )

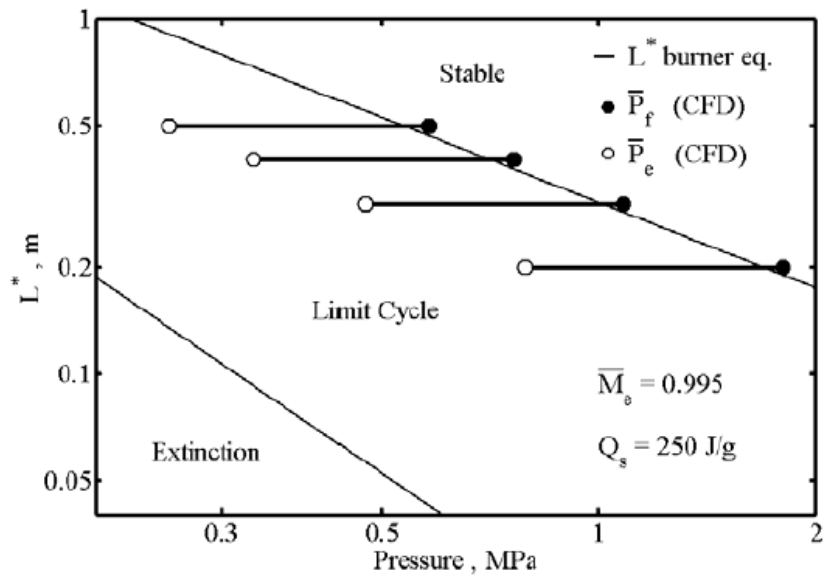


図 2.10  $L^*$ -不安定の安定限界線図 ( $\bar{M}_e = 0.995$ )

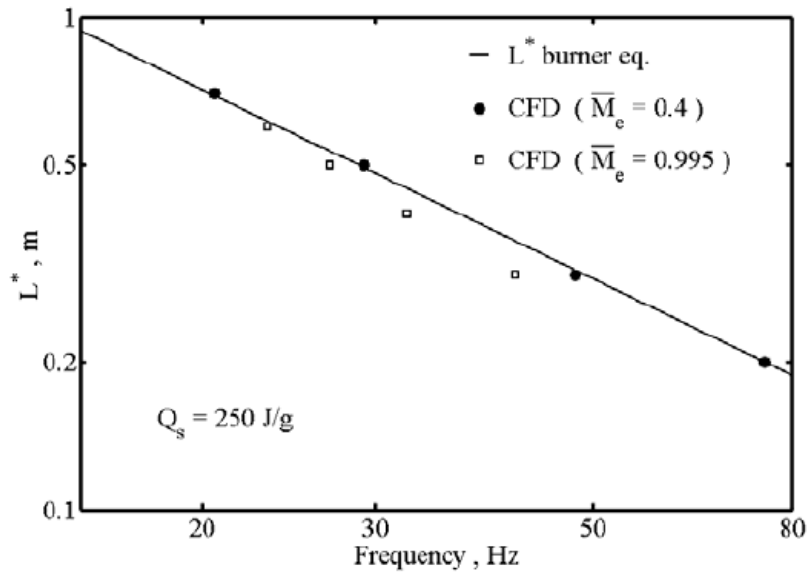


図 2.11  $L^*$  と  $L^*$  振動の周波数の関係

## 2章 参考文献

- [2-1] Oberg C. L.: Combustion Instability: The Relationship between Acoustic and Non-acoustic Instability, *AIAA Journal*, Vol.6, No. 2, pp. 265-271, 1968.
- [2-2] Culick F. E. C.: The Stability of One-Dimensional Motion in a Rocket Motor, *Combustion Science and Technology*, Vol.7, pp.165-175, 1973.
- [2-3] Peretz A., Kuo K. K., Caveny L. H., and Summerfield M.: Starting Transient of Solid-Propellant Rocket Motors with High Internal Gas Velocities, *AIAA Journal*, Vol.11, No.12, pp. 1719-1727, 1973.
- [2-4] Kato T., Hanzawa M., Morita T., and Shimada T.: Stability Evaluation of One-Dimensional Flow in Solid Rocket Motors Based on Computational Fluid Dynamics, *Asian Joint Conferences on Propulsion and Power, AJCPP2004* CD-ROM, Souel, Korea, 2004.
- [2-5] Shimada T., Hanzawa M., Morita T., Kato T., Yoshikawa T., and Wada Y.: Stability Analysis of Solid Rocket Combustion by Computational Fluid Dynamics, *AIAA Journal*, Vol. 46, No.4, pp. 947-957, 2008.
- [2-6] 嶋 英志, 城之内 忠正: 設計における数値解析の活用について (その12), 一粒子的風上法とその検証, 航空宇宙技術研究所特別資料 27号(第12回航空機計算空気力学シンポジウム論文集), pp. 255-260, 1994.
- [2-7] Hanzawa M.: A Theoretical Study on the Extinction of Solid Propellants by a Rapid Pressure Decay, Doctoral Thesis, Tokyo University, 1975.
- [2-8] Akiba R., and Tanno M.: Low Frequency Instability in Solid Propellant Rocket Motors, *Proceedings of the First International Symposium on Rockets and Astronautics*, Tokyo, Japan, pp. 74-82, 1959.
- [2-9] Krier H., T'ien J. S., Sirignano W. A., and Summerfield M.: Non-steady Burning Phenomena of Solid Propellants: Theory and Experiments, *AIAA Journal*, Vol.6, No.2, pp. 278-285, 1968.
- [2-10] Galfetti L., Riva G., and Bruno C. : Numerical Computation of Solid-Propellant Non-steady Burning in Open or Confined Volumes, Non-steady Burning and Combustion Stability of Solid Propellants, edited by L. De Luca, E. W. Price and M. Summerfield, Vol.143, *Progress in Astronautics and Aeronautics*, AIAA, pp. 643-687, 1992.
- [2-11] Tanaka M., and Nakaji K.: An Experimental Study on Low-Frequency Combustion Instability of Composite Propellants, *AIAA Paper*, 98-3552, 1998.
- [2-12] 田中雅文, 中路和法: ノズルレスロケットモータにおける低周波振動燃焼の理論解析, 火薬学会誌, Vol.62, No.3, pp. 126-131, 2001.
- [2-13] Culick F. E. C.: A Review of Calculations for Unsteady Burning of a Solid Propellant, *AIAA Journal*, Vol.6, No.12, pp. 2241-2254, 1968.
- [2-14] Sehgal R., and Strand L.: A Theory of Low-Frequency Combustion Instability in Solid Rocket Motors, *AIAA Journal*, Vol.6, No.4, pp. 696-702, 1964.
- [2-15] Barrere M.: Introduction to Nonsteady Burning and Combustion Stability, Non-steady Burning and Combustion Stability of Solid Propellants, edited by L. De Luca, E. W. Price and M. Summerfield, Vol.143, *Progress in Astronautics and Aeronautics*, AIAA, pp. 17-58, 1992.

## 第3章

# ハイブリッドロケットモータの燃料後退速度 に関する解析

### 3.1 まえがき

ハイブリッドロケットの振動燃焼解析の有効性を高めるためには、その燃焼理論の基礎を詳しく吟味し、過去のモデルの比較解析および拡張を行うことは重要である。従来は Marxman の理論等がよく用いられてきたが[3-1, 2, 3]。これらは運動量輸送と熱輸送に関するレイノルズのアナロジに基づいて理論を展開しているためにプラントル数等の影響が無視されている。一方、プラントル数の影響を考慮した従来のアナロジの多くは主に管内流等の非燃焼流を対象としており、境界層燃焼の問題を直接取り扱っておらず、そのままでは利用しにくい。また、燃料後退速度や燃焼応答関数等を理論的に導出する際にアナロジの式が解析的な形をしていないと適用しにくい。ただし、近似的にこれらのアナロジを使って燃料後退速度を導出した例は多い[3-4, 5, 6, 7, 8]。本研究ではプラントル数や乱流プラントル数等の無次元数の影響について考慮できるように Marxman の理論の拡張を行った。まず境界層燃焼に適合したアナロジの式を導出し、その後それを利用して Marxman らのハイブリッドロケットの燃料後退速度の式に対してプラントル数等の影響を加味して計算を行った。その際、境界層内の火炎面の位置を求める必要があるが、これについては Lengelle の境界層の速度分布式[3-9]を使って酸化剤の火炎面への拡散に対して物質伝達と流体摩擦のアナロジを適用し、その位置を求めた。

### 3.2 境界層燃焼に適合したアナロジ

乱流境界層における平均せん断応力  $\tau$  と平均全熱流束  $\dot{q}$  はそれぞれ次式で表される。

$$\tau = \rho(v + \varepsilon_M) \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.1)$$

$$\dot{q} = \rho c_p (\alpha + \varepsilon_H) \frac{\partial T}{\partial y} \quad (3.2)$$

同境界層内での熱伝達と流体摩擦のアナロジについて、下記の仮定がよく用いられる。

$$\frac{\dot{q}}{\dot{q}_{s+}} = \frac{\tau}{\tau_s} \quad (3.3)$$

式(3.1)と式(3.2)に対して上式を適用すると、次式を得る。



$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\dot{q}_{s+}}{\tau_s c_p} \frac{\nu + \varepsilon_M}{Pr} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.4)$$

上式を固相表面( $y=0$ )から固相側の火炎端( $y=\delta_f$ )まで積分すると、以下の結果を得る。

$$T_{fl} - T_s = \frac{\dot{q}_{s+}}{\tau_s c_p} u_e I_H \quad (3.5)$$

ちなみに火炎については **flame sheet** として取り扱っている。ここで、 $I_H$  は以下のように表される。

$$I_H = \int_0^{\delta_f/\delta} \frac{\nu + \varepsilon_M}{Pr} \frac{d}{d\eta} \left( \frac{u}{u_e} \right) d\eta \quad (3.6)$$

境界層内に火炎が存在する場合、その中では温度が反応速度に応じて変化するのでアナロジの近似が悪化するため上記のような積分範囲を取った。本研究では、スタントン数を次式のように定義する。

$$St = \frac{h}{\rho_{fl} u_{fl} c_p} = \frac{\dot{q}_{s+}}{\rho_{fl} u_{fl} c_p (T_{fl} - T_s)} \quad (3.7)$$

また固相表面に作用するせん断応力は壁面摩擦係数  $C_f$  を使って次式のように表される。

$$\tau_s = \frac{C_f}{2} \rho_e u_e^2 \quad (3.8)$$

式(3.7)と式(3.8)を式(3.5)に当てはめると、以下のようなスタントン数と壁面摩擦係数の間に成り立つ関係式が得られる。これが本研究で得られたアナロジの式である。

$$St = \frac{C_f}{2} \frac{\rho_e u_e}{\rho_{fl} u_{fl}} \frac{1}{I_H} \quad (3.9)$$

特に  $Pr = Pr_t = 1$  の場合は、 $I_H = u_{fl}/u_e$  となるので、上式は以下に示す簡単な式に帰着する。

$$St = \frac{C_f}{2} \frac{\rho_e u_e^2}{\rho_{fl} u_{fl}^2} \quad (3.10)$$

これは Marxman らによって得られた結果と一致する。Lengelle は、吹き出しを有する乱流境界層流れに対してベキ乗流速分布則を修正して以下に示す境界層の速度分布式を得た[3-9].

$$\phi = \eta^\ell \quad (3.11)$$

ここで、

$$\ell = \ell_0 (1 + B_a) \frac{\ln(1 + B_a)}{B_a} \quad (3.12)$$

$$\ell_0 = \frac{1}{7} \quad (3.13)$$

と表される. Karabeyoglu によると, 吹き出しが強い場合, Marxman の境界層の速度分布式は導出時の近似のために精度が悪いと報告されている[3-10]. したがって, 以前著者は Marxman の速度分布式を用いていたが[3-11], ここでは Lengelle の速度分布式を使って式(3.6)の積分を行った. 同式中の渦動粘性係数については, 混合距離を  $\kappa y$  と仮定した.

$$\frac{\varepsilon_M}{\nu} = \frac{(\kappa y)^2}{\nu} \frac{du}{dy} = \text{Re}_\delta (\kappa \eta)^2 \frac{d\phi}{d\eta} = \text{Re}_\delta \kappa^2 \ell \eta^{1+\ell} = \text{Re}_x \left( \frac{\delta}{x} \right) \kappa^2 \ell \eta^{1+\ell} \quad (3.14)$$

ここで,  $\kappa = 0.41$  とした. また乱流プラントル数は積分区間で一定と仮定した. なお, Marxman らは上式の計算を行う際に  $\eta^{1+\ell} \approx \eta$  と近似したが[3-3], 本研究ではそれによる誤差の生成を防ぐためこのような近似を用いなかった. 式(3.9)のスタントン数から, 固相表面への熱フィードバックの式(気相準定常)は以下のように表される.

$$\dot{q}_{s+} = \rho_{fl} u_{fl} St c_p (T_{fl} - T_s) = G \frac{C_f}{2} \frac{c_p (T_{fl} - T_s)}{I_H} \quad (3.15)$$

Marxman らによると, 湧き出しのある平板上の乱流境界層について以下の関係が近似的に成り立つことが示されている[3-3].

$$\frac{C_f/2}{C_{f0}/2} = q B_a^{-k} \quad (3.16)$$

また, 湧き出しのない平板上の乱流境界層に対するブラジウスの実験式は以下のように表される.

$$\frac{C_{f0}}{2} = 0.03 \left( \frac{Gx}{\mu} \right)^{-0.2} \quad (3.17)$$

式(3.16)と式(3.17)を式(3.15)に代入すると, 次式を得る.

$$\dot{q}_{s+} = 0.03 q \left( \frac{x}{\mu} \right)^{-0.2} G^{0.8} B_a^{-k} \frac{c_p (T_{fl} - T_s)}{I_H} \quad (3.18)$$

なお Marxman らにより  $q = 1.2$ ,  $k = 0.77$  の値が得られているが, 後に Netzer や Altman によって

$q=1.0$ ,  $k=0.68$ の方がより良いと報告されている[3-12, 13]. 次に, 部分積分を利用して式(3.6)の積分を実行すると次式を得る.

$$\begin{aligned}
I_H &= Pr_t \frac{u_{fl}}{u_e} + (Pr - Pr_t) \int_0^{\delta_{fl}/\delta} \frac{1}{1+c_H \eta^{1+\ell}} \frac{d\phi}{d\eta} d\eta \\
&= Pr_t \frac{u_{fl}}{u_e} + (Pr - Pr_t) \left[ \frac{u_{fl}/u_e}{1+c_H (\delta_{fl}/\delta)^{1+\ell}} + \int_0^{\delta_{fl}/\delta} \frac{(1+\ell)c_H \eta^\ell \phi}{(1+c_H \eta^{1+\ell})^2} d\eta \right] \\
&= Pr_t \frac{u_{fl}}{u_e} + (Pr - Pr_t) \left[ \frac{u_{fl}/u_e}{1+c_H (\delta_{fl}/\delta)^{1+\ell}} + \frac{1}{(\delta_{fl}/\delta)c_H} \int_0^1 \frac{x^{\ell'}}{(\beta+x)^2} dx \right] \quad (3.19)
\end{aligned}$$

ここで,

$$\ell' = \frac{\ell}{1+\ell}, \quad (3.20)$$

$$\beta = \left[ c_H \left( \frac{\delta_{fl}}{\delta} \right)^{1+\ell} \right]^{-1} = \left[ c_H \phi_{fl}^{\frac{1}{\ell'}} \right]^{-1} \quad (3.21)$$

$$c_H = \frac{Pr}{Pr_t} Re_x \left( \frac{\delta}{x} \right) \kappa^2 \ell \quad (3.22)$$

とおいた. また式(3.19)における  $u_{fl}/u_e$ ,  $\delta_{fl}/\delta$  の計算についての説明は, 3.4 節で詳しく行う. 次に, 式(3.19)の積分部分を取り出して以下のような記号で表す.

$$M(\beta, \ell') \equiv \int_0^1 \frac{x^{\ell'}}{(\beta+x)^2} dx \quad (3.23)$$

上式を部分積分し, 変形すると次式が得られる.

$$\begin{aligned}
M &\equiv \int_0^1 \frac{x^{\ell'}}{(\beta+x)^2} dx = \frac{1}{(1+\ell')(1+\beta)^2} + \frac{2}{1+\ell'} \int_0^1 \frac{x^{1+\ell'}}{(\beta+x)^3} dx \\
&= \frac{1}{(1+\ell')(1+\beta)^2} + \frac{2}{1+\ell'} \int_0^1 \frac{x^{\ell'}}{(\beta+x)^2} dx - \frac{2\beta}{1+\ell'} \int_0^1 \frac{x^{\ell'}}{(\beta+x)^3} dx \quad (3.24)
\end{aligned}$$

式(3.23)を  $\beta$  で微分すると, 次式を得る.

$$\frac{dM}{d\beta} = -2 \int_0^1 \frac{x^{\ell'}}{(\beta+x)^3} dx \quad (3.25)$$

上式を式(3.24)に代入して整理すると,

$$\frac{dM}{d\beta} + \frac{1-\ell'}{\beta} M = -\frac{1}{\beta(1+\beta)^2} \quad (3.26)$$

となり，これを解けば次式を得る．

$$M(\beta, \ell') = -\frac{1}{\beta^{1-\ell'}} \int \frac{1}{\beta^{\ell'} (1+\beta)^2} d\beta \quad (3.27)$$

上記の積分を実行し，結果を代数的に表わすために以下のような近似を行う．

$$M(\beta, \ell') \approx -\frac{1}{\beta^{1-\ell'}} \int \frac{1}{\beta^{\ell'} (1+\beta)^{2-\ell'}} d\beta = -\frac{1}{1-\ell'} \left( \frac{1}{1+\beta} \right)^{1-\ell'} + \frac{C}{\beta^{1-\ell'}} \quad (3.28)$$

ここで，上式を積分定数  $C$  について変形し，適当な定数  $\beta_0$  によってその値を決定することを試みる．

本来  $\beta_0$  の値は任意に取ってよいが，導出過程で上式のような近似を用いたので  $\beta_0$  を適切な値に取

る必要がある．ここでは後述する数値解(厳密解に相当)と一致するように試行錯誤の上， $\beta_0 = 2$  とお

いた．

$$C = \frac{1}{1-\ell'} \left( \frac{\beta_0}{1+\beta_0} \right)^{1-\ell'} + \beta_0^{1-\ell'} M(\beta_0, \ell') \quad (3.29)$$

上式を式(3.28)に代入すると，

$$M(\beta, \ell') = -\frac{1}{1-\ell'} \left( \frac{1}{1+\beta} \right)^{1-\ell'} + \frac{1}{\beta^{1-\ell'}} \left\{ \frac{1}{1-\ell'} \left( \frac{\beta_0}{1+\beta_0} \right)^{1-\ell'} + \beta_0^{1-\ell'} M(\beta_0, \ell') \right\} \quad (3.30)$$

となり，さらに上式に対し， $\beta = \left\{ c_H \phi_{fl} \frac{1}{\ell'} \right\}^{-1}$  を適用すると，

$$M\left(\left\{c_H \phi_{fl} \frac{1}{\ell'}\right\}^{-1}, \ell'\right) = \frac{c_H^{1-\ell'} \phi_{fl}^{1/\ell'-1}}{1-\ell'} \left\{ -\left( \frac{1}{1+c_H \phi_{fl}^{1/\ell'}} \right)^{1-\ell'} + \left( \frac{\beta_0}{1+\beta_0} \right)^{1-\ell'} + (1-\ell') \beta_0^{1-\ell'} M(\beta_0, \ell') \right\} \quad (3.31)$$

を得る．上記の結果を式(3.19)に代入すると，直ちに次式が求められる．

$$I_H = \phi_{fl} F_R \quad (3.32)$$

ここで， $F_R$  は以下のように表される．

$$F_R = Pr_i + (Pr - Pr_i) \left[ \frac{1}{1+c_H \phi_{fl}^{1/\ell'}} + \frac{1}{(1-\ell') c_H^{\ell'} \phi_{fl}} \left\{ -\left( \frac{1}{1+c_H \phi_{fl}^{1/\ell'}} \right)^{1-\ell'} + \left( \frac{\beta_0}{1+\beta_0} \right)^{1-\ell'} + (1-\ell') \beta_0^{1-\ell'} M(\beta_0, \ell') \right\} \right] \quad (3.33)$$

なお， $M(\beta_0, \ell')$  は  $\beta_0 > 1$  ならば，解析的にガウスの超幾何級数で表すことが可能だが，その後の解析

的な取り扱いに適さない．ここでは上記の積分に対して簡潔な解析的表現を得るために，次に示す

近似を施して積分を実行した．

$$M(\beta_0, \ell') \approx \int_0^1 \frac{x^{\ell'}}{(\beta_0 + x)^{2+\ell'}} dx = \frac{1}{(1+\ell')\beta_0} \left( \frac{1}{1+\beta_0} \right)^{1+\ell'} \quad (3.34)$$

上式を式(3.33)に代入して整理すると、最終的な結果を得る。

$$I_H = \phi_{fl} F_R \quad (3.35)$$

ここで、

$$F_R = Pr_t + (Pr - Pr_t) \left\{ \frac{1}{1+C_1} + \frac{C_2}{(1-\ell')C_1^{\ell'}} \right\} \quad (3.36)$$

$$C_1 = \frac{Pr}{Pr_t} Re_x \left( \frac{\delta}{x} \right) \kappa^2 \ell' \left( \frac{u_{fl}}{u_e} \right)^{\frac{1}{\ell'}} \quad (3.37)$$

$$C_2 = -\frac{1}{(1+C_1)^{1-\ell'}} + \left( \frac{\beta_0}{1+\beta_0} \right)^{1-\ell'} + \frac{1-\ell'}{1+\ell'} \cdot \frac{1}{\beta_0^{\ell'} (1+\beta_0)^{1+\ell'}} \quad (3.38)$$

ここで、 $\delta_{fl}/\delta = (u_{fl}/u_e)^{\eta_{\ell}} = \phi_{fl}^{1/\ell'}$  である。特に  $Pr = Pr_t = 1$  の場合、 $F_R = 1$  となる。また  $c_H$  中の  $Re_{\delta}$  の計算については Marxman の方法を使った[3-3]。厳密には、Lengelle の速度分布式を用いているために  $Re_{\delta}$  を求める手順は上記の方法とは異なる。これには Karabeyoglu の方法が合理的だが[3-10]、これらは式が陰的な形をしていたり、複雑だったりするために利用しにくい。そこで、簡単化のために本研究では Marxman の方法を用いた。

### 3.3 プラントル数の影響を考慮した燃料後退速度

固相表面における定常燃焼時のエネルギーの釣り合い式は以下のように表される。

$$\dot{q}_{s-} = \rho_c \dot{r} Q_s + \dot{q}_{s+} \quad (3.39)$$

ここで、 $Q_s$  は表面反応熱で、発熱反応の場合は正となり、吸熱反応の場合は負となる。発熱を伴わない場合は、潜熱と分解熱の和を表している。定常燃焼時の表面における固相側( $\dot{q}_{s-}$ )と気相側( $\dot{q}_{s+}$ )の熱流束はそれぞれ以下ようになる。

$$\dot{q}_{s-} = \rho_c \dot{r} \{c_c(T_s - T_0)\} \quad (3.40)$$

$$\dot{q}_{s+} = G \frac{C_f c_p (T_{fl} - T_s)}{2 I_H} \quad (3.41)$$

上記の2式を式(3.39)に代入すると、直ちに次式を得る。

$$\rho_c \dot{r} \{c_c (T_s - T_0) - Q_s\} = G \frac{C_f c_p (T_{fl} - T_s)}{2 I_H} \quad (3.42)$$

aerodynamic blowing parameter の定義を上式に適用すると、以下の関係が得られる。

$$B_a \equiv \frac{\rho_c \dot{r}}{G(C_f/2)} = \frac{\Delta h}{\Delta H_{v,eff}} \frac{1}{I_H} = \frac{u_e}{u_{fl}} \frac{\Delta h}{\Delta H_{v,eff}} \frac{1}{F_R} \quad (3.43)$$

ここで、 $\Delta h = h_{fl} - h_s = c_p (T_{fl} - T_s)$ 、 $\Delta H_{v,eff} = c_c (T_s - T_0) - Q_s$  とおいた。

従来、thermal blowing parameter は  $B_t = \frac{u_e}{u_{fl}} \frac{\Delta h}{\Delta H_{v,eff}}$  のように定義されていたが、これを拡張して同パ

ラメータを以下のように定義し直せば、定常状態で従来通り  $B_a = B_t$  という関係が成り立つ。

$$B_t = \frac{u_e}{u_{fl}} \frac{\Delta h}{\Delta H_{v,eff}} \frac{1}{F_R} \quad (3.44)$$

またプラントル数及び乱流プラントル数が共に 1 の時、 $F_R=1$  となるので上式は従来の thermal blowing parameter と一致する。燃料後退速度を求めるために式(3.43)において  $B_a = B_t = B$  とおくと、次式を得る。

$$B I_H - \frac{\Delta h}{\Delta H_{v,eff}} = 0 \quad (3.45)$$

ここで、 $I_H$  は  $B, G, Pr, Pr_t, O/F, Y_{ox,e}, \mu, x, T_{fl}, T_e$  の関数となっているが、今回は  $B, G$  以外を固定して上式から  $G$  値に対する  $B$  の値を数値的に求めた。また燃料後退速度の計算には主流と火炎面での速度比が必要になるが、従来使われている Marxman の方法[3-2]にプラントル数の効果を加えると次式が得られる。

$$\frac{u_{fl}}{u_e} = \frac{(O/F) \frac{\Delta h}{\Delta H_{v,eff}} \frac{1}{F_R}}{Y_{ox,e} + \{(O/F) + Y_{ox,e}\} \frac{\Delta h}{\Delta H_{v,eff}} \frac{1}{F_R}} = \frac{(O/F) B_t \frac{u_{fl}}{u_e}}{Y_{ox,e} + \{(O/F) + Y_{ox,e}\} B_t \frac{u_{fl}}{u_e}} \quad (3.46)$$

上式を  $\phi_{fl}$  について整理すると、次式となる。

$$\phi_{fl} \equiv \frac{u_{fl}}{u_e} = \frac{(O/F)B_t - Y_{ox,e}}{B_t \{(O/F) + Y_{ox,e}\}} \quad (3.47)$$

さらに、本研究ではこの式とは別に物質伝達と熱伝達のアナログを使って同速度比を求めた。後述の燃料後退速度の計算についてはこれを利用した。以下に同式の結果を示す。

$$\phi_{fl} = \frac{1}{2} \left\{ -S_c K_D + \sqrt{(S_c K_D)^2 + 4S_c K_D} \right\} \quad (3.48)$$

ここで、

$$K_D = \frac{0.03q(O/F)}{\kappa^2 Y_{ox,e}} \frac{T_{fl}}{T_e} \left( \frac{x}{\mu} \right)^{-0.2} G^{-0.2} \frac{B_a^{1-k}}{\ell^2} \quad (3.49)$$

と表される。詳しくは次節で述べるが、これは Marxman らの境界層の速度分布式の代わりに Lengelle の式を使って求めたものである。今回は酸化剤と燃料の組み合わせとして GOX / PMMA を対象として計算を実行した。これらの組み合わせによる燃焼は、他と比べても典型的な境界層燃焼の状態に近い。ただし、プラントル数など一部の量はその特性を調べるために適宜変えている。以下の量については固定して使った。

$$O/F = 1.5, \quad Y_{ox,e} = 1, \quad \Delta h / \Delta H_{v,eff} = 5.5, \quad T_{fl} / T_e = 2$$

これらの数値については、GOX / PMMA ハイブリッドに対する Marxman らの考察から得られた値を引用した[3-2]。ここで、温度比  $T_{fl} / T_e$  は正確にはわからないが、Marxman らは  $T_{fl} / T_e \sim 2$  として見積もり、火炎の位置を知るにはこの程度で十分だと結論付けている[3-2]。次に燃料後退速度を求めるために、 $B_a$  の定義と  $B_a = B_t (= B)$  の関係から直ちに次式を得る。

$$\rho_c \dot{r} = G \frac{C_f}{2} B_t \quad (3.50)$$

さらに、式(3.16)と式(3.17)の関係を使った場合は次式となる。

$$\rho_c \dot{r} = G q B_a^{-k} (C_{f0} / 2) B_t = 0.03q G (Gx / \mu)^{-0.2} B^{1-k} \quad (3.51)$$

上式は Marxman により得られた燃料後退速度の式と表面上は全く同一であるが、 $B_t$  の内身については式(3.44)を使っており、その点が主に Marxman の式とは異なっている。式(3.51)を主流の質量流

束の基準値  $G_{ref}$  を使って無次元化すると、

$$\frac{\rho_c \dot{r}}{G_{ref}} = 0.03q \left( \frac{G}{G_{ref}} \right)^{0.8} \left( \frac{G_{ref} x}{\mu} \right)^{-0.2} B^{1-k} \quad (3.52)$$

となる。無次元数  $\dot{m}^* = \frac{\rho_c \dot{r}}{G_{ref}}$ ,  $G^* = \frac{G}{G_{ref}}$ ,  $Re_{x,ref} = \frac{G_{ref} x}{\mu}$  を使って上式を表すと以下のようになる。

$$\dot{m}^* = 0.03q G^{*0.8} Re_{x,ref}^{-0.2} B^{1-k} \quad (3.53)$$

上式において乱流プラントル数が燃料後退速度に及ぼす影響を調べるために、 $Pr = 1$  の下で  $Pr$  を変化させて燃料後退速度の計算を行った。その結果を図 3.1 に示す。これより乱流プラントル数が増大すると燃料後退速度が低下することがわかる。また  $Pr > 1$  の場合、燃料後退速度の指数が Marxman らの結果に比べて若干低下した。反対に、 $Pr < 1$  の時には若干増加した。ただし、今回の計算で使用した数値の範囲では、燃料後退速度の値に関しては Marxman の式による計算結果と大きな違いは無かった。次に、乱流プラントル数  $Pr$  を 1 に固定した状態でプラントル数  $Pr$  を変化させて燃料後退速度に及ぼす影響を調べた。その結果を図 3.2 に示す。この場合も Marxman らの結果と大きな違いは無いが、 $Pr$  が増加するにつれて燃料後退速度が減少する傾向が見られた。また細かく見ると  $Pr < 1$  の時は、燃料後退速度の指数は Marxman らの結果と比べて若干小さくなった。反対に  $Pr > 1$  の時は、ほとんど変化は無かった。また吹出しを伴う乱流境界層の壁面近傍の乱流プラントル数は、Senda らの実験データによると大体 1.4 から 1.9 の間にあった[3-13]。Senda らの実験は境界層燃焼ではないために、同燃焼に対する乱流プラントル数の値は明確ではないが、ここではやや大きめの  $Pr = 2, 3$  について計算を行った。その結果を図 3.3, 図 3.4 に示す。これらの図において、本計算の範囲では  $Pr > 1$  の時は Marxman の式と比べて燃料後退速度の指数はほとんど変わりはなかった。一方、 $Pr < 1$  の時は若干指数が低下するのが見られた。また乱流プラントル数が大きくなるにつれて、燃料後退速度および同指数は若干低下する傾向にあった。乱流シュミット数を変化させた時の燃料後退速度の変化を図 3.5 に示す。基本的に同無次元数の変化に対して燃料後退速度は大きな影響を受けないが、同一のプラントル数、乱流プラントル数の下では乱流シュミット数が増加するにつれて燃



料後退速度が低下する傾向を持つことがわかった。さらに詳細に見れば、乱流シュミット数が増加するにつれて燃料後退速度の指数も僅かだが減少するのが見られた。なお、Marxman らの式では  $Sc_t=1$  とおいている。

### 3.4 境界層内の火炎面の位置

乱流境界層における平均全せん断応力  $\tau$  と酸化剤の平均全質量流束  $\dot{m}_{ox}$  はそれぞれ以下のように表される。

$$\dot{m}_{ox} = \rho(D + \varepsilon_D) \frac{\partial Y_{ox}}{\partial y} \quad (3.54)$$

同境界層内での物質伝達と流体摩擦のアナロジについて、下記の仮定が用いられる。

$$\frac{\dot{m}_{ox}}{\dot{m}_{ox,fl}} = \frac{\tau}{\tau_{fl}} \quad (3.55)$$

上式に対して式(3.1)と式 (3.54)を代入すると、次式を得る。

$$\frac{\partial Y_{ox}}{\partial y} = \frac{\dot{m}_{ox,fl}}{\tau_{fl}} \frac{\nu + \varepsilon_M}{\frac{\nu}{Sc} + \frac{\varepsilon_M}{Sc_t}} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.56)$$

主流側の火炎端 ( $y = \delta_{fl}$ ) から、速度境界層または濃度境界層のいずれか厚い方の外縁まで上式を積分すると、次式が得られる。

$$Y_{ox,e} - Y_{ox,fl} = \frac{\dot{m}_{ox,fl}}{\tau_{fl}} u_e I_D \quad (3.57)$$

ここで、

$$I_D = \int_{\delta_{fl}/\delta}^1 \frac{\nu + \varepsilon_M}{\frac{\nu}{Sc} + \frac{\varepsilon_M}{Sc_t}} \frac{d\phi}{d\eta} d\eta \quad (3.58)$$

と表される。上式中の渦動粘性係数については混合距離を  $\kappa y$  と仮定した。特に、火炎面上で同係数は以下のように求められる。

$$\varepsilon_{M,fl} = \left[ (\kappa y)^2 \frac{du}{dy} \right]_{y=\delta_{fl}} = u_e \delta \left[ (\kappa \eta)^2 \frac{d\phi}{d\eta} \right]_{\eta=\delta_{fl}/\delta} = u_e \delta \kappa^2 \left[ \ell \eta^{1+\ell} \right]_{\eta=\delta_{fl}/\delta} = u_e \delta \kappa^2 \ell \left( \frac{\delta_{fl}}{\delta} \right)^{1+\ell} \quad (3.59)$$

上記の計算で境界層の速度分布が必要となるが、これについては3.2節と同じく Lengelle の式を使っ

た. 次に,  $\varepsilon_M \gg \nu$  とおいて火炎面上でのせん断応力を計算する. 渦動粘性係数には上記の結果を使うと, 次式が得られる.

$$\begin{aligned}
\tau_{fl} &= \rho_{fl} (\nu + \varepsilon_{M,fl}) \left[ \frac{du}{dy} \right]_{y=\delta_{fl}} \approx \rho_{fl} \varepsilon_{M,fl} \left[ \frac{du}{dy} \right]_{y=\delta_{fl}} \\
&= \rho_{fl} u_e \delta \kappa^2 \ell \left( \frac{\delta_{fl}}{\delta} \right)^{1+\ell} \left( \frac{u_e}{\delta} \right) \left[ \frac{d\phi}{d\eta} \right]_{\eta=\delta_{fl}/\delta} = \rho_{fl} u_e^2 \kappa^2 \ell \left( \frac{\delta_{fl}}{\delta} \right)^{1+\ell} \left[ \ell \eta^{\ell-1} \right]_{\eta=\delta_{fl}/\delta} \\
&= \rho_{fl} u_e^2 \kappa^2 \ell^2 \left( \frac{\delta_{fl}}{\delta} \right)^{2\ell} = \frac{T_e}{T_{fl}} \rho_e u_e^2 \kappa^2 \ell^2 \phi_{fl}^2 \quad (3.60)
\end{aligned}$$

酸化剤は火炎面上で  $Y_{ox,fl} = 0$  とし, またそこでの質量流束は化学量論比(O/F)になっているものと仮定すると次式が成り立つ.

$$\dot{m}_{ox,fl} = (O/F) (\rho\nu)_s \quad (3.61)$$

$Y_{ox,fl} = 0$  と上式を式(3.57)に適用すると, 直ちに次式を得る.

$$Y_{ox,e} = (O/F) \frac{(\rho\nu)_s}{\tau_{fl}} u_e I_D \quad (3.62)$$

さらに式(3.60)を上式に代入して  $\phi_{fl}$  について整理すると,

$$\phi_{fl}^2 - K_D I_D = 0 \quad (3.63)$$

となる. ここで,

$$K_D = \frac{(O/F)(\rho\nu)_s}{(T_e/T_{fl}) \rho_e u_e \kappa^2 \ell^2 Y_{ox,e}} = \frac{(O/F)(T_{fl}/T_e)}{\kappa^2 \ell^2 Y_{ox,e}} \left[ \frac{(\rho\nu)_s}{(C_f/2) \rho_e u_e} \right] \frac{C_f}{2} = \frac{(O/F)(T_{fl}/T_e) B_a C_f}{\kappa^2 Y_{ox,e} \ell^2 2} \quad (3.64)$$

と表される. さらに, 式(3.16)と式(3.17)の関係を使った場合, 上式は以下のように直される.

$$K_D = \frac{(O/F)(T_{fl}/T_e)}{\kappa^2 \ell^2 Y_{ox,e}} \left[ \frac{(\rho\nu)_s}{(C_f/2) \rho_e u_e} \right] \left( \frac{C_f/2}{C_{f0}/2} \right) \frac{C_{f0}}{2} = \frac{0.03q(O/F)(T_{fl}/T_e)}{\kappa^2 Y_{ox,e}} \text{Re}_x^{-0.2} \frac{B_a^{1-k}}{\ell^2} \quad (3.65)$$

式(3.58)の積分範囲は一般的には乱流領域の中にあると考えられるので, そこでは  $\varepsilon_M \gg \nu$ ,  $\varepsilon_D \gg D$

とおける. したがって同式は以下のように近似できる.

$$I_D \approx \int_{\delta_{fl}/\delta}^1 S_{C_t} \frac{d\phi}{d\eta} d\eta = S_{C_t} (1 - \phi_{fl}) \quad (3.66)$$

なお積分区間で乱流シュミット数は一定とした. 次に, 上式を式(3.63)に代入すると,

$$\phi_{fl}^2 + S_{c_i} K_D \phi_{fl} - S_{c_i} K_D = 0 \quad (3.67)$$

となり、これを解くと主流速度に対する火炎面上の流速の比が求まる。

$$\phi_{fl} = \frac{1}{2} \left[ -S_{c_i} K_D + \sqrt{(S_{c_i} K_D)^2 + 4S_{c_i} K_D} \right] \quad (3.68)$$

式(3.11)に上記の解を代入すると、境界層内の火炎の位置を求める式が得られる。

$$\eta_{fl} = \phi_{fl}^{1/\ell} \quad (3.69)$$

一方で Marxman が導出した速度比の式は、その導出過程で以下の境界層の速度分布式を用いている。

$$\phi = \eta^{\ell_0} \frac{1 + B_a \eta^{\ell_0} / 2}{1 + B_a / 2} \quad (3.70)$$

Karabeyoglu は、この式よりも Lengelle の式(3.11)の方が精度が良いと報告している[3-10]。また、Marxman が同速度比を求める時に使った方法に対して Lengelle の式を適用すると、途中は省略するが最終的に以下の結果が得られる。

$$\phi_{fl} = \frac{1}{2} \left( -K_D + \sqrt{K_D^2 + 4K_D} \right) \quad (3.71)$$

これは式(3.68)において  $S_{c_i}=1$  としたものと等しくなっている。なお、図 3.1 から図 3.5 までの Marxman らの結果については、速度比を計算する際に上式を使った。本来 Marxman らは式(3.47)を使用していたが、ここでは他のケースとの違いを明瞭にするために上式を用いた。またそれ以外については式(3.68)を使用した。

### 3.5 まとめ

Marxman らのハイブリッドロケットの燃焼理論について主にアナログの部分を拡張し、プラントル数、乱流プラントル数等の影響を調べることができるようにした。これを用いて燃料後退速度特性を理論的に求めた。

燃料後退速度の大きさ自体は Marxman らによって得られた結果と大きな差異は無かった。ただし、プラントル数、乱流プラントル数、乱流シュミット数の増加に伴い燃料後退速度が低下すること、さらにこれらの無次元数が燃料後退速度の指数に及ぼす影響について定量的に把握することができた。

Marxman らの GOX/PMMA を使ったハイブリッドロケットの燃焼実験データより燃料後退速度の指数が求められ、これと比較した。乱流プラントル数については、吹出しを有する非燃焼状態の乱流境界層に対する Senda らの実験値を用いた所、実験値はほぼ理論の範囲内で一致した。

また、Marxman の方法を拡張したことにより、プラントル数や乱流プラントル数の影響を含むハイブリッドロケットの燃焼応答関数を導くことが可能になった。その他の燃料もハイブリッドロケットでは使用されるが、ワックスなどの低融点燃料は燃料表面上に溶融層を形成するし、ポリプロピレンは化学反応が遅く境界層内で反応が完結しないなどの理由のため、燃料後退速度の指数の実験値が大きく異なっている。これらに関してはさらなる研究が必要である。

### 3章 記号表

$B$	: ブローイングパラメータ
$B_a$	: aerodynamic blowing parameter, $B_a = \frac{\rho_c \dot{r}}{G C_f / 2}$
$B_t$	: thermal blowing parameter
$c_H$	: $c_H = (\text{Pr}/\text{Pr}_t) \text{Re}_x (\delta/x) \kappa^2 \ell$
$C_f$	: 吹出しが有る場合の表面摩擦係数
$C_{f0}$	: 吹出しが無い場合の表面摩擦係数
$c_c$	: 固相の比熱
$c_p$	: 定圧比熱
$D$	: 拡散係数
$F_R$	: 式(3.32)で定義される.
$G$	: 主流の質量流束, $G = \rho_e u_e$
$G_{ref}$	: 主流の質量流束の基準値
$G^*$	: 主流の無次元質量流束, $G^* = G/G_{ref}$
$h$	: 熱伝達率
$h_{fl}$	: 火炎面上での比エンタルピー
$h_s$	: 燃料表面での比エンタルピー
$h_v$	: 固体燃料が初期温度から分解温度に達するまでに加えられる全熱量
$K_D$	: 式(3.64)で定義される.
$\ell$	: Lengelle により提案された境界層の速度分布式の指数
$\ell_0$	: ベキ乗流速分布則の指数
$\dot{m}^*$	: 無次元燃料後退速度, $\dot{m}^* = \rho_c \dot{r}/G_{ref}$
$\dot{m}_{ox}$	: 酸化剤の質量流束

- $\dot{m}_{ox,fl}$  : 火炎面に流入する酸化剤の質量流束
- $k$  : ブローイング指数
- $O/F$  : 酸燃比
- $Pr$  : プラントル数,  $Pr = \nu/\alpha$
- $Pr_t$  : 乱流プラントル数,  $Pr_t = \epsilon_M/\epsilon_H$
- $Q_s$  : 表面反応熱
- $q$  : 式(3.16)で定義される.
- $\dot{q}_{s+}$  : 気相から固相表面に加わる平均全熱流束
- $\dot{q}_{s-}$  : 固相表面から固相内部に伝わる熱流束
- $Re_x$  : 局所レイノルズ数,  $Re_x = \rho_e u_e x/\mu = Gx/\mu$
- $Re_{x,ref}$  :  $Re_{x,ref} = G_{ref} x/\mu$
- $Re_\delta$  : 速度境界層の厚さを代表長とした時のレイノルズ数,  $Re_\delta = \rho_e u_e \delta/\mu = G\delta/\mu$
- $\dot{r}$  : 燃料後退速度
- $Sc$  : シュミット数,  $Sc = \nu/D$
- $Sc_t$  : 乱流シュミット数,  $Sc_t = \epsilon_M/\epsilon_D$
- $St$  : スタントン数
- $T_{fl}$  : 火炎温度
- $T_s$  : 固相表面温度
- $T_e$  : 主流温度
- $u$  : 固相表面に対して水平方向の流速成分
- $u_e$  : 主流速度
- $u_{fl}$  : 火炎面上の流速
- $v$  : 固相表面に対して垂直方向の流速成分

- $x$  : 境界層前縁からの距離
- $Y_{ox}$  : 酸化剤の質量分率
- $Y_{ox,e}$  : 主流中の酸化剤の質量分率
- $Y_{ox,fl}$  : 火炎面に流入する酸化剤の質量分率
- $y$  : 固相表面を原点とし、それに対し垂直外向きを正とした座標
- $\alpha$  : 温度伝導率
- $\delta$  : 速度境界層の厚さ
- $\delta_{fl}$  : 固相表面から火炎前端までの距離
- $\varepsilon_D$  : 渦拡散係数
- $\varepsilon_H$  : 渦温度伝導率
- $\varepsilon_M$  : 渦動粘性係数
- $\eta$  : 無次元距離,  $\eta = y/\delta$
- $\kappa$  : フォン・カルマンの普遍定数
- $\nu$  : 動粘性係数
- $\rho_c$  : 固相の密度
- $\rho_e$  : 主流の密度
- $\rho_{fl}$  : 火炎面上の密度
- $\tau_{fl}$  : 火炎面上での平均全せん断応力
- $\tau_s$  : 固相表面に作用する平均全せん断応力
- $\phi$  : 無次元流速,  $\phi = u/u_e$
- $\phi_{fl}$  :  $\phi_{fl} = u_{fl}/u_e$

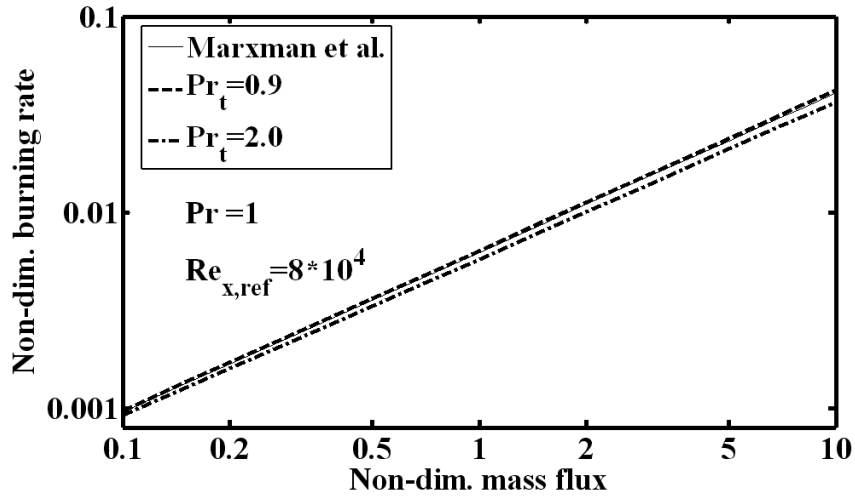


図 3.1 燃料後退速度に及ぼす乱流プラントル数の効果 ( $Pr_t = 1$ )

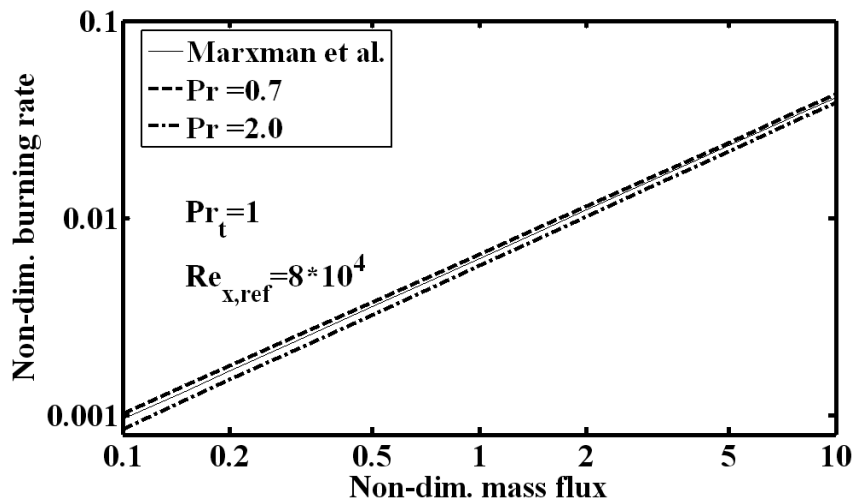


図 3.2 燃料後退速度に及ぼすプラントル数の効果 ( $Pr_t = 1$ )



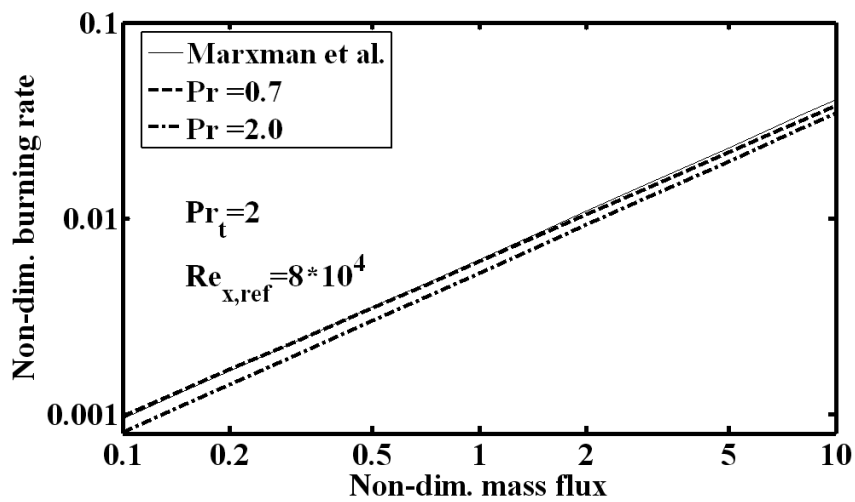


図 3.3 燃料後退速度に及ぼすプラントル数の効果 ( $Pr_t = 2$ )

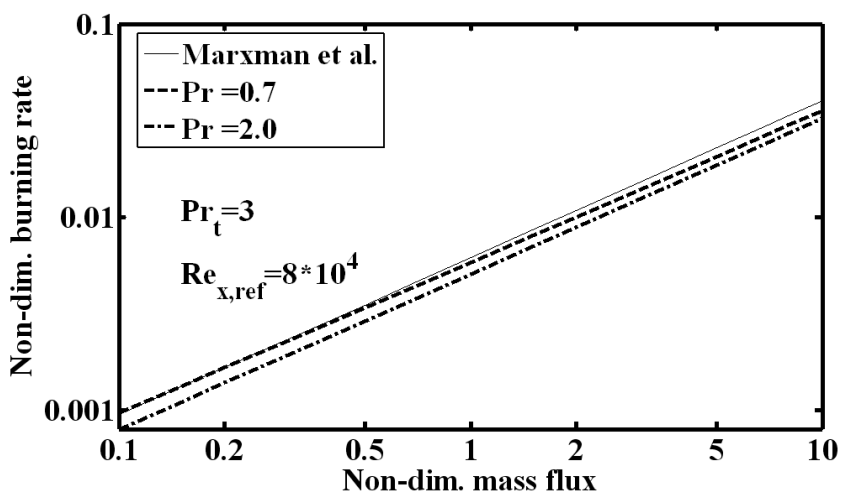


図 3.4 燃料後退速度に及ぼすプラントル数の効果 ( $Pr_t = 3$ )

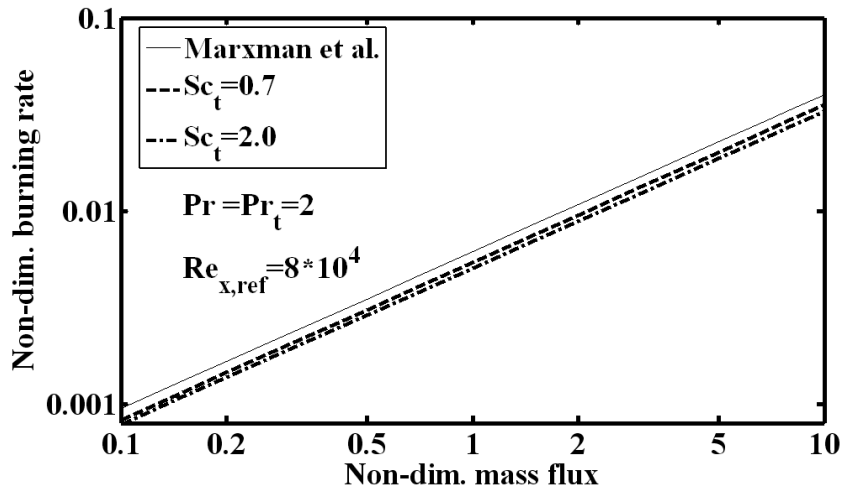


図 3.5 燃料後退速度に及ぼす乱流シュミット数の効果 ( $Pr = Pr_t = 2$ )

### 3章 参考文献

- [3-1] Marxman, G. A., and Gilbert, M.: Turbulent Boundary Layer Combustion in the Hybrid Rocket, Ninth International Symposium on Combustion, Academic Press, New York, pp. 371-383, 1963.
- [3-2] Marxman, G. A., Wooldridge, C. E., and Muzzy, R. J.: Fundamentals of Hybrid Boundary Combustion, Heterogeneous Combustion, Progress in Astronautics and Aeronautics, Vol. 15, Academic Press, New York, pp. 485-521, 1964.
- [3-3] Marxman, G. A.: Combustion in the Turbulent Boundary Layer on a Vaporizing Surface, Tenth Symposium (International) on Combustion, Combustion Inst., Pittsburgh, PA, pp. 1337-1349, 1965.
- [3-4] Boardman, T. A.: Alternative Interpretations of Boundary Layer Blowing Coefficient in Chapter 15, Rocket Propulsion Elements, 7th ed., John Wiley & Sons, 2001, pp. 737-738.
- [3-5] Greatrix, D. R.: Regression Rate Estimation for Standard-Flow Hybrid Rocket Engines, Aerospace Science and Technology, Vol.13, Issue 7, pp. 358-363, Oct., 2009.
- [3-6] Zilliac, G., and Karabeyoglu, M. A.: AIAA 2006-4504, 2006.
- [3-7] Eilers, S. D., and Whitmore, S. A.: Correlation of Hybrid Rocket Propellant Regression Measurements with Enthalpy-Balance Model Predictions, Journal of Spacecraft and Rockets, Vol. 45, No. 5, Sep.-Oct., pp. 1010-1020, 2008.
- [3-8] Eilers, S. D., and Whitmore, S. A.: Logitudinally-Variable Hybrid Rocket Regression Rate Model with Radiation and Boundary Layer Effects, AIAA 2013-4041, 2013.
- [3-9] Lengelle, G.: Model Describing the Erosive Combustion and Velocity Response of Composite Propellants, AIAA Journal, Vol.13, No.3, Mar., pp. 315-322, 1975.
- [3-10] Karabeyoglu, M. A.: Transient Combustion in Hybrid Rockets, Ph.D. Dissertation, Stanford University, Dept. of Aeronautics and Astronautics, Stanford, August 1998.
- [3-11] 森田貴和: 運動量輸送と熱輸送のアナログに基づくハイブリッドロケットの燃焼の応答関数, 宇宙科学技術連合講演会講演集, pp. 1036-1037, 2009.
- [3-12] Netzer, D. W.: Hybrid Rocket Internal Ballistics, Chemical Propulsion Information Agency, CPIA Publ. 222, pp.1-45, Jan., 1972.
- [3-13] Altman, D.: Hybrid Rocket Propulsion Systems, Space Propulsion Analysis, edited by R. W. Humble, G. N. Henry, and W. J. Larson, McGraw-Hill, New York, NY, Chap. 7, 1996.
- [3-14] 萩野文丸: 伝熱学特論, 甲藤好郎, 佐藤俊, 西川兼康, 水科篤郎, 森康夫編, 養賢堂, p.196, 1984.

## 第 4 章

### バルクモードを仮定したハイブリッドロケットの 低周波燃焼不安定の線形安定性解析

## 4.1 まえがき

ハイブリッドロケットにおける振動燃焼の中でも液体酸化剤の供給系の非定常性による燃焼不安定の発生を防ぐには、インジェクター上流側と燃焼室の差圧を十分大きく取ることが重要であるが、この値があまり大き過ぎると供給系に加わる圧力が全体的に大きくなり、構造重量の増加を招く。したがって設計の際には振動燃焼を防止するために適当な差圧を予め把握しておくことが望ましいが、簡便に利用できる手法が少なく、その点でまだ改良を行う余地がある。

本研究は液体酸化剤の燃焼時間遅れによる低周波燃焼不安定を表す伝達関数を導出し、その特性を求めた。これを使うことによりハイブリッドロケットの上記の振動燃焼特性は従来と比べて評価しやすくなった。なお、伝達関数を求める際に壁面への熱損失などの影響を考慮し、燃焼室内の温度変動についてはポリトロープ変化を仮定した。また、ポリトロープ変化を仮定することにより断熱変化や従来使われてきた等温変化の結果を統一的に評価することが可能となった。さらに今回はインジェクターより上流側の供給系の影響は小さいとして無視した。これは本質的な制約ではなくインジェクターより上流側の供給系の伝達関数を従来の方法[4-1]で求めて前述の伝達関数に組み入れることによりその影響を評価することも可能である。ここで、燃焼室内の振動はバルクモードと仮定しているため、細長比  $L/D$  の大きなモータでは誤差が大きくなる可能性がある。これに関しては、第5章で詳しく記載する。

北川と湯浅によって実施された液体酸素旋回型ハイブリッドロケットの燃焼実験[4-2]において液体ロケットエンジンのチャッキングに相当する振動燃焼の発生が報告されており、これは液体酸化剤の燃焼時間遅れに起因すると考察しているが、本研究ではこの実験結果に対し理論的に得られた安定限界および振動周波数との比較を試み、考察を行った。

## 4.2 低周波燃焼不安定の線形安定性解析

ここでは、小型のハイブリッドロケットモータを対象とする。したがって、燃焼室内の各種物理量

は基本的にバルクモードで変動すると見なすことができる。このとき燃焼室内のガスに対する連続の式は次のように表される。

$$\frac{d}{dt}(\rho V) = \dot{M}_{ox} + \dot{M}_F - \dot{M}_N \quad (4.1)$$

一次元ノズル理論に基づくと、ノズルを流れるガスの質量流量は以下のように表される。

$$\dot{M}_N = \frac{\Gamma}{\sqrt{RT}} A_t p \quad (4.2)$$

ここで、

$$\Gamma = \sqrt{\gamma} \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (4.3)$$

以下のように、上式において燃焼室内のガスの変化はポリトロップ過程であると仮定する。

$$p \rho^{-n_p} = const. \quad (4.4)$$

また、以下に示す完全気体の状態方程式を使用する。

$$p = \rho RT \quad (4.5)$$

液体酸化剤が燃焼室へ噴射された後、予熱、気化、拡散・混合、化学反応などの一連の過程を経て燃焼ガスに転化するまで時間遅れが存在し、これを $\tau_{ox}$ とおく。本研究では低周波燃焼不安定を扱うので燃焼時間遅れは燃焼室の圧力振動の影響を受けず一定とする。したがってガス化した直後の液体酸化剤の質量流量はこの時間遅れを使って以下のように表すことができる。

$$\dot{M}_{ox}(t) = \dot{M}_{ox,\ell}(t - \tau_{ox}) \quad (4.6)$$

上式を無次元化および摂動展開してラプラス変換を施すと、

$$\hat{M}_{ox}^* = \hat{M}_{ox,\ell}^* \exp(-\tau_{ox}s) \quad (4.7)$$

となる。液体酸化剤はインジェクターから噴射される前後で非圧縮性のベルヌーイの式を満たすとすると、

$$p_j = p + \frac{\dot{M}_{ox,\ell}^2}{2\rho_{ox}A_j} \quad (4.8)$$

となる。インジェクター・マニホールドでは動圧は無視でき淀み点状態が達成されているものとする。また、ここでは十分に圧力振動が緩和されているものとし、インジェクターより上流側の供給系の非定常性の影響は小さいものとして無視した。なおこの非定常性が無視できない場合は、インジェクターより上流側の供給系の各要素をシステム全体の伝達関数に加える必要がある。上記のベルヌーイの式を摂動展開してラプラス変換を施すと、以下のようになる。

$$\hat{p}_j^* - \hat{p}^* = \frac{2\Delta p}{\bar{p}} \hat{M}_{ox,\ell}^* \quad (4.9)$$

連続の式とポリトロープ変化の式を摂動展開してラプラス変換を施すと、次式を得る。

$$\frac{\tau_r}{n_p} s \hat{p}^* = \frac{O/F}{O/F+1} \hat{M}_{ox}^* + \frac{1}{O/F+1} \hat{M}_F^* - \frac{n_p+1}{2n_p} \hat{p}^* \quad (4.10)$$

燃料の質量流量の摂動成分に対しラプラス変換を施したものについてハイブリッドロケットの燃焼応答関数  $R_G$  を使って表すと、

$$\hat{M}_F^* \equiv R_G \hat{G}_{ox}^* = R_G \frac{\hat{G}_{ox}}{\bar{G}_{ox}} = R_G \frac{\hat{M}_{ox}}{\bar{M}_{ox}} = R_G \hat{M}_{ox}^* = R_G \hat{M}_{ox,\ell}^* \exp(-\tau_{ox}s) \quad (4.11)$$

となる。式(4.7)および式(4.11)を式(4.10)に当てはめると、次式を得る。

$$\left( \frac{\tau_r s}{n_p} + \frac{n_p+1}{2n_p} \right) \hat{p}^* = \kappa \hat{M}_{ox,\ell}^* \exp(-\tau_{ox}s) \quad (4.12)$$

ここで,

$$\kappa = \frac{O/F + R_G}{O/F + 1} \quad (4.13)$$

式(4.9)と式(4.12)より, バルクモードの近似が有効な小型ハイブリッドロケットモータに対する低周波燃焼不安定を記述する伝達関数を求めることができる[4-3, 4].

$$\frac{\hat{p}^*}{\hat{p}_j^*} = \frac{\kappa}{\frac{2\Delta p}{\bar{p}} \left( \frac{\tau_r s}{n_p} + \frac{n_p + 1}{2n_p} \right) \exp(\tau_{ox} s) + \kappa} \quad (4.14)$$

上記の伝達関数を書き直すと, 次式を得る.

$$\frac{\hat{p}^*}{\hat{p}_j^*} = \frac{1}{1 + \frac{\Delta p^*}{n_p} (\tau_r s + I_p) \exp(\tau_{ox} s)} \quad (4.15)$$

十分に低い周波数では, ハイブリッドロケットの燃焼応答関数は燃料後退速度の指数で近似できるため, 次式が成り立つ.

$$\kappa = \frac{O/F + n}{O/F + 1} \quad (4.16)$$

### 4.3 内部安定性に基づく増幅係数

式(4.15)で表される系の内部安定性(intrinsic instability)についての増幅係数ならびに角振動数は, 同式の分母を0とおくことで求められる.

$$1 + \frac{\Delta p^*}{n_p} (\tau_r s + I_p) \exp(\tau_{ox} s) = 0 \quad (4.17)$$

上式に対し  $s = \alpha + i\omega$  とおいて実部と虚部に分けると以下のようなになる[3-4].



$$\frac{\tau_r}{\tau_{ox}} \omega^* = \frac{n_p}{\Delta p^*} \sin \omega^* \exp(-\alpha^*) \quad (4.18)$$

$$\alpha^* = -\left( \frac{\omega^*}{\tan \omega^*} + \frac{I_p}{\tau_r/\tau_{ox}} \right) \quad (4.19)$$

ここで、増幅係数と角振動数の無次元化は以下のように行った。

$$\alpha^* = \tau_{ox} \alpha \quad (4.20)$$

$$\omega^* = \tau_{ox} \omega \quad (4.21)$$

式(4.19)を式(4.18)に代入し、 $\alpha^*$ を消去すると $\omega^*$ のみの式が得られる。これを解いてさらに式(4.19)から無次元増幅係数 $\alpha^*$ を求めた結果が図 4.1 である。同図から $\Delta p/\bar{p}$ が増加するにつれて無次元増幅係数 $\alpha^*$ が小さくなることがわかる。したがって $\Delta p/\bar{p}$ が増加するにつれて安定度は増し、反対に同量が減少するにつれて不安定度が増大する。さらに $\tau_r/\tau_{ox}$ が増加するにつれて無次元増幅係数が小さくなることが分かる。

#### 4.4 安定限界および中立振動の周波数

低周波燃焼不安定の安定限界ならびに中立安定時の角振動数を得るために、式(4.17)に対して $s = i\omega$ とおいて分母を0とすると、次式を得る。

$$1 + \frac{\Delta p^*}{n_p} (i\tau_r \omega + I_p) \exp(i\tau_{ox} \omega) = 0 \quad (4.22)$$

上式を実部と虚部に分けると、以下の二式が求まる。

$$\Delta p^* = \frac{n_p}{\sqrt{I_p^2 + \left(\frac{\tau_r}{\tau_{ox}}\right)^2 \omega^{*2}}}, \quad (4.23)$$

$$\frac{\tau_r}{\tau_{ox}} \omega^* + I_p \tan \omega^* = 0. \quad (4.24)$$

式(4.23)と式(4.24)を見ると、 $\Delta p^*$ は $\tau_r/\tau_{ox}$ とポリトロープ指数 $n_p$ のみの関数として表現できることがわかる。他のパラメータとは関係しないので $\Delta p^*$ で表した安定限界線図は比較的汎用性を持つことになる。 $\Delta p^*$ の計算手順はまず式(4.24)を数値的に解いて中立振動の無次元角周波数 $\omega^*$ を求め、それを式(4.23)に代入して算出する.. このようにして得られた $\Delta p^*$ の結果を図 4.2 に示す。同図を見ると、推進薬ガス滞留時間が増大するにつれて安定領域が拡大するのがわかる。ただし、L/D が大きなモータでは境界層での伝熱の時間遅れによる振動燃焼等が発生しやすくなる可能性があるため、滞留時間を一方的に大きくすればよいというわけではない。安定性の観点としてはやはり $\Delta p/p$ を適当な大きさにとることが基本となる。またポリトロープ指数が増大するにつれて不安定の領域が増大する様子が見られる。なお同指数を 1 とおいたケースは等温モデルに相当する。 $n_p=1.24$ の値は表 4.1 に基づく LOX/PMMA ハイブリッドロケットの燃焼生成ガスの比熱比を表しており、燃焼室内のガスの温度変動を断熱変化と仮定したことに相当する。次に、中立振動の無次元周波数 $\omega^*(=2\pi f\tau_{ox})$ を求めると図4.3のようになる。 $n_p=1$ 、 $n_p=1.24$ のいずれの場合においても図4.3の横軸の範囲では若干の相違しか見られなかった。これは、式(4.24)を使って振動周波数を求める際にポリトロープ指数の効果を示す $I_p$ の典型的な値が1近傍で、あまり大きな変化をしないからである。ただし、 $\tau_r/\tau_{ox}$ の比が大きくなれば差異がだんだんと明瞭化してくる。実際に使用する $n_p$ の値の範囲は、ハイブリッドロケット推進剤の種類に関係なくさほど大きくはないため、振動周波数のポリトロープ指数への依存は無視してよいと考えられる。

#### 4.5 推進薬ガス滞留時間と酸化剤の燃焼時間遅れ

以下の式で示される推進薬ガス滞留時間はロケットエンジンの内部弾道学で用いられるパラメータの一つで、振動燃焼などの非定常過程の記述の際にも重要な量となる。

$$\tau_r = \frac{\bar{\rho}V}{\dot{M}_N} = \frac{c^*L^*}{RT} \quad (4.25)$$

基本的に  $c^*$  は実験値を用い、 $\overline{RT}$  は  $c^*$  効率を使って実験値に相当する値を求めて使用する。以下で  $\overline{RT}$  の値の算出について詳述する。まず  $c_{th}^*$  は一次元ノズル理論により次式で表される。

$$c_{th}^{*2} = \frac{(\overline{RT})_{th}}{\gamma} \left( \frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \quad (4.26)$$

実験値もこれと同じ形で表されると仮定し、比熱比の変化は小さいので簡単化のため化学平衡計算で得られた値と実験値が等しいと近似すると、直ちに次式が得られる。

$$\overline{RT} = (\overline{RT})_{th} \left( \frac{c^*}{c_{th}^*} \right)^2 = (\overline{RT})_{th} \eta_{c^*}^2 \quad (4.27)$$

ここで、 $\eta_{c^*}$  は  $c^*$  効率である。式(4.26)の導出過程で等エントロピー流れを仮定しているために壁面への熱損失などの影響が含まれていない。

液体酸化剤が燃焼室へ噴射された後、予熱、蒸発、燃焼反応などの一連の過程を経て燃焼生成ガスに転化するまでの時間遅れが存在し、これを液体酸化剤の燃焼時間遅れ  $\tau_{ox}$  とした。この値は、液体酸化剤の質量流量の変動に対する燃焼室内圧変動の伝達関数を求め、その入出力の位相差から求められる。まずこの伝達関数は式(4.12)より、以下のように表される。

$$\frac{\hat{p}^*}{\hat{M}_{ox,\ell}^*} = \frac{n_p \kappa}{\tau_r s + I_p} \exp(-\tau_{ox} s) \quad (4.28)$$

$\hat{M}_{ox,\ell}^*$  に対する  $\hat{p}^*$  の位相差を  $\phi$  とおくと、上式より次式が得られる。

$$\tan\phi = - \frac{\frac{\tau_r}{\tau_{ox}} \omega^* + \left( I_p + \frac{\tau_r}{\tau_{ox}} \alpha^* \right) \tan\omega^*}{I_p + \frac{\tau_r}{\tau_{ox}} \alpha^* - \frac{\tau_r}{\tau_{ox}} \omega^* \tan\omega^*} \quad (4.29)$$

式(4.19)を上式に代入すると、 $\tan\phi = 0$ 、すなわち  $\phi = \pi$  となる。これより周波数が低く燃焼応答関数が燃料後退速度の指数で近似できる場合は、燃焼室圧の変動と液体酸化剤の質量流量の変動の位相差が  $180^\circ$  になることがわかる[4-4, 5]。したがって振動周期の  $1/2$  を  $\tau_{ox,\phi}$  とおくと、直ちに次式を得る。

$$\omega^* = \pi \frac{\tau_{ox}}{\tau_{ox,\phi}} \quad (4.30)$$

上式を式(4.19)に代入し変形すると、次式となる[4-5].

$$\tan\left(\pi \frac{\tau_{ox}}{\tau_{ox,\phi}}\right) = -\frac{\pi}{I_p + \tau_r \alpha} \frac{\tau_r}{\tau_{ox,\phi}} \quad (4.31)$$

したがって燃焼実験から  $\tau_r$ ,  $\tau_{ox,\phi}$ ,  $\alpha$  の値を取得すれば、上式より液体酸化剤の燃焼時間遅れ  $\tau_{ox}$  を実験値として求めることができる. ここで、 $n_p$  の値については任意性を伴うが、 $I_p$  の形にすると実用上の  $n_p$  の範囲ではその値の差は少なく、 $\tau_{ox}$  への影響は小さいものとして本研究では代表的な値を使用した. 一方、 $n_p$  の任意性を除去するには、式(4.18)および式(4.19)に式(4.30)を代入し  $n_p$  を消去すると、次式が得られる:

$$2\pi \frac{\tau_r}{\tau_{ox,\phi}} \cos\left(\pi \frac{\tau_{ox}}{\tau_{ox,\phi}}\right) + (1 + 2\tau_r \alpha) \sin\left(\pi \frac{\tau_{ox}}{\tau_{ox,\phi}}\right) + \pi \frac{\tau_r}{\tau_{ox,\phi}} \Delta p^* \exp(\tau_{ox} \alpha) = 0. \quad (4.32)$$

したがって燃焼実験から  $\tau_r$ ,  $\tau_{ox,\phi}$ ,  $\Delta p/\bar{p}$ ,  $O/F$ ,  $n$ ,  $\alpha$  の値を取得すれば、上式より液体酸化剤の燃焼時間遅れ  $\tau_{ox}$  を求めることができる. ただし、予め入力するパラメータが多い分、誤差が大きくなる可能性があるので注意を要する.

#### 4.6 ハイブリッドロケットの燃焼実験との比較

北川・湯浅により実施された液体酸素旋回型ハイブリッドロケットの実験[4-2]との比較を行った. これに関連する諸量については表 4.1 に示す. このハイブリッドロケットは壁面に沿って液体酸素が旋回するように噴射されるため、比較的酸化剤の燃焼時間遅れが大きい. 表 4.1 の値を基に安定限界線図に実験値をプロットすると図 4.4 のようになる. 表 4.1 の実験は安定限界の近傍で振動燃焼が発生したケースであり、圧力履歴から振動が発生した時点で  $\Delta p/\bar{p} = 0.41$  と評価した. 推進薬ガス滞留時間を実験値から計算すると、 $\tau_r = 0.0075 \text{ sec}$  であった. チャッキングの特性からインジェクター

より上流側の供給系の影響を無視した場合、中立安定の近傍では式(4.29)から酸化剤の質量流量と燃焼室の内圧振動は逆位相になっており、 $\tau_{ox,\phi}$ の値を内圧振動の周期の半分とした。実験で得られた内圧振動の周波数は $f=14\text{Hz}$ であったので、この値を使って図 4.2 に同ハイブリッドロケットの動作点(図中の丸印)をプロットすると、断熱変化( $n_p=1.24$ )と仮定した安定限界より低い位置(不安定側)にあることがわかる。なお等温モデルでは安定側に実験データがプロットされ、矛盾が生じた。また、その他の実験点も合わせて同図に加えている。同じ条件で中立安定時の無次元角振動数のグラフに黒丸としてプロットすると、図 4.5 のようになる。実験と線形安定性解析の結果はよく一致していることが分かる。

#### 4.7 まとめ

液体酸化剤の燃焼時間遅れに起因する小型ハイブリッドロケットの低周波燃焼不安定について安定限界線図ならびに中立振動の周波数の特性を計算し、以下のことがわかった。インジェクターより上流側の供給系の影響を無視した場合には、燃焼安定限界は液体酸化剤の燃焼時間遅れに対する推進薬ガス滞留時間の比とポリトロープ指数のみで特徴付けられることがわかった。また同様の場合、中立振動の周波数については主として $\tau_r/\tau_{ox}$ の比で特徴付けられ、ポリトロープ指数への依存性は実用上ほぼ無視できることがわかった。本研究で得られた結果を液体酸素旋回型ハイブリッドロケットの実験データに適用したが、振動周波数は実験と理論がよく一致した。一方、安定限界に関しては、等温モデルよりポリトロープ変化を仮定した方が同データとの整合性が取り易かった。また中立安定近傍の動作点で液体酸化剤の燃焼時間遅れと $\tau_{ox,\phi}$ が異なることを線形安定性解析から確認した。今回は実験との比較に際し、チャッキングの特性に着目して $\tau_{ox,\phi}$ を内圧振動の周期の1/2に取って計算を行った。

#### 4章 記号表

$A_j$	: インジェクターオリフィスの断面積, $m^2$
$A_t$	: ノズルスロート面積, $m^2$
$c^*$	: 特性排気速度, $m/s$
$c_{th}^*$	: 理論特性排気速度, $m/s$
$L^*$	: $L^* = V/A_t$ , $m$
$I_p$	: $I_p = (n_p + 1)/2$
$i$	: 虚数単位
$\dot{M}_F$	: 燃料の質量流量, $kg/s$
$\dot{M}_{ox}$	: 気化した酸化剤の質量流量, $kg/s$
$\dot{M}_{ox,\ell}$	: 液体酸化剤の質量流量, $kg/s$
$\dot{M}_{ox,\ell}^*$	: $\dot{M}_{ox,\ell}^* = \dot{M}_{ox,\ell} / \bar{M}_{ox}$
$\dot{M}_N$	: ノズルから流出するガスの質量流量, $kg/s$
$n$	: 燃料後退速度の指数
$n_p$	: ポリトロープ指数
$O/F$	: 酸燃比
$p$	: 燃焼室圧, $Pa$
$p_j$	: インジェクター上流圧, $Pa$
$p^*$	: $p^* = p/\bar{p}$
$p_j^*$	: $p_j^* = p_j/\bar{p}$
$R$	: 気体定数, $J/kg \cdot K$
$s$	: ラプラス変換のパラメータ
$T$	: 燃焼室内のガス温度, $K$
$t$	: 時間, $s$
$V$	: 燃焼室の体積, $m^3$

## ギリシャ文字

- $\alpha$  : 増幅係数, 1/s
- $\alpha^*$  :  $\alpha^* = \tau_{ox}\alpha$
- $\Delta p$  :  $\Delta p = \bar{p}_j - \bar{p}$ , Pa
- $\Delta p^*$  :  $\Delta p^* = \frac{2\Delta p}{\bar{p}} \left( \frac{O/F + 1}{O/F + n} \right)$
- $\kappa$  :  $\kappa = \frac{O/F + R_G}{O/F + 1}$
- $\gamma$  : 燃焼生成ガスの比熱比
- $\rho_c$  : 燃焼室内のガスの密度,  $\text{kg/m}^3$
- $\rho_F$  : 固体燃料の密度,  $\text{kg/m}^3$
- $\rho_{ox}$  : 流体酸化剤の密度,  $\text{kg/m}^3$
- $\tau_{ox}$  : 液体酸化剤の燃焼時間遅れ, s
- $\tau_{ox,\phi}$  : 液体酸化剤の流量変動に対する燃焼室の内圧振動の時間遅れ, s
- $\tau_r$  : 推進薬ガス滞留時間, s
- $\phi$  : 液体酸化剤の質量流量振動に対する燃焼室の内圧振動の位相差, rad
- $\omega$  : 角振動数, rad/s
- $\omega^*$  :  $\omega^* = \tau_{ox}\omega$

## 添え字

- : 定常燃焼時の値
- ^ : ラプラス変換量
- \* : 無次元量

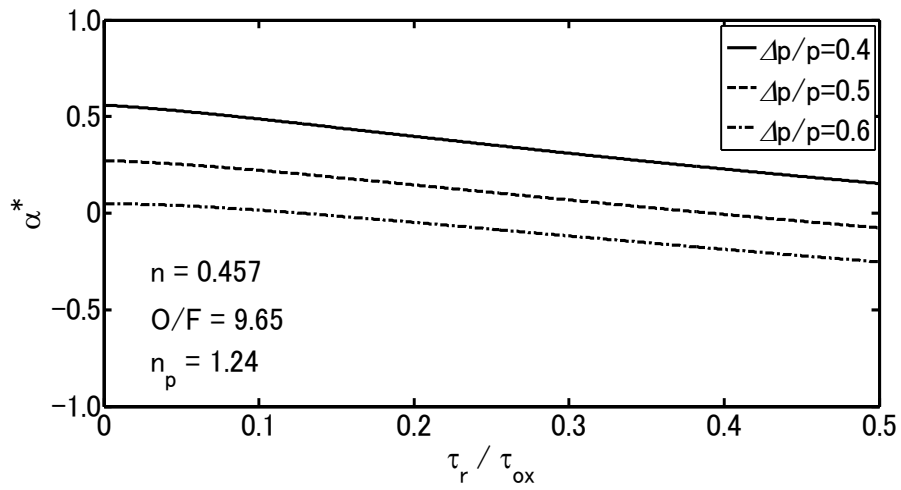


図 4.1 無次元増幅係数  $\alpha^*$  に対する  $\Delta p / \bar{p}$  の影響

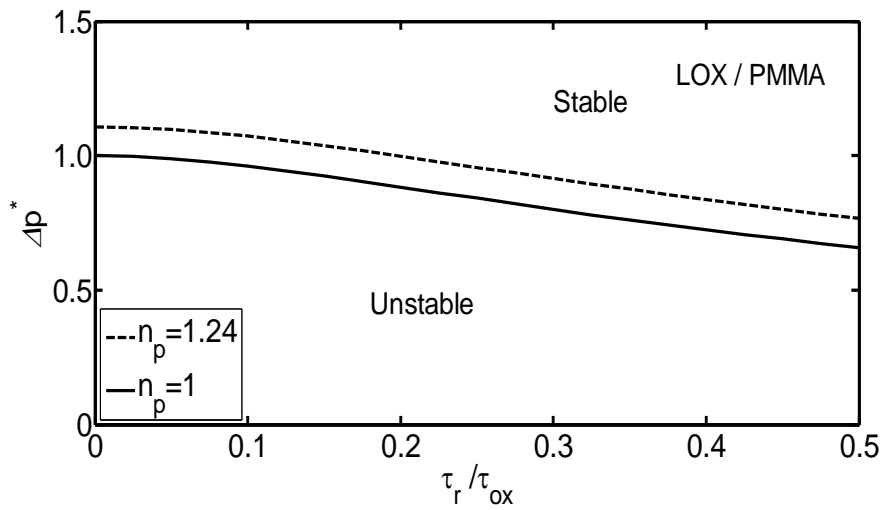


図 4.2 低周波燃焼不安定の安定限界線図



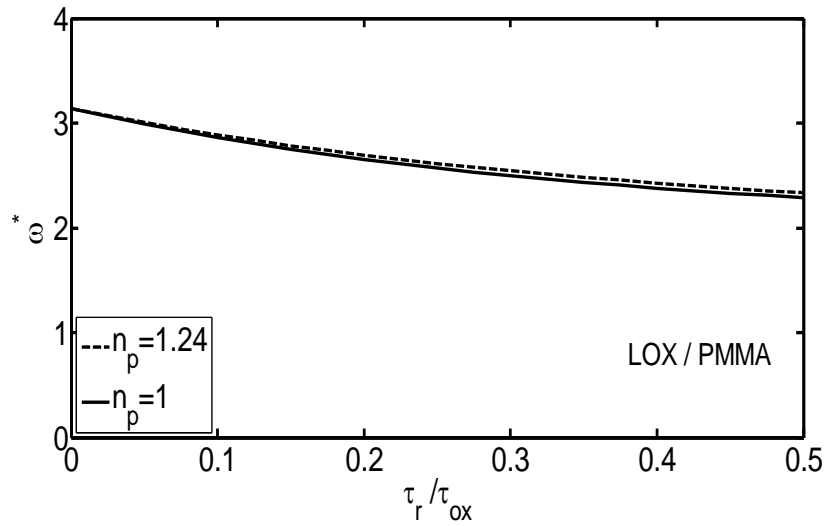


図 4.3 低周波燃焼不安定の中立振動の周波数

表 4.1 LOX/PMMA の酸化剤旋回流型ハイブリッドロケットエンジンの燃焼試験

項目	値	単位
酸燃比	9.65	
液体酸化剤の質量流量	114	g/s
燃料後退速度の指数	0.457	
ポート径	40.0	mm
ノズルスロート径	10.5	mm
燃焼室の体積	274	cc
特性排気速度	975	m/s
理論特性排気速度	1076	m/s
c* 効率	0.91	
酸化剤／燃料	LOX/PMMA	
燃料の密度	1180	kg/m <sup>3</sup>
断熱火炎温度	1938	K
燃焼ガスの比熱比	1.235	
燃焼ガスの平均分子量	32.11	g/mol

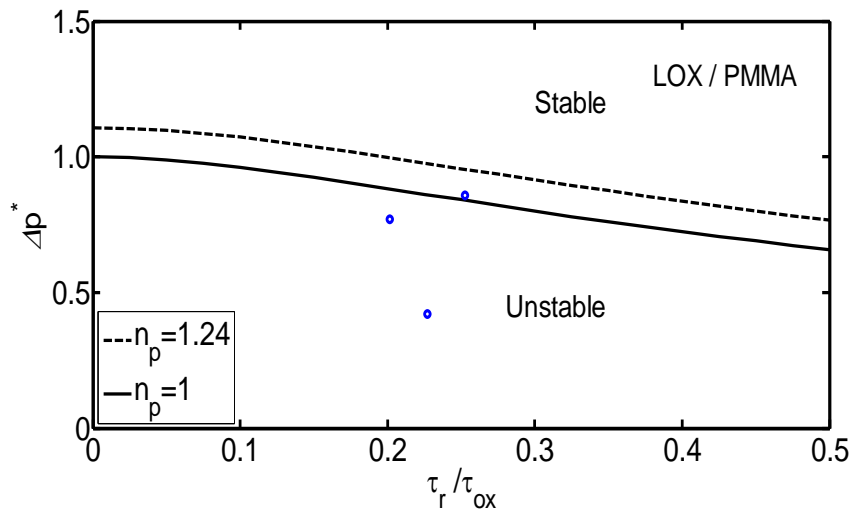


図 4.4 液体酸素旋回型ハイブリッドロケット実験との比較 (安定限界)

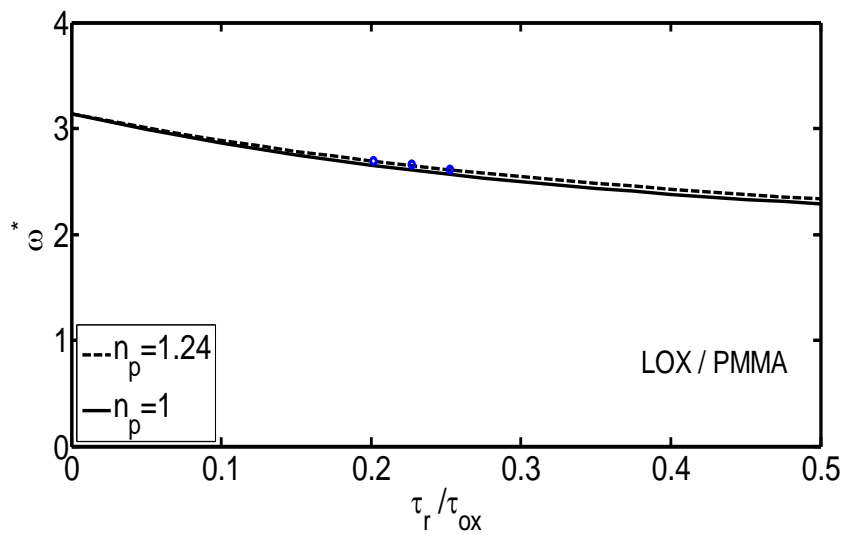


図 4.5 液体酸素旋回型ハイブリッドロケット実験との比較 (無次元角振動数)

#### 4章 参考文献

- [4-1] Karabeyoglu, A., Stevens, J., and Cantwell, B.: Investigation of Feed System Coupled Low Frequency Combustion Instabilities in Hybrid Rockets, AIAA Paper 2007-5366, 2007.
- [4-2] 北川幸樹, 湯浅三郎: 液体酸素旋回型ハイブリッドロケットエンジンの燃焼特性, 日本航空宇宙学会論文集, Vol.54, No.629, pp.242-249, 2006.
- [4-3] 森田貴和, 北川幸樹, 湯浅三郎, 嶋田徹: 液体酸化剤の燃焼時間遅れによるハイブリッドロケットの低周波不安定燃焼, 第 54 回宇宙科学技術連合講演会, JSASS-2010-4417, 2010.
- [4-4] Morita, T., Kitagawa, K., Yuasa, S., Yamaguchi, S., and Shimada, T.: Low-Frequency Combustion Instability Induced by the Combustion Time Lag of Liquid Oxidizer in Hybrid Rocket Motors, Transactions of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences, Aerospace Technology Japan, Vol.10, pp.37-41, 2012.
- [4-5] 森田貴和, 臼井雄太郎, 勝又玲子, 北川幸樹, 湯浅三郎, 嶋田徹: 酸化剤供給系のカップリングによるハイブリッドロケットの燃焼不安定に関する研究, 第 57 回宇宙科学技術連合講演会講演集, JSASS-2013-4523, 2013.

## 第 5 章

軸方向の物理量の変化を考慮したハイブリッド  
ロケットの低周波燃焼不安定の線形安定性解析

## 5.1 まえがき

ハイブリッドロケットの振動燃焼の解析は、固体ロケットと比べて本質的にモータ内部の流れ場の効果を考慮する必要があるため理論的な取り扱いが難しい。よって、振動燃焼の解析に際して燃焼室内の物理量を空間的に一様と仮定したバルクモードの近似がよく用いられてきた。これに対し大型のハイブリッドロケットでは燃焼室が軸方向に細長い形状を取ることが多いために諸物理量の空間的な変化を無視するとその分誤差が発生してしまうことになる。したがって空間的な変化を考慮した解析が望まれるが、Karabeyoglu ら[5-1, 2]により近似的な手法で燃料ポート部に対して伝達関数が求められたことを除くと、このような研究は未だ少ない。なお、彼らにより得られた伝達関数は、TCG 結合伝達関数(thermal lag-combustion-gasdynamics coupled transfer function)と呼ばれており、気体の状態変化は等温変化を仮定している。とりわけ液体酸化剤供給系を持つハイブリッドロケットにおける低周波燃焼不安定に対して上記のような効果を考慮した解析は見当たらない。本研究では、軸方向の諸物理量の空間的な変化を考慮した Karabeyoglu の方法を燃料ポート部に使った[5-3, 4, 5, 6]。ただし、本研究ではより広範囲のモータの作動条件に合わせるために気体の状態変化はポリトロップ変化とした。これにより酸化剤供給系の非定常効果により発生する振動燃焼を線形安定性解析を使って調べた。

## 5.2 燃料ポート部のガスの支配方程式に対する摂動展開

燃料ポート部内の流れは非粘性の一次元流れであると仮定する。同ポートを流れるガスに対し、連続の式と運動量の保存式は以下のように表される。

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho A_p) + \frac{\partial \dot{M}}{\partial x} = \ell_p \dot{m}_F \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial \dot{M}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\dot{M}^2}{\rho A_p} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (p A_p) = p \frac{dA_p}{dx} \quad (5.2)$$

一般に、燃焼室の内部では壁面への熱損失などの散逸過程が生じている。したがって、以下に示すよ

うにガス温度はポリトロープ変化をすると仮定する.

$$p\rho^{-n_p} = \text{const.} \quad (5.3)$$

また, チャンバー内のガスは完全ガスの状態方程式に従うものとする.

$$p = \rho(RT) \quad (5.4)$$

さらに, 燃料ポートの断面積は軸方向に一様であると仮定する. 気化した酸化剤の質量流量と気化する前の液体酸化剤の質量流量の間に成り立つ関係は, 液体酸化剤の燃焼時間遅れを使うことで以下のように表される.

$$\dot{M}_{ox}(t) = \dot{M}_{ox,i}(t - \tau_{ox}) \quad (5.5)$$

上式を摂動展開しラプラス変換を施すと, 次式を得る.

$$\hat{M}_{ox}^* = \hat{M}_{ox,i}^* \exp(-s\tau_{ox}) \quad (5.6)$$

インジェクター・オリフィスを通じて流れる液体酸化剤は非圧縮性のベルヌーイの式を満足するものとする.

$$p_j = p_a + \frac{\dot{M}_{ox,j}^2}{2\rho_{ox}A_j^2} \quad (5.7)$$

ここで,  $p_j$ は酸化剤マニホールドの圧力を表し, そこでの動圧は無視できるものとする. 上記のベルヌーイの式を摂動展開し一次の微小量まで取り, ラプラス変換を施すと次式を得る.

$$\hat{p}_j^* - \hat{p}_a^* = \frac{2\Delta p}{\bar{p}_a} \hat{M}_{ox,j}^* \quad (5.8)$$

燃料の質量流束の摂動量のラプラス変換は, 燃焼応答関数を用いると以下のように表される.

$$\hat{m}_F^* = R_G \hat{G}^* \quad (5.9)$$

式(5.1)と式(5.2)の摂動方程式についてラプラス変換すると, 次式を得る.

$$C_{M2} \frac{d^2 \hat{M}}{dx^2} + C_{M1} \frac{d\hat{M}}{dx} + C_{M0} \hat{M} = 0, \quad (5.10)$$

ここで,

$$C_{M0} = s \left( s + 2 \frac{d\bar{u}}{dx} \right) + \left\{ n_p \frac{d}{dx} (\overline{RT}) - \frac{d}{dx} (\bar{u}^2) \right\} \frac{\zeta}{L} R_G + (n_p \overline{RT} - \bar{u}^2) \frac{\zeta}{L} R_G \left( \frac{1}{\bar{m}_F} \frac{d\bar{m}_F}{dx} - \frac{\zeta}{L} \right), \quad (5.11)$$

$$C_{M1} = 2\bar{u}s - \left\{ n_p \frac{d}{dx} (\overline{RT}) - \frac{d}{dx} (\bar{u}^2) \right\} + (n_p \overline{RT} - \bar{u}^2) \frac{\zeta}{L} R_G, \quad (5.12)$$

$$C_{M2} = n_p \overline{RT} - \bar{u}^2, \quad (5.13)$$

$$\zeta = \frac{\ell_p \overline{L\dot{m}_F}}{\overline{M}_b}. \quad (5.14)$$

式(5.10)の解を求めるに当たって、係数  $C_{M0}$ 、 $C_{M1}$ 、 $C_{M2}$  が  $x$  の関数のままだと難しいので

Karabeyoglu らの方法[5-1]によってそれらの係数の空間平均を取ることになると、

$$\frac{d^2 \hat{M}}{dx^{*2}} = f_1 \frac{d\hat{M}}{dx^*} + f_0 \hat{M} \quad (5.15)$$

となる。ここで、

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad (5.16)$$

$$f_0 = \frac{L^2 C_{M0,ave}}{C_{M2,ave}}, \quad (5.17)$$

$$f_1 = \frac{L C_{M1,ave}}{C_{M2,ave}}, \quad (5.18)$$

$$C_{M0,ave} = \frac{1}{L} \int_0^L C_{M0} dx, \quad (5.19)$$

$$C_{M1,ave} = \frac{1}{L} \int_0^L C_{M1} dx, \quad (5.20)$$

$$C_{M2,ave} = \frac{1}{L} \int_0^L C_{M2} dx. \quad (5.21)$$

式(5.15)を解くと、以下ようになる:

$$\hat{M}(x^*) = C_1 \exp(\lambda^+ x^*) + C_2 \exp(\lambda^- x^*) \quad (5.22)$$

ここで,

$$\lambda^\pm = \frac{1}{2} \left( f_1 \pm \sqrt{f_1^2 + 4f_0} \right) \quad (5.23)$$

$C_1$  と  $C_2$  は積分定数である. 式(5.23)より, 直ちに以下の関係が得られる.

$$\lambda^+ + \lambda^- = f_1, \quad (5.24)$$

$$\lambda^+ - \lambda^- = \sqrt{f_1^2 + 4f_0}. \quad (5.25)$$

なお, 式(5.22)の境界条件は, 以下のように与えられる.

$$\hat{M}(0) = \hat{M}_a \quad (5.26)$$

$$\hat{M}(1) = \hat{M}_b \quad (5.27)$$

### 5.3 前部, 後部燃焼室およびノズルの支配方程式に対する摂動展開

ハイブリッドロケットの燃料ポートの前後に設けられる前部燃焼室(pre-combustion chamber)と後部燃焼室(post-combustion chamber)における連続の式はそれぞれ以下のように表される.

$$V_{pr} \frac{d\rho_{pr}}{dt} = \dot{M}_{ox} - \dot{M}_a \quad (5.28)$$



$$V_{po} \frac{d\rho_{po}}{dt} = \dot{M}_b - \dot{M}_N \quad (5.29)$$

これらの部分では壁面への熱伝導などの諸損失が存在するため、そこでの気体の状態変化はポルトローブ変化として取り扱う。

$$p_a \rho_{pr}^{-n_{p,pr}} = const \quad (5.30)$$

$$p_b \rho_{po}^{-n_{p,po}} = const \quad (5.31)$$

また状態方程式はそれぞれ以下のように表される。

$$p_a = \rho_{pr} (RT)_{pr} \quad (5.32)$$

$$p_b = \rho_{po} (RT)_{po} \quad (5.33)$$

ここで、前部燃焼室とポート前端の圧力、及び後部燃焼室とポート後端の圧力はそれぞれ同じであるとした。またポート後端の温度と後部燃焼室の温度の関係については二次燃焼の効果を表す係数  $f_b$  を導入して以下のように評価する。

$$(\overline{RT})_b = f_b (\overline{RT})_{po} \quad (5.34)$$

ここで、 $f_b$  の値は通常ノズルから排出されるガスの等量比が 1 になるように決定される。上式は Karabeyoglu らによって導入されたものである[5-1]。式(5.28)から式(5.33)までを摂動展開し、一次の項までを取り後部燃焼室の摂動方程式を求めると、結果は以下ようになる。

$$\frac{V_{pr}}{n_{p,pr} (\overline{RT})_{pr}} \frac{dp'_a}{dt} = \dot{M}'_{ox} - \dot{M}'_a \quad (5.35)$$

$$\frac{V_{po}}{n_{p,po} (\overline{RT})_{po}} \frac{dp'_b}{dt} = \dot{M}'_b - \dot{M}'_N \quad (5.36)$$

上記の二式を無次元化し、それぞれラプラス変換を施すと、

$$\frac{\tau_{r,pr}}{n_{p,pr}} s \hat{p}_a^* = \hat{M}_{ox}^* - \hat{M}_a^* \quad (5.37)$$

$$\frac{\tau_{r,po}}{n_{p,po}} s \hat{p}_b^* = \hat{M}_b^* - \hat{M}_N^* \quad (5.38)$$

となる。ここで、

$$\tau_{r,pr} = \frac{\bar{\rho}_{pr} V_{pr}}{\dot{M}_a} \quad (5.39)$$

$$\tau_{r,po} = \frac{\bar{\rho}_{po} V_{po}}{\dot{M}_N} \quad (5.40)$$

とおいた。なお式(5.37)については Karabeyoglu らによって既に導入されている。また、式(5.38)中の  $\hat{M}_N^*$  については以下のように与えられる。

$$\hat{M}_N^* = \frac{I_p}{n_{p,po}} \cdot \frac{1}{c^*} A_t \hat{p}_b \quad (5.41)$$

ここで、

$$I_p = \frac{1}{2} (n_{p,po} + 1) \quad (5.42)$$

とおいた。式(5.41)を導く際に short nozzle の仮定を用い、ノズル流は準定常、等エントロピー的であると仮定した。さらに、ノズル入口部でのガス温度はポリトロープ変化をずるとした。式(5.41)を無次元化すると、以下ようになる。

$$\hat{M}_N^* = \frac{I_p}{n_{p,po}} \hat{p}_b^* \quad (5.43)$$

#### 5.4 ポートと前部、後部燃焼室の摂動方程式の結合

式(5.22)の境界条件として、さらに燃料ポート両端での連続の式について摂動展開してラプラス変換を施したものを以下に示す。

$$\frac{\tau_{r,a}}{n_p} s \hat{p}_a^* + \frac{1}{\bar{M}_b} \left[ \frac{d\hat{M}}{dx^*} \right]_{x^*=0} = \zeta_a R_G \hat{M}_a^* \quad (5.44)$$

$$\frac{\tau_{r,b}}{n_p} s \hat{p}_b^* + \frac{1}{\bar{M}_b} \left[ \frac{d\hat{M}}{dx^*} \right]_{x^*=1} = \zeta_b R_G \hat{M}_b^* \quad (5.45)$$

ここで、

$$\tau_{r,a} = \frac{\bar{p}_a A_p L}{(RT)_a \bar{M}_b} \quad (5.46)$$

$$\tau_{r,b} = \frac{\bar{p}_b A_p L}{(RT)_b \bar{M}_b} \quad (5.47)$$

とおいた。境界条件の式(5.6)と式(5.26)を燃料ポート部の前端と後端に当てはめると、

$$\hat{M}_a = C_1 + C_2 \quad (5.48)$$

$$\hat{M}_b = C_1 \exp(\lambda^+) + C_2 \exp(\lambda^-) \quad (5.49)$$

が求められる。これより、

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{F_1} \left\{ \hat{M}_b - \exp(\lambda^-) \hat{M}_a \right\} \\ &= \frac{\bar{M}_b}{F_1} \left\{ \hat{M}_b^* - \exp(\lambda^-) \frac{\bar{M}_a}{\bar{M}_b} \hat{M}_a^* \right\} = \frac{\bar{M}_b}{F_1} \left\{ \hat{M}_b^* - \beta \exp(\lambda^-) \hat{M}_a^* \right\} \end{aligned} \quad (5.50)$$

および、

$$C_2 = -\frac{\bar{M}_b}{F_1} \left\{ \hat{M}_b^* - \beta \exp(\lambda^+) \hat{M}_a^* \right\} \quad (5.51)$$

を得る. 式(5.50)に式(5.37)と式(5.38)を代入すると,

$$C_1 = \frac{\bar{M}_b}{F_1} \left\{ \hat{M}_N^* - \beta \exp(\lambda^-) \hat{M}_{ox}^* \right\} + \frac{\bar{M}_b}{F_1} s \left\{ \frac{\tau_{r,po}}{n_{p,po}} \hat{p}_b^* + \frac{\tau_{r,pr}}{n_{p,pr}} \beta \exp(\lambda^-) \hat{p}_a^* \right\} \quad (5.52)$$

となる. 同様に式(5.51)に式(5.37)と式(5.38)を代入すると,

$$C_2 = -\frac{\bar{M}_b}{F_1} \left\{ \hat{M}_N^* - \beta \exp(\lambda^+) \hat{M}_{ox}^* \right\} - \frac{\bar{M}_b}{F_1} s \left\{ \frac{\tau_{r,po}}{n_{p,po}} \hat{p}_b^* + \frac{\tau_{r,pr}}{n_{p,pr}} \beta \exp(\lambda^+) \hat{p}_a^* \right\} \quad (5.53)$$

となる. 式(5.22)を  $x^*$  で微分してポート前端での値を求める. 式(5.52)と式(5.53)を代入すれば, 次式を得る.

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\hat{M}}{dx^*} \right]_{x^*=0} &= C_1 \lambda^+ + C_2 \lambda^- \\ &= \frac{\bar{M}_b}{F_1} \left( F_4 \hat{M}_N^* - \beta F_3 \hat{M}_{ox}^* \right) + \frac{\bar{M}_b}{F_1} s \left( \frac{\tau_{r,po}}{n_{p,po}} F_4 \hat{p}_b^* + \frac{\tau_{r,pr}}{n_{p,pr}} \beta F_3 \hat{p}_a^* \right) \end{aligned} \quad (5.54)$$

同様の操作でポート後端での値も求めると, 次式が得られる.

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\hat{M}}{dx^*} \right]_{x^*=1} &= C_1 \lambda^+ \exp(\lambda^+) + C_2 \lambda^- \exp(\lambda^-) \\ &= \frac{\bar{M}_b}{F_1} \left\{ F_2 \hat{M}_N^* - \beta F_4 \exp(f_1) \hat{M}_{ox}^* \right\} + \frac{\bar{M}_b}{F_1} s \left\{ \frac{\tau_{r,po}}{n_{p,po}} F_2 \hat{p}_b^* + \frac{\tau_{r,pr}}{n_{p,pr}} \beta F_4 \exp(f_1) \hat{p}_a^* \right\} \end{aligned} \quad (5.55)$$

式(5.43)を式(5.54)に代入し, さらにそれを式(5.44)に当てはめると,

$$\left\{ \tau_{r,a} s F_1 + \tau_{r,pr} C_{p,pr} s (\beta F_3 + \zeta_a R_G F_1) \right\} \hat{p}_a^* + (I_p + \tau_{r,po} s) C_{p,po} F_4 \hat{p}_b^* = n_p (\beta F_3 + \zeta_a R_G F_1) \hat{M}_{ox}^* \quad (5.56)$$

を得る. 同様の手順で式(5.55)を式(5.45)に代入すれば,

$$\tau_{r,pr}C_{p,pr}\beta sF_4 \exp(f_1)\hat{p}_a^* + D_1\hat{p}_b^* = n_p\beta F_4 \exp(f_1)\hat{M}_{ox}^* \quad (5.57)$$

となる. ここで,

$$D_1 = \tau_{r,b}sF_1 + I_pC_{p,po}(F_2 - \zeta_b R_G F_1) + D_{po} \quad (5.58)$$

$$D_{po} = \tau_{r,po}C_{p,po}s(F_2 - \zeta_b R_G F_1) \quad (5.59)$$

とおいた. 式(5.56)と式(5.57)から酸化剤の供給流量の変動に対する燃焼室前端の圧力変動の伝達関数が得られる.

$$H_a(s) \equiv \frac{\hat{p}_a^*}{\hat{M}_{ox}^*} = n_p \frac{(\beta F_3 + \zeta_a R_G F_1)D_1 - C_{p,po}I_p\beta F_4^2 \exp(f_1) - F_{po}}{\tau_{r,a}sF_1D_1 + F_{pr}} \quad (5.60)$$

ここで,

$$F_{pr} = \tau_{r,pr}C_{p,pr}s(\beta F_3 + \zeta_a R_G F_1)D_1 - \tau_{r,pr}C_{p,pr}C_{p,po}(I_p + \tau_{r,po}s)\beta sF_4^2 \exp(f_1) \quad (5.61)$$

$$F_{po} = \tau_{r,po}C_{p,po}\beta sF_4^2 \exp(f_1) \quad (5.62)$$

とおいた. なお  $n_p = n_{p,po} = 1$  とした場合, 式(5.60)は Karabeyoglu が導出した式と同等の式になる. ただし, 導出手順や近似方法が一部異なっている. 特に前部, 後部燃焼室が無い場合は  $F_{pr} = F_{po} = 0$  および  $C_{p,pr} = C_{p,po} = 1$  となり, 式(5.60)は以下に示すように簡単になる.

$$H_a(s) = \frac{n_p}{\tau_{r,a}sF_1} \left[ \beta F_3 + \zeta_a R_G F_1 - \frac{I_p\beta F_4^2 \exp(f_1)}{D_1} \right] \quad (5.63)$$

ここで,

$$D_1 = \tau_{r,b}sF_1 + I_p(F_2 - \zeta_b R_G F_1) \quad (5.64)$$

とおいた.

### 5.5 線形安定限界と中立振動の周波数

本研究ではインジェクターから噴射される液体酸化剤の燃焼時間遅れを全系の中の一つの時間遅れ系と見做して解析を行った. 酸化剤タンク, 配管, インジェクターから成る簡単なガス加圧式供給システムを考えたとき, 燃焼不安定を表す全系の伝達関数は以下のように表される[5-4].

$$\frac{\hat{p}_a^*}{\hat{p}_T^*} = \frac{1}{1 + S_1 + \{\sigma(1 + S_1) + S_2\} \exp(\tau_{ox}s) / H_a} \quad (5.65)$$

ここで,

$$S_1 = \tau_{r,j}s(\sigma_T + \tau_p s) / K^* \quad (5.66)$$

$$S_2 = \sigma_T + \tau_p s \quad (5.67)$$

とおいた.  $S_1, S_2$  はインジェクターを除く酸化剤供給系の非定常特性を表している. 噴射器マニホールド内の圧力変動が十分小さい場合はこれらを 0 とおくことができ, 伝達関数の計算が簡単になる. 安定限界を求めるには, 式(5.65)から式(5.67)において  $s = i\omega$  とおき, 式(5.65)の分母を 0 とすればよく, その結果は以下のようなになる.

$$1 + S_1 + \{\sigma(1 + S_1) + S_2\} \exp(i\omega^*) / H_a = 0 \quad (5.68)$$

上式は実部と虚部に分けることができ, その結果から次に示す二式が得られる.

$$\frac{\Delta p}{\bar{p}_a} = \frac{|H|}{2} \quad (5.69)$$

$$\tan \omega^* = \frac{H_i}{H_r} \quad (5.70)$$

ここで,

$$H = H_a(i\omega^*) + \frac{S_2}{1+S_1} \exp(i\omega^*) \quad (5.71)$$

とおいた。式(5.70)を数値的に解けば、中立振動の無次元角振動数である $\omega^*$ についての解が得られる。これを式(5.69)に代入することで線形安定限界を表すパラメータの一つである $\Delta p/\bar{p}_a$ の値を求めることができる。 $\omega^*$ や $\Delta p/\bar{p}_a$ については液体酸化剤の燃焼時間遅れに対する燃焼室内のガスの滞留時間の比 $\tau_r/\tau_{ox}$ を変数として安定限界線図を描くことができる。インジェクターより上流側の供給系の非定常性の影響が無視できる場合、線形安定限界と中立安定時の無次元角振動数は以下に示すように簡単になる。

$$\frac{\Delta p}{\bar{p}_a} = \frac{|H_a|}{2} \quad (5.72)$$

$$\tan \omega^* = \frac{H_{a,i}}{H_{a,r}} \quad (5.73)$$

## 5.6 線形安定性解析による計算結果

北川と湯浅は酸化剤旋回流型ハイブリッドロケットエンジンの燃焼実験においてしばしばチャッキングと呼ばれる低周波燃焼不安定が発生することを確認した[5-8]。これは、液体酸化剤が燃焼室に噴射されてから燃焼ガスに転化するまでに時間遅れが存在するために生じる。本研究では、上記の実験データに基づいて理論的な線形安定限界と中立振動の周波数を求めた。計算に用いた実験的諸量は表4.1と同じである。酸化剤旋回流型ハイブリッドロケットエンジンにおいて液体酸化剤は燃焼室壁面に沿って液体の状態で噴射されるため、同酸化剤は蒸発するまで比較的時間が掛かる。したがって、このようなハイブリッドロケットでは液体酸化剤の燃焼時間遅れは大きくなる。ここで、燃料後退速度は燃料表面全体において一定の値と仮定する。具体的には上記のモータの燃焼実験で得られた空間的および時間的に平均化された平均燃料後退速度を使う。この燃料後退速度の実験式

は以下のように表される.

$$\tilde{r} = 0.0726 \tilde{G}_{ox}^{0.457} \quad (5.74)$$

推進薬ガス滞留時間は、以下のように定義される.

$$\tau_r = \frac{\bar{p}_{ave} V}{\dot{M}_N} = \frac{c^* L^*}{(RT)_{ave}} \quad (5.75)$$

これは、酸化剤供給系と燃焼室がカップリングした時に発生する燃焼不安定の特性を表す時に重要となるパラメータの一つである.  $\tau_r$  の実験値は 4 章で示したように  $c^*$  効率を使って補正する. ここで扱う燃焼不安定は主に  $\tau_r/\tau_{ox}$  の値に依存すると考えられるが、本研究では  $\tau_{ox}$  は一定とした上で、 $\tau_r$  の値を変化させて燃焼不安定の特性を計算した. その他のパラメータは固定した. ここでは  $\tau_r$  の値を変化させるために、燃料ポート長の  $L$  を変化させた. このとき、燃焼圧も  $L$  の変化と共に変わるが、酸燃比は一定と仮定した. また対象とするハイブリッドロケットエンジンは前部および後部燃焼室を持たないので、液体酸化剤の燃焼時間遅れに起因する低周波燃焼不安定の線形安定限界を表すのは式(5.72)、式(5.73)となる. 式(5.73)の数値解を式(5.72)へ代入すると、 $\Delta p/\bar{p}_a$  が求められる. したがって、 $\Delta p/\bar{p}_a$  と  $\tau_r/\tau_{ox}$  の関係は図 5.1 のように表される. ここで、酸燃比  $O/F$  は 9.65 で、燃料後退速度の指数  $n$  は 0.4 である. 図 5.1 より、液体酸化剤の燃焼時間遅れが一定の条件では、推進薬ガスの滞留時間が増加するほど燃焼安定領域も増大することが分かる. ただし、燃料ポートを長くして推進薬ガス滞留時間を大きくすることで安定性を増すことは実際的ではない. 実用的な観点からは、モータの燃焼安定性を高めるためには  $\Delta p/\bar{p}_a$  の値を適切に取ることが重要である. 図 5.1 においてポリトロープ指数が 1 の場合は等温モデルに該当する. 計算で使われている TCG 結合伝達関数は、気体の状態変化のモデル化や導出方法の違いによる精度の相違が存在するが、それ以外は基本的に Karabeyoglu らによるものとはほぼ同等である. 考察の対象となっている酸化剤旋回流型ハイブリッドロケットエンジンの燃焼ガスの平均比熱比は 1.24 である. したがって、ポリトロープ指数を 1.24 とした場合は、燃焼室内のガスの状態変化が断熱的であることに相当する. 燃焼圧の中立振動の無次



元角振動数  $\omega^*$  の計算結果を図 5.2 に示す. 燃焼室内の気体のポリトロープ指数が 1 または 1.24 のいずれであったとしても, 図 5.2 の横軸の範囲では無次元角振動数の違いは十分小さい. したがって,  $\tau_r/\tau_{ox}$  の値が比較的小さい場合, 振動周波数に対するポリトロープ指数の影響はほぼ無視できる. なお, 図 5.1 および図 5.2 の両方共, ここで扱った範囲ではバルクモードの仮定を使った線形安定性理論による計算結果とほぼ同じになった. 一般に, 燃焼圧が変化すると特性排気速度, 断熱火炎温度, 燃焼ガスの平均分子量も少し変化する. しかし, 図 5.1 および図 5.2 の範囲では燃焼圧が変化しても線形安定限界と中立振動の周波数にはほとんど影響を及ぼさなかった.

## 5.7 LOX/PMMA ハイブリッドロケットエンジンの燃焼実験との比較

北川と湯浅が行った LOX/PMMA ハイブリッドロケット燃焼実験では, 液体酸化剤の燃焼時間遅れに起因する振動燃焼がしばしば観察された[5-8]. まずそれらの中でも安定限界に近いデータについて注目した. ここで参考にした燃焼器では液体酸化剤が壁面に沿って噴射されるため, 同酸化剤の微粒化・予熱・蒸発・拡散・燃焼に時間がかかり, それにより液体酸化剤の燃焼時間遅れは長くなっている. 図 5.3 は実験データの一例であり, 実線は燃焼室圧, 点線はインジェクター上流圧を示している. 図中で振動燃焼が発生した時点の  $\Delta p/\bar{p}_a$  は 0.41, 振動周波数は 14Hz であった. また, 5 秒から 6 秒辺りで圧力履歴が平坦な部分は, 燃焼末期で LOX 供給を停止すると同時に消火用の窒素ガスを燃焼室に送り出すが, その際に LOX 供給弁から LOX インジェクターまでの配管内に貯まっていた LOX が消火用窒素ガスに押されて燃焼室内で燃焼したためである. なお, 本論文ではこのケースを No.1 とする. また No.1 における諸量を表 4.1 に示す. この No.1 のケースに対し, インジェクター差圧を燃焼圧で割った量を  $\Delta p/\bar{p}_a$  の時間履歴として表したものが図 5.4 である. 点火時に  $\Delta p/\bar{p}_a$  が上昇した後, 定常燃焼時に移行してしばらくしてから圧力振動が成長する様子が伺える. 本研究では燃焼圧の方の挙動を見て, その振動が成長し始める時の  $\Delta p/\bar{p}_a$  の値を後述する安定限界線図にプロットした. ただし, 成長が始まるまで時間遅れが生じるであろうから, 実際にはプロット

した  $\Delta p/\bar{p}_a$  より大きい値で不安定になると思われる。図 5.5 は安定限界近傍の他の実験データである。このとき振動が開始した時点の  $\Delta p/\bar{p}_a$  は 0.37, 振動周波数は 12Hz である。  $C^*$  の実験値および理論値,  $C^*$  効率,  $O/F$  はそれぞれ 1019m/s, 1077m/s, 0.94, 9.65 である。本ケースをここでは No.2 とする。なお, 本研究で扱う実験データに共通であるが, 酸燃比や特性排気速度は全燃焼時間を通し平均値として算出している。正確には燃焼振動を起こした時点での酸燃比等の値が必要であるが, これらの瞬時値を測定することは難しいため同平均値を利用している。また他の諸量は表 4.1 と同様である。No.2 のケースに対して  $\Delta p/\bar{p}_a$  の時間履歴を表したものが図 5.6 である。点火ピークの後に一時的に  $\Delta p/\bar{p}_a$  の値が低下している所があるが, ここでは未だ定常燃焼状態に達していないと思われる。しばらくして定常状態に移行し,  $\Delta p/\bar{p}_a$  の値が徐々に低下し始める辺りから燃焼室圧の振動が成長する。この場合も実際にプロットした  $\Delta p/\bar{p}_a$  より大きい値で燃焼不安定になっていると思われる。不安定な例としてはさらに No.3 として  $\Delta p/\bar{p}_a$  が 0.20 のケースを加えた。このときの振動周波数は 13Hz である。No.3 のケースに対しても  $\Delta p/\bar{p}_a$  の時間履歴を表したものが図 5.8 である。点火ピーク後に定常状態に移行するが,  $\Delta p/\bar{p}_a$  の値が小さいために不安定の度合いも強く, すぐに振動燃焼が発生する。この条件も実際にプロットした  $\Delta p/\bar{p}_a$  より大きい値で燃焼不安定の状態になる。安定側のケースでは最も安定限界に近い例として No.4 を加えた。このときの  $\Delta p/\bar{p}_a$  は 0.59 である。これらのケースを計算で求めた安定限界と合わせて図示したものが図 5.9 である。実線は燃焼室内のガスが等温過程である場合の安定限界で, Karabeyoglu らの TCG 結合型伝達関数を用いて計算した結果と同等である。点線はポリトロープ指数が燃焼ガスの比熱比である場合で, 燃焼室内のガスの変化が断熱的である時の安定限界である。黒丸は不安定であった実験結果を示し, 白丸は安定であった場合である。特に, 等温過程とした場合の安定限界を超えてその上部に位置する No.1 のケースでは, 圧力履歴を見ると正の増幅係数を有しているため実際の安定限界はさらに上方に位置することが予想される。したがって, チャンバー内の圧力変化は等温的ではなくポリトロープ的であると思われる。図 5.10 は計算で得られた中立安定時の燃焼室内の圧力振動の無次元角振動数と実験結果を比較したものである。ここで, 角振動

数は液体酸化剤の燃焼時間遅れによって無次元化されている。白丸はポリトロープ指数を燃焼ガスの比熱比(1.24)と仮定した時の実験値である。この図より、計算値と実験値はよく一致していることが分かる。また振動周波数は非常に低いが、これは酸化剤流旋回型ハイブリッドロケットエンジンにおいては液体酸化剤の微粒化、蒸発、混合等が遅くなり、そのために液体酸化剤の燃焼時間遅れが増大するためである。

## 5.6 まとめ

燃焼室内のガスにおける軸方向の物理量の変化を考慮し、単純なガス加圧式供給システムを持つハイブリッドロケットに対して液体酸化剤の燃焼時間遅れに起因する低周波燃焼不安定を表す伝達関数を求めた。また前部ならびに後部燃焼室の非定常効果を加えた。この線形安定性解析を使って供給系の各要素や前部および後部燃焼室の形状などが振動燃焼に及ぼす影響を調べた。計算結果より、比較的小型のモータにおいては本解析とバルクモードの解析はほぼ同様の結果になった。したがって、前出した酸化剤旋回流型ハイブリッドロケットの燃焼試験との比較は、前章とほぼ同じ結果となった。

## 5章 記号表

$A_j$	: インジェクター・オリフィス断面積, $m^2$
$A_p$	: ポート断面積, $m^2$
$A_t$	: ノズルスロート面積, $m^2$
$a$	: 燃料後退速度の係数, $[kg/(s \cdot m^2)]^{-n} \cdot mm/s$
$a_p$	: 配管の断面積
$C_1, C_2$	: 積分定数
$C_{M0}$	: 式(5.11)で定義される.
$C_{M1}$	: 式(5.12)で定義される.
$C_{M2}$	: 式(5.13)で定義される.
$C_{M_i,ave}$	: $C_{M_i}$ ( $i = 0, 1, 2$ ) の空間平均値
$C_{p,po}$	: $C_{p,po} = n_p / n_{p,po}$
$C_{p,pr}$	: $C_{p,pr} = n_p / n_{p,pr}$
$c^*$	: 特性排気速度, $m/s$
$D$	: ポート径, $m$
$D_1$	: 式(5.58)で定義される.
$D_{po}$	: 式(5.59)で定義される.
$F_1$	: $F_1 = \exp(\lambda^+) - \exp(\lambda^-)$
$F_2$	: $F_2 = \lambda^+ \exp(\lambda^+) - \lambda^- \exp(\lambda^-)$
$F_3$	: $F_3 = \lambda^+ \exp(\lambda^-) - \lambda^- \exp(\lambda^+)$
$F_4$	: $F_4 = \lambda^+ - \lambda^-$
$F_{po}$	: 式(5.62)で定義される.
$F_{pr}$	: 式(5.61)で定義される.
$f_0$	: $f_0 = L^2 C_{M0,ave} / C_{M2,ave}$
$f_1$	: $f_1 = L C_{M1,ave} / C_{M2,ave}$
$f_b$	: 式(5.34)で定義される.
$G$	: ポートを流れるガスの質量流束, $kg/(s \cdot m^2)$

- $\tilde{G}_{ox}$  : ポートを流れるガスの平均質量流束,  $\text{kg}/(\text{s} \cdot \text{m}^2)$
- $G^*$  :  $G^* = G/\bar{G}$
- $H$  : 式(5.71)で定義される.
- $H_i$  :  $H$  の虚部
- $H_r$  :  $H$  の実部
- $H_a$  :  $H_a = \hat{p}_a^*/\hat{M}_a^*$
- $H_b$  :  $H_b = \hat{p}_b^*/\hat{M}_a^*$
- $H_{a,r}$  :  $H_a$  の実部
- $H_{a,i}$  :  $H_a$  の虚部
- $I_p$  :  $I_p = (n_{p,po} + 1)/2$
- $i$  : 虚数単位
- $K$  : 液体酸化剤の体積弾性係数
- $K^*$  :  $K^* = K/\bar{p}_a$
- $L$  : ポート長, m
- $L_p$  : 配管の長さ, m
- $L^*$  :  $L^* = V/A, \text{m}$
- $\ell_p$  : ポート周囲長, m
- $\ell_{p,a}$  : 燃料ポート入口でのポート周囲長, m
- $\ell_{p,b}$  : 燃料ポート出口でのポート周囲長, m
- $\dot{M}$  : 質量流量
- $\dot{M}_a$  : 燃料ポート入口でのガスの質量流量,  $\text{kg/s}$
- $\dot{M}_b$  : 燃料ポート出口でのガスの質量流量,  $\text{kg/s}$
- $\dot{M}_N$  : ノズルの質量流量,  $\text{kg/s}$
- $\dot{M}_{ox}$  : 気化した直後の酸化剤の質量流量,  $\text{kg/s}$
- $\dot{M}_{ox,j}$  : 液体酸化剤の質量流量,  $\text{kg/s}$
- $\dot{M}_a^*$  :  $\dot{M}_a^* = \dot{M}_a/\bar{M}_b$
- $\dot{M}_b^*$  :  $\dot{M}_b^* = \dot{M}_b/\bar{M}_b$
- $\dot{M}_{ox}^*$  :  $\dot{M}_{ox}^* = \dot{M}_{ox}/\bar{M}_{ox}$

$\dot{M}_{ox,j}^*$	: $\dot{M}_{ox,j}^* = \dot{M}_{ox,j} / \bar{M}_{ox,j}$
$\dot{m}_F$	: $\dot{m}_F = \rho_F \dot{r}$ , kg/(s·m <sup>2</sup> )
$\dot{m}_{F,a}$	: $\dot{m}_{F,a} = \rho_F \dot{r}_a$ , kg/(s·m <sup>2</sup> )
$\dot{m}_{F,b}$	: $\dot{m}_{F,b} = \rho_F \dot{r}_b$ , kg/(s·m <sup>2</sup> )
$\dot{m}_F^*$	: $\dot{m}_F^* = \dot{m}_F / \bar{m}_F$
$n$	: 燃料後退速度の指数
$n_p$	: ポート内のガスのポリトロップ指数
$n_{p,po}$	: 後部燃焼室のガスのポリトロップ指数
$n_{p,pr}$	: 前部燃焼室のガスのポリトロップ指数
$O/F$	: 酸燃比
$p$	: 圧力, Pa
$p_a$	: 燃料ポート入口での圧力, Pa
$p_b$	: 燃料ポート出口での圧力, Pa
$p_p$	: 酸化剤タンク出口圧(配管上流端の圧力), Pa
$p_a^*$	: $p_a^* = p_a / \bar{p}_a$
$p_b^*$	: $p_b^* = p_b / \bar{p}_a$
$p_j^*$	: $p_j^* = p_j / \bar{p}_a$
$p_T^*$	: $p_T^* = p_T / \bar{p}_a$
$R_G$	: 燃焼応答関数
$RT$	: ガス定数と気体温度の積, m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>
$\dot{r}$	: 燃料後退速度, m/s
$\dot{r}_a$	: 燃料ポート入口での燃料後退速度, m/s
$\dot{r}_b$	: 燃料ポート出口での燃料後退速度, m/s
$\tilde{r}$	: 平均燃料後退速度, mm/s
$S_1$	: 式(5.66)で定義される.
$S_2$	: 式(5.67)で定義される.
$s$	: ラプラス変換のパラメータ
$t$	: 時間, s

- $u$  : 軸方向流速, m/s  
 $V$  : 燃焼室の体積, m<sup>3</sup>  
 $V_j$  : 噴射器マニホールドの体積, m<sup>3</sup>  
 $x$  : 軸方向距離 (ただし, 原点はポート前端), m  
 $x^*$  :  $x^* = x/L$

### ギリシャ文字

- $\alpha$  : 増幅係数, 1/s  
 $\alpha^*$  :  $\alpha^* = \tau_{ox}\alpha$   
 $\beta$  :  $\beta = (O/F)/(O/F + 1)$   
 $\Delta p$  :  $\Delta p = \bar{p}_j - \bar{p}_a$ , Pa  
 $\Delta p_T$  :  $\Delta p_T = \bar{p}_T - \bar{p}_p$ , Pa  
 $\zeta$  :  $\zeta = \ell_p L \bar{m}_F / \bar{M}_b$   
 $\zeta_a$  :  $\zeta_a = \ell_{p,a} L \bar{m}_{F,a} / \bar{M}_b$   
 $\zeta_b$  :  $\zeta_b = \ell_{p,b} L \bar{m}_{F,b} / \bar{M}_b$   
 $\lambda^+$  :  $\lambda^+ = (f_1 + \sqrt{f_1^2 + 4f_0})/2$   
 $\lambda^-$  :  $\lambda^- = (f_1 - \sqrt{f_1^2 + 4f_0})/2$   
 $\rho$  : ガスの密度, kg/m<sup>3</sup>  
 $\rho_a$  : 燃料ポート入口でのガスの密度, kg/m<sup>3</sup>  
 $\rho_b$  : 燃料ポート出口でのガスの密度, kg/m<sup>3</sup>  
 $\rho_F$  : 固体燃料の密度, kg/m<sup>3</sup>  
 $\rho_{ox}$  : 液体酸化剤の密度, kg/m<sup>3</sup>  
 $\sigma$  :  $\sigma = 2\Delta p / \bar{p}_a$   
 $\sigma_T$  :  $\sigma_T = 2\Delta p_T / \bar{p}_a$   
 $\tau_{ox}$  : 液体酸化剤の燃焼遅れ時間, s

- $\tau_p$  :  $\tau_p = L_p \bar{M}_{ox,j} / a_p \bar{p}_a$ , s  
 $\tau_r$  : 全燃焼室のガスの滞留時間, s  
 $\tau_{r,a}$  :  $\tau_{r,a} = \bar{\rho}_a A_p L / \bar{M}_b$ , s  
 $\tau_{r,b}$  :  $\tau_{r,b} = \bar{\rho}_b A_p L / \bar{M}_b$ , s  
 $\tau_{r,j}$  :  $\tau_{r,j} = \rho_{ox} V_j / \bar{M}_{ox,j}$ , s  
 $\tau_{r,pr}$  :  $\tau_{r,pr} = \bar{\rho}_{pr} V_{pr} / \bar{M}_a$ , s  
 $\tau_{r,po}$  :  $\tau_{r,po} = \bar{\rho}_{po} V_{po} / \bar{M}_n$ , s  
 $\omega$  : 角振動数, rad/s  
 $\omega^*$  :  $\omega^* = \tau_{ox} \omega$

#### 下添え字

- $a$  : ポート前端  
 $ave$  : 軸方向に対する空間平均  
 $b$  : ポート後端  
 $F$  : 燃料  
 $j$  : インジェクター  
 $ox$  : 酸化剤  
 $po$  : 後部燃焼室 (post-combustion chamber)  
 $pr$  : 前部燃焼室 (pre-combustion chamber)  
 $T$  : 酸化剤タンク

#### 上添え字

- $-$  : 定常値  
 $\hat{\quad}$  : 摂動量  
 $\wedge$  : ラプラス変換量  
 $*$  : 無次元量



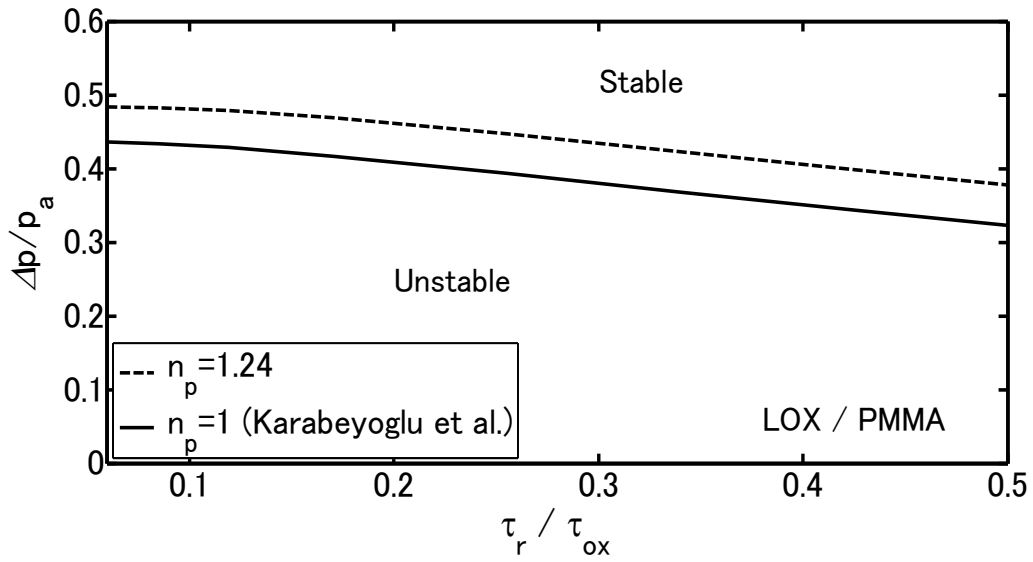


図 5.1 線形安定限界に対する  $\tau_r/\tau_{ox}$  の影響

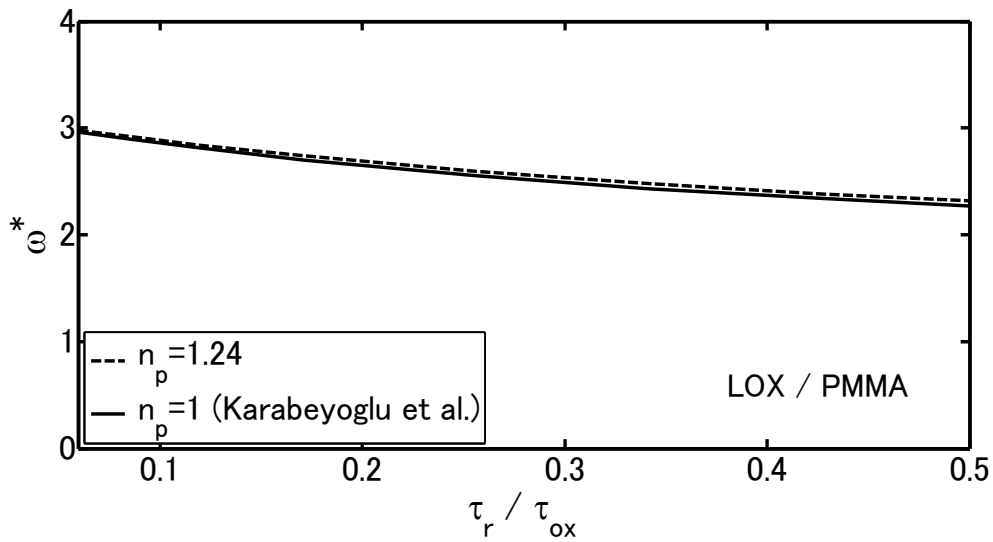


図 5.2 燃焼圧の中立振動の無次元角振動数に対する  $\tau_r/\tau_{ox}$  の影響

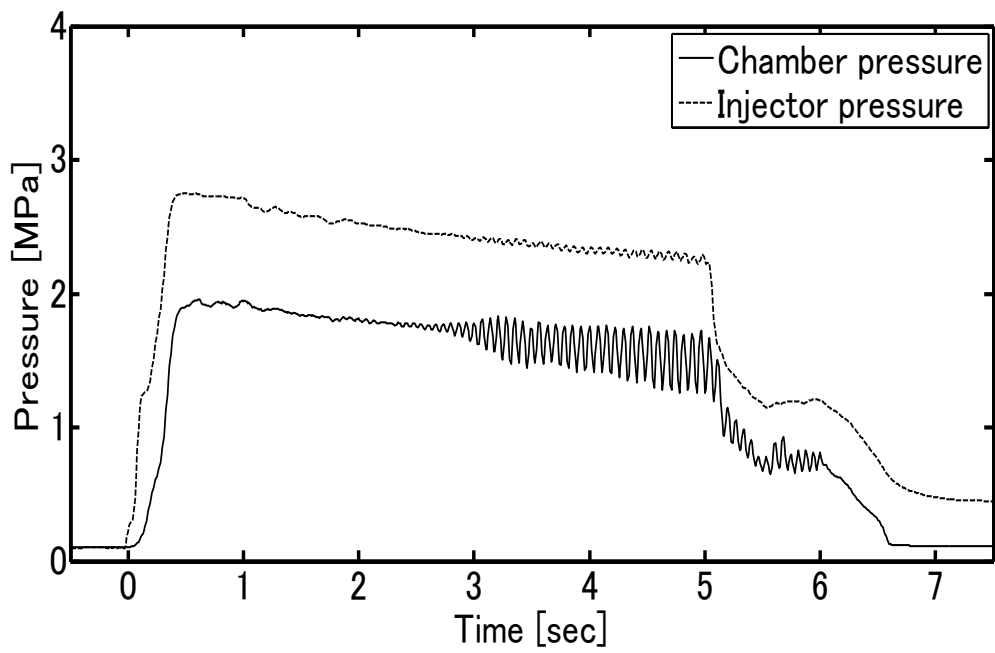


図 5.3 酸化剤流旋回型ハイブリッドロケットにおけるチャッキング (No.1)

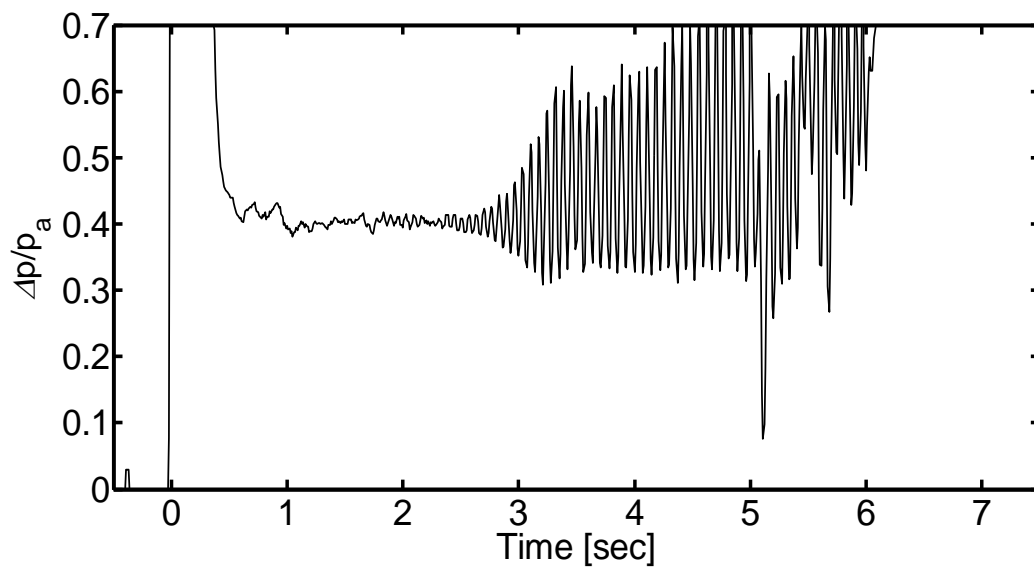


図 5.4  $\Delta p / \bar{p}_a$  の時間履歴 (No.1)

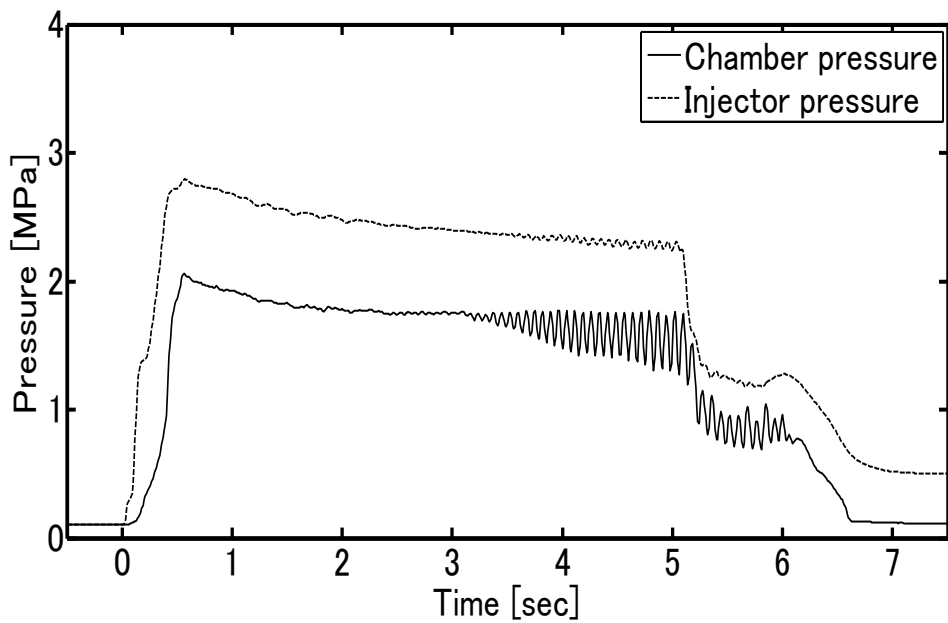


図 5.5 酸化剤流旋回型ハイブリッドロケットにおけるチャッキング (No.2)

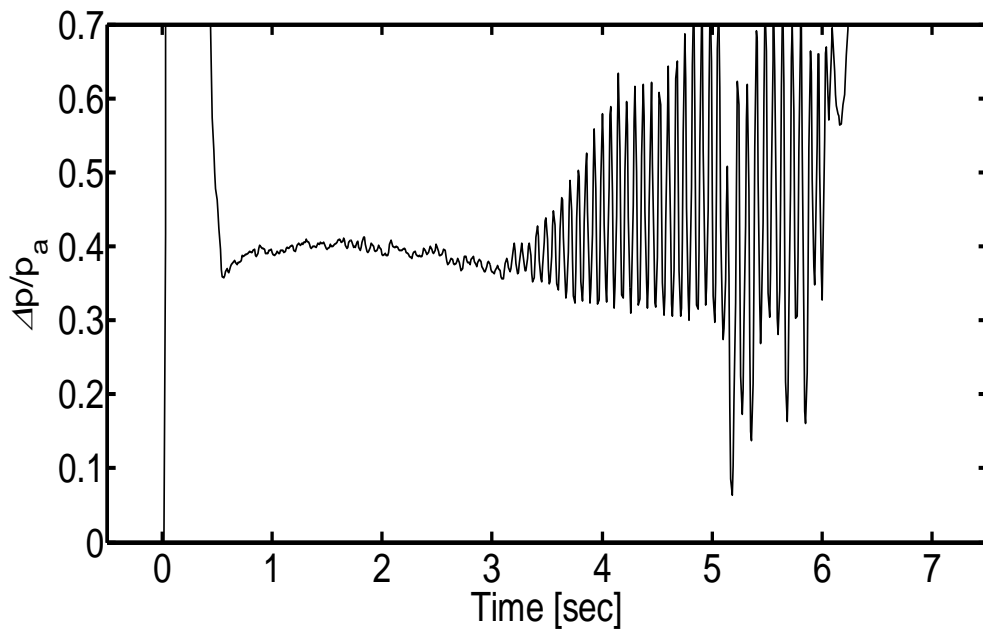


図 5.6  $\Delta p / \bar{p}_a$  の時間履歴 (No.2)

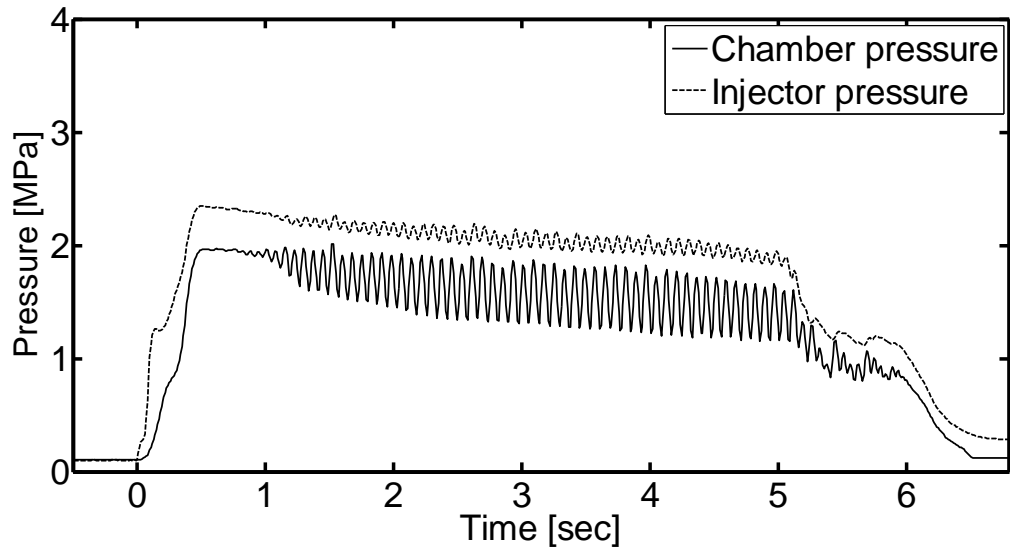


図 5.7 酸化剤流旋回型ハイブリッドロケットにおけるチャッキング (No.3)

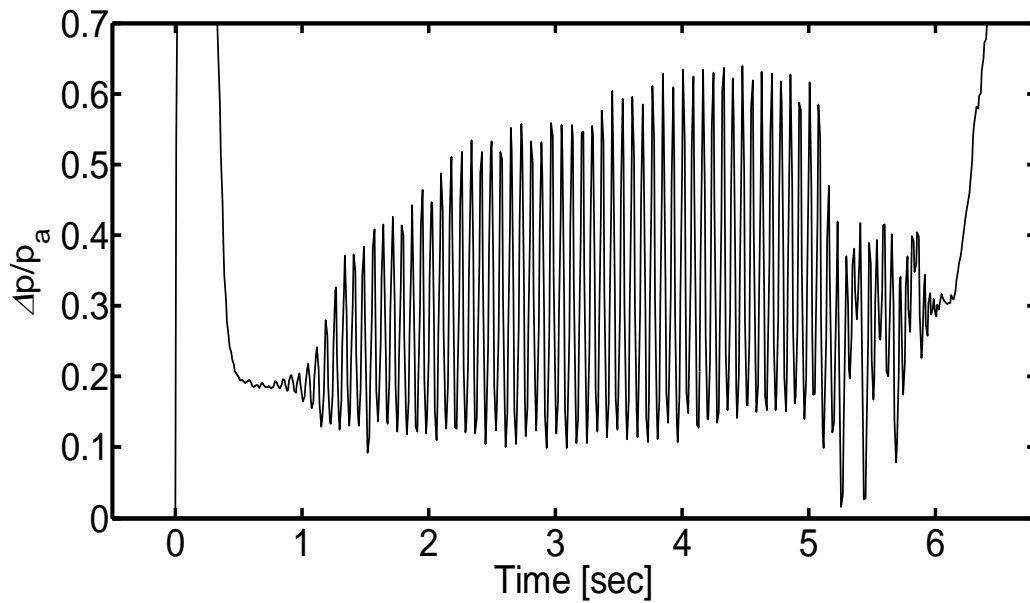


図 5.8  $\Delta p / \bar{p}_a$  の時間履歴(No.3)

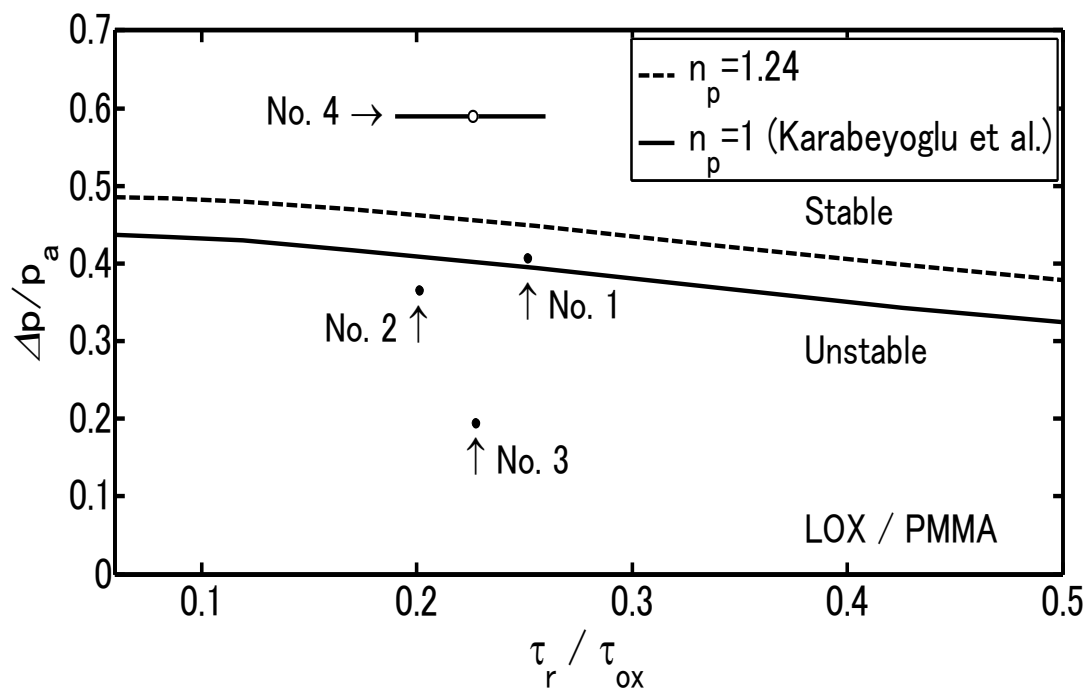


図 5.9 液体酸化剤の燃焼時間遅れに起因する低周波燃焼不安定の安定限界

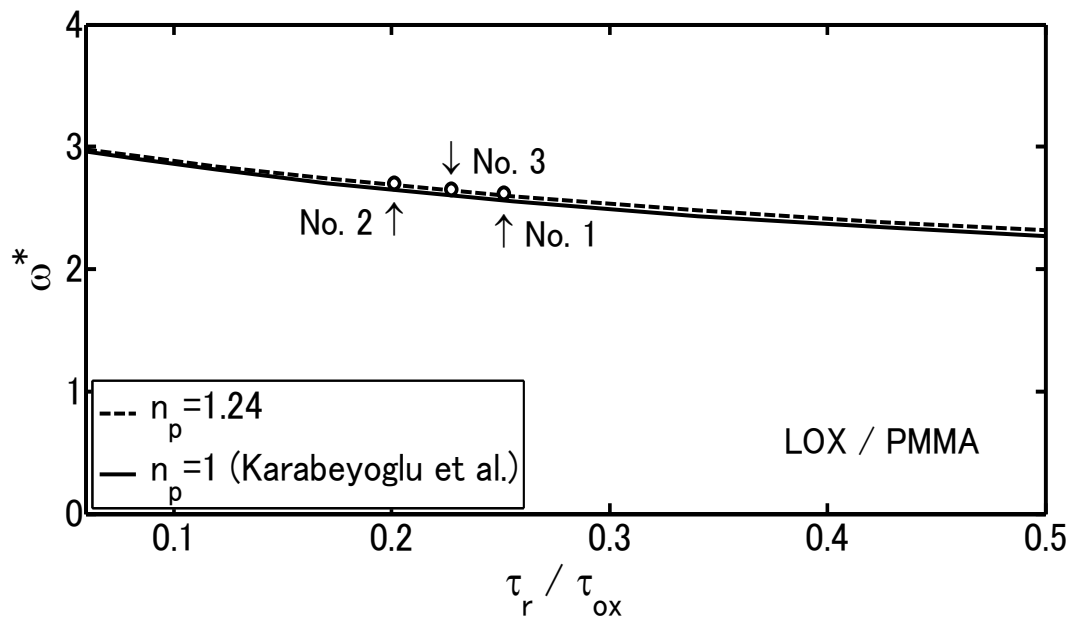


図 5.10 中立安定時の無次元角振動数

## 5章 参考文献

- [5-1] Karabeyoglu, A., Stevens, J., and Cantwell, B.: Investigation of Feed System Coupled Low Frequency Combustion Instabilities in Hybrid Rockets, AIAA Paper 2007-5366, 2007.
- [5-2] Karabeyoglu, M. A.: Transient Combustion in Hybrid Rockets, Ph.D. Dissertation, Stanford University, Dept. of Aeronautics and Astronautics, 1998.
- [5-3] 森田貴和, 藤原桂, 松木彩, 山口滋, 嶋田徹, ハイブリッドロケットの燃焼の線形安定解析, 第55回宇宙科学技術連合講演会講演集, JSASS-2011-4459, 2011.
- [5-4] 森田貴和, 原田潤一, 湯浅三郎, 北川幸樹, 嶋田徹, 山口滋: 時間遅れ系を含むハイブリッドロケットの燃焼の解析, 第56回宇宙科学技術連合講演会講演集, JSASS-2012-4652, 2012.
- [5-5] Morita, T., Yuasa, S., Kitagawa, K., Shimada, T., and Yamaguchi, S.: Low-Frequency Feed-System-Coupled Combustion Instability in Hybrid Rocket Motors, Journal of Thermal Science and Technology, Vol.8, No.2, pp.380-394, 2013.
- [5-6] Morita, T., Kitagawa, K., Shimada, T., and Yamaguchi, S.: A Linear Stability Analysis of Oscillatory Combustion Induced by Combustion Time Delays of Liquid Oxidizer in Hybrid Rocket Motors, International Journal of Energetic Materials and Chemical Propulsion, Vol.13. Issue 1, pp.83-96, 2014.
- [5-7] Morita, T., Kitagawa, K., Yuasa, S., Yamaguchi, S., and Shimada, T.: Low-Frequency Combustion Instability Induced by the Combustion Time Lag of Liquid Oxidizer in Hybrid Rocket Motors, Transactions of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences, Aerospace Technology Japan, Vol.10, No.ists28, pp.37-41, 2012.
- [5-8] 北川幸樹, 湯浅三郎: 液体酸素旋回型ハイブリッドロケットエンジンの燃焼特性, 日本航空宇宙学会論文集, Vol.54, No.629, pp.242-249, 2006.

## 第 6 章 結言

本論文では化学ロケットの中でも固体ロケットとハイブリッドロケットを取り上げ、これらの振動燃焼や燃焼安定性に関連する幾つかの事柄について解析を行った。液体ロケットと比べて、これらのロケットは燃焼の観点から見ると比較的共通点が多く、両者を研究することで化学ロケットの振動燃焼に関する理解が相乗的に深まった。

まず、ハイブリッドロケットに関してはモータの内部流による影響が強いため理論の構築が比較的難しく、振動燃焼に関する汎用的な解析法などが未だ十分には発達していない。それに対して固体ロケットではこれまでに多くの振動燃焼や燃焼安定性に関する研究が行われているが、こちらも内部流速が十分大きい場合は未解明な点がある。本研究は未だ十分に確立されていないそれらの事項について理論的に取り組んだ。

振動燃焼を調べるには、定常燃焼特性についてもより詳しい知見が必要である。本研究では、燃料後退速度に及ぼすプラントル数などの無次元数の効果について調べるために、まず乱流境界層燃焼に適合する運動量輸送と熱輸送のアナロジを新たに導出し、それを燃料表面へ伝わる熱流束に書き直し、燃料後退速度を導出した。Marxmanらの式ではプラントル数、乱流プラントル数、乱流シュミット数を1と仮定しているが、本研究ではそれらの仮定を取り除いてMarxmanらの式を拡張した。そして各無次元パラメータが燃料後退速度に及ぼす影響について詳細に調べた。また、GOX/PMMAを使ったハイブリッドロケットの燃焼実験で得られた燃料後退速度の指数と本モデルによる計算結果とを比較した。燃料や燃焼器の構造等により燃焼機構が異なるため燃料後退速度の指数を表す一般的な理論式を求めることは容易ではないが、従来型ハイブリッドロケットモータにおいてPMMAなどの燃料を用いる場合は、本研究のモデルである程度正しく記述できる可能性があることが示唆された。今後は、本モデルを使って燃焼応答関数などを求め、プラントル数等が及ぼす影響を調べるのが期待される。また本研究で得られたアナロジの式は、火災の基礎的な問題のモデル化にも役立つと思われる。

次に、バルクモードの仮定を使ったハイブリッドロケットの線形安定性解析であるが、液体酸化



剤の燃焼時間遅れに起因する燃焼不安定について理論的に取り扱ったものは少なく、実験との比較も十分に検討されてこなかった。本研究では、液体酸素の燃焼時間遅れに起因する低周波燃焼不安定の線形安定性解析を行った。簡単化のためにインジェクターより上流側の供給系の非定常性は無視した。その場合、少ないパラメータで線形安定性理論を表現することが可能になったため、より一般的な安定限界線図や周波数特性を作図できるようになった。また、LOX/PMMA を使った酸化剤回流型ハイブリッドエンジンの燃焼実験において発生した低周波燃焼不安定の振動周波数は線形安定性解析の結果とよく一致し、同系統のエンジンの振動燃焼メカニズムの一端を理論的に明らかにすることができた。また燃焼室内のガスがポリトロープ変化をすると仮定したことで、安定限界について実験結果との対応に整合性が取れるようになった。

ハイブリッドロケットは大型化するにつれ縦に細長くなり、燃焼室の軸方向に沿った物理量の変化が燃焼安定性に影響する可能性がある。本研究では、従来調べられていなかった液体酸化剤の燃焼遅れ時間に起因する燃焼不安定に対する軸方向の物理量の変化を考慮した伝達関数を Karabeyoglu の方法に基づいて導出し、その特性について調べた。その結果、振動周波数が十分に低く燃焼応答関数が燃料後退速度の指数で近似でき、かつモータの長さが短い場合は、バルクモードの仮定を使った線形安定性解析による結果とほぼ同じになった。今後は、振動数の関数として燃焼応答関数を表した場合について、本モデルを使って軸方向の物理量の変化を考慮した場合を調べることが期待される。

固体ロケットモータの推力を高めるために燃速を上げると、モータ内の流速も速くなる。このような場合は従来の線形安定解析の予測では不十分であると考えられる。小型のモータは、圧力振動が燃焼室内で一様であることが多い。このようなとき、当該モータを  $L^*$ バーナーと呼ぶ。本研究では、 $L^*$ バーナーについて従来の研究であまり研究されてこなかったモータの安定性に及ぼす内部流の影響を数値的に解析した。その結果、流れが遅い場合は周波数的には従来の  $L^*$ バーナー理論と一致した。 $L^* - \bar{p}$  線図については定常圧が軸方向に沿って低下しているため燃焼室前端とノズル入口

部での圧力の平均値を圧力の代表値と見なすことで従来とほぼ同じ結果になることが分かった。流れが速い場合は、周波数が高くなるにつれて  $L^* - f$  線図において  $L^*$ バーナー理論より低い値を持つようになった。  $L^* - \bar{p}$  線図においても、燃焼室前端とノズル入口部での圧力の平均値を圧力の代表値と見なした場合、  $L^*$ バーナー理論より低い値となった。また、固体ロケットの非定常問題はこれまで問題毎に個別に解かれてきたが、この解析ではこれらの問題を統一的に解法できるようにするため、固体ロケットモータの音響的燃焼不安定を解析したのと同じ手法で計算し、その有効性を確認した。

最後に、固体ロケット、ハイブリッドロケット共に非定常燃焼に関する項目は多岐に渡っており、モータや燃料、酸化剤、固体推進薬が新規に開発される度、新たな問題が発生することがある。したがって、それらを解析する手法の統合的理解や手法自体の簡略化は、ロケット技術のさらなる発展に寄与すると思われる。

## 謝辞

本論文の作成に当たり、東海大学名誉教授の判澤正久博士には化学ロケットの非定常燃焼をはじめとして多くの事柄についてご指導・ご助言を頂いたことに対し深く感謝致します。また、独立行政法人宇宙航空研究開発機構宇宙科学研究所名誉教授の秋葉鎌二郎博士、同名誉教授の高野雅弘博士には、固体ロケットモータの研究に関して多くをご指導頂きました。独立行政法人宇宙航空研究開発機構宇宙科学研究所教授の嶋田徹博士には、固体ロケット・ハイブリッドロケットの燃焼に関してご教授・ご助言を頂きました。首都大学東京名誉教授の湯浅三郎博士には、ハイブリッドロケットの燃焼に関する実験的研究についてご教授・ご助言を頂きました。独立行政法人宇宙航空研究開発機構宇宙科学研究所の北川幸樹博士からは、ハイブリッドロケットの燃焼試験データを提供して頂きました。また、博士論文をまとめるに当たり東海大学理学部物理学科教授の山口滋博士にご指導・ご助言を頂きました。合わせて深く感謝の意を表します。