

東海大学大学院平成26年度博士論文

強磁場下2次元電子系の量子論

指導 豊田 正 教授

東海大学大学院総合理工学研究科
総合理工学専攻

内田 朋久

謝辞

東海大学理学部物理学科に入学してから今日までの九年間、恵まれた環境でひたすら物理学の勉強に励むことができ、こうして博士論文を完成させることができましたのは、ひとえに、多くの先生方、先輩、友人、そして家族の思いやりに満ちた支えがあったからです。本博士論文の指導教授である豊田正教授には学部時代の量子力学や統計力学の講義、4年次の卒業研究、そして大学院博士課程前期、博士課程後期と、いつも懇切にご指導して頂きました。豊田先生からは物理学の真髄を徹底的に教えて頂きました。さらに、物理学だけでなく、社会的なことや人間的なことも沢山教えて頂きました。学問的にも人間的にも最も尊敬する豊田先生に心から感謝致します。

本論文の審査をして頂いた安江正樹教授、若木守明教授、新屋敷直木教授、喜多理王教授、北林照幸准教授には非常に有益なアドバイスを頂きました。深く感謝致します。

平岩伸義博士、山田和弘博士、藤田真帆博士、小泉秀臣博士、福田竜郎博士には研究上の問題について、物理学全般について、さらに物理学以外の様々な面でも懇切なご支援をして頂きました。ほんとうに有難うございました。後輩の飯塚純氏との物理学の実に豊かな議論と、共にすごした研究室での楽しい日々をこの上なく有難く思っています。頻繁に研究室に滞在されたオーストラリアの Chao Zhang 教授には数多くの有意義な議論をして頂き、いつも世界の最先端の研究について教えて頂きました。深く感謝しています。

安江正樹教授、山口滋教授、八木原晋教授、西嶋恭司教授、新屋敷直木教授、藤城武彦教授、喜多理王教授、滝内賢一先生、北林照幸准教授、遠藤雅守教授をはじめ東海大学物理学科の先生方の情熱溢れる教育を受けることができ本当に幸運でした。先生方に心から感謝致します。

最後に今日まで暖かく応援し続けてくれた家族に感謝致します。特に両親の全面的な支えがあったからこそ研究生活を続けることができました。そして、私の二人の妹の応援は何よりも心強い励みになりました。両親と二人の妹に心からの感謝の言葉を捧げたいと思います。

目次

第1章	序論	4
第2章	2次元電子系の量子多体論	8
2.1	2次元電子系の例	8
2.2	第2量子化	10
2.2.1	スレーター行列式	11
2.2.2	占拠数表示	12
2.2.3	ハミルトニアン of 行列要素	14
2.2.4	生成消滅演算子	15
2.2.5	場の演算子	17
2.2.6	場の方程式	17
2.3	強磁場下2次元電子系のハミルトニアン	18
2.3.1	第2量子化されたハミルトニアン	19
2.3.2	2次元閉じ込めポテンシャル	20
2.3.3	ランダウ準位	22
2.3.4	フェルミ演算子の時間依存性	23
2.4	Semenoff モデル	25
2.4.1	グラフェンにおける2次元ディラックハミルトニアン	29
2.4.2	強磁場下におけるグラフェンのハミルトニアン	35
第3章	電子数密度応答関数	40
3.1	線形応答理論	40
3.1.1	正準形式での演算子における線形応答	40
3.1.2	大正準集団における応答関数	42
3.2	電子数密度応答関数	43
第4章	マグネトプラズモンの分散関係	45
4.1	自己無撞着線形応答理論	45
4.2	マグネトプラズモンの分散関係	50

4.2.1	電子数密度応答関数のフーリエ変換	50
4.2.2	$\Gamma(p)$ の具体的な関数形	68
4.2.3	マグネトプラズモンの分散関係	71
第 5 章	結果及び考察	78
5.1	実験との比較	79
第 6 章	結論	85
参考文献	87

第1章 序論

現代テクノロジーにおいて、GaAs 半導体や MOSFET 半導体に代表される半導体素子は必要不可欠な要素である。その重要な物理的諸性質には半導体中に形成される 2 次元平面に閉じ込められた電子多体系のダイナミクスによって決められているものが多い。その中でも、von Klitzing が MOSFET 半導体の 2 次元電子系で発見した整数量子ホール効果は量子論の根幹に関わる問題を含み、現代物理学の広い分野で注目を集めることになった [1]。整数量子ホール効果の理論的研究は、多くの研究者によって行われてきた [2-6]。しかし、実験を定量的に説明できる理論は Baraff と Tsui によって提唱され Toyoda によって発展させられた Electron Reservoir Model (ERM) だけである [7-10]。ERM では、対象とする 2 次元電子系の外に電子溜 (Electron Reservoir, ER) の存在を考えるため、電子系の電子数とその熱力学的共役変数である化学ポテンシャルの扱いについて統計力学的に厳密な扱いが可能となる。ERM によれば、整数量子ホール効果の実験で直接制御されている熱力学変数は電子数ではなく化学ポテンシャルであって、2 次元電子系の電子数密度は期待値として取り扱わなければならない。この ERM は、整数量子ホール効果の実験を非常によく説明することに成功した。しかし、Baraff と Tsui による不純物準位が ER を構成するという主張の実験的確認はできず、ER の実体が何であるかという疑問は整数量子ホール効果理論における深刻な未解決問題として残されてきた。これを解決し、整数量子ホール効果の理論を完成させたのが、2008 年から 2013 年にかけて発表された Toyoda による理論である (図 1.1、図 1.2 参照) [11-14]。この Toyoda 理論を裏付ける重要な実

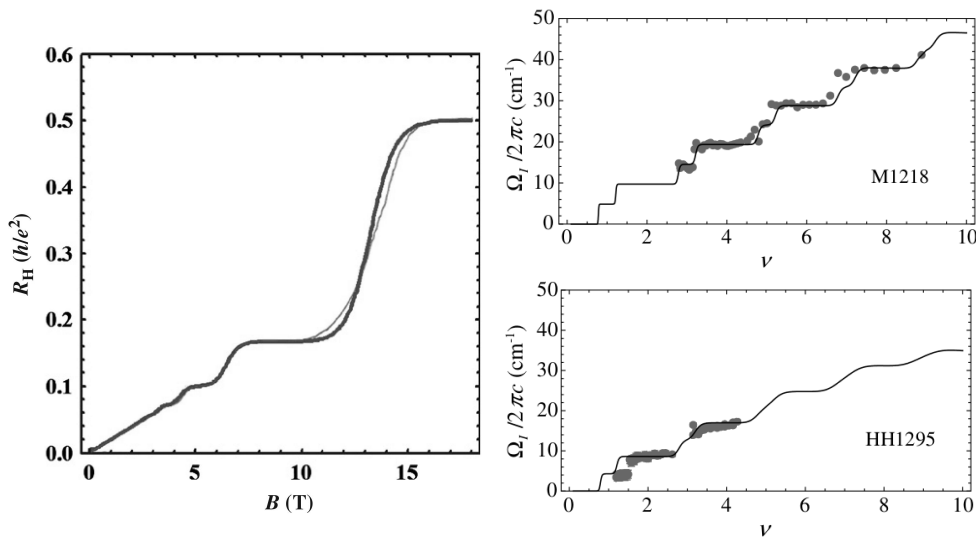


図 1.1: 量子化されたホール抵抗
太線が理論、細線が実験である。
本図は文献 [13] より引用した¹。

図 1.2: マグネトプラズモン振動数に現れるプラトー 太線が理論、点は実験である。本図は文献 [14] より引用した²。

験が存在する。2004 年 Holland 等は強磁場下 2 次元電子系におけるマグネトプラズモンの分散関係に現れるプラトーを発見した [15]。しかし、そのメカニズムは未解決のまま残されていた。Holland 等は、彼らが発見したマグネトプラズモン分散関係プラトーと整数量子ホール効果の間には密接な関係があるだろうとの予想を述べていた。実際この現象は Toyoda 理論で完璧に説明でき、量子ホール効果と密接に関係している (図 1.2 参照) [14]。Holland 等の実験を Toyoda 理論で説明するためには強磁場下 2 次元電子系におけるマグネトプラズモンの分散関係を解析的に求める必要があり、Hiraiwa と Toyoda によって計算が始められた。この計算の完成と得られた結果の詳しい検討が本研究の目的である。本論文では強磁

¹The magnetic induction dependence of the quantum Hall resistivity of graphene two-dimensional electronsystem, Kazuhiro Yamada, Tomohisa Uchida, Jun Iizuka, Maho Fujita, Tadashi Toyoda, Solid State Communications, 155 (2013) 79-81, Copyright©2012 Elsevier Ltd.

²Difference Between Far-Infrared Photoconductivity Spectroscopy and Absorption Spectroscopy: Theoretical Evidence of the Electron Reservoir Mechanism, Tadashi Toyoda, Maho Fujita, Tomohisa Uchida, Nobuyoshi Hiraiwa, Taturu Fukuda, Hideki Koizumi, and Chao Zhang, PHYSICAL REVIEW LETTERS, Vol. 111, 086801 (2013), Copyright©2013 American Physical Society

場下 2 次元電子系におけるマグネトプラズモンの分散関係を解析的に求める。電子多体系におけるプラズモンの分散関係を計算する方法は幾つかあるが [16–28]、本研究では、Toyoda による自己無撞着線形応答近似を用いる [29–33]。この理論は正準形式による場の理論 [34–38] に基づいており理論の整合性、解析的な扱いやすさ等で他の理論形式よりも格段に優れているからである。

次に本論文の構成について述べる。第 2 章では、まず 2 次元電子系の具体例について述べる。次に 2 次元電子系に関する第二量子化の方法を概説し、さらに第二量子化された 2 次元電子系のハミルトニアンについて議論する。最後に Semenoff モデルを用いたグラフェンのハミルトニアンを紹介する [39]。

第 3 章では第二量子化された電子場演算子を用いて 2 次元電子系の電子密度の線形応答について議論する。ハイゼンベルグ描像における電子場演算子のダイナミクスに基いて一般的な線形応答公式を導く理論を展開する。得られた線形応答公式を強磁場下 2 次元電子系に適用するために、強磁場下 2 次元電子系の電子場演算子を用いて電子数密度応答関数を定義する。

第 4 章ではマグネトプラズモンの分散関係を導出する。まず自己無撞着線形応答理論を強磁場下 2 次元電子系について構成する。次に第 3 章で定義した強磁場下 2 次元電子系の電子数密度応答関数を用いて自己無撞着線形応答方程式を導く。この方程式の解はマグネトプラズモンの分散関係を解析的に与える。強磁場下 2 次元電子系の電子数密度応答関数のフーリエ展開を用いて、自己無撞着線形応答方程式を解き、マグネトプラズモンの分散関係を求める。

第 5 章では、得られたマグネトプラズモンの分散関係の妥当性を検討するために実験と比較する。比較する実験結果は、Batke 等によるマグネトプラズモン振動数の磁場依存性に関するプロットである [40]。我々は第 4 章で得たマグネトプラズモンの分散関係を実験結果と同一のグラフ上にプロットし比較した。結果、本研究で導いたマグネトプラズモンの分散関係は強磁場領域において実験結果をよく説明することに成功した。また、理論と測定結果にずれが生じる磁場の大きさについても波数依存性を定性的に示し、理論の実験への適用に一定の基準を示すことに成功

した。

第6章では本研究の総括と今後の展望を述べる。本研究では Batke 等の実験結果を定量的に説明することに成功した。また、マグネトプラズモン分散関係におけるフェルミ分布の存在を解析的に示す式を導くことに成功した。これは2次元電子系マグネトプラズモン分散関係に現れるプラトー理論の基礎となる式を与える。von Klitzing が発見した整数量子ホール効果の理論的解明は今日の固体電子論で最も重要な問題の一つであるが、数多いモデルの中で定量的に説明できる唯一の理論はERMである。本研究は、ERM をマグネトプラズモン分散関係の実験結果と直接比較する際に不可欠な理論式を導くことに成功した。量子ホール効果だけでなく、強磁場下の半導体やグラフェンにおける2次元電子系とレーザー等の電磁波との相互作用の実験的および理論的研究を進める上で、本研究で導いたマグネトプラズモン分散関係は重要な役割を演じてゆくことが期待される。

第2章 2次元電子系の量子多体論

$\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As-GaAs}$ ヘテロ構造等で実現される2次元電子系は多くの研究者により積極的に研究がなされている [16, 41–49]。特に重要な現象として、強磁場下に置かれた2次元電子系で観測される整数量子ホール効果がある [1, 50]。整数量子ホール効果はERMを用いることで説明される [7–10, 12]。また、2次元電子系のプラズモンについても多くの実験や理論的研究が行われている [15–28, 40]。本章では、まず、代表的な2次元電子系を紹介する。次に、量子多体系を取り扱う場合に便利である第2量子化の方法を用いて、強磁場下2次元電子系のハミルトニアンを導出する。最後にグラフェンについて議論する。

2.1 2次元電子系の例

我々の研究対象である2次元電子系は主に半導体内に形成される。本節では代表的な2次元電子系を形成する構造の例として、MOS構造、 $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As-GaAs}$ ヘテロ構造、グラフェンを紹介する。MOS構造及び一般的な2次元電子系の電気特性の詳細はAndo等によってレビュー [51] が書かれているため、ここでは簡単な紹介と定性的な議論のみを行う。

MOS構造

まずMOS構造上に形成される2次元電子系を紹介する。最も一般的なMOS(Metal-Oxide-Semiconductor)構造は、ゲート電極として金属(Metal)、絶縁体として酸化膜(主に酸化シリコン)(Oxide)、半導体(主にシリコン)(Semiconductor)の3層からなる。今、半導体としてp型半導体について考える。このときゲート電極に正の電圧を印加すると、半導体の酸化膜-半導体接合面付近では空乏層が形成される。更に電圧を大きくすると、電子

は酸化膜-半導体接合面付近に集まる。これが2次元電子系である。MOS構造上に形成される2次元電子系の特徴として、電子数密度をゲート電圧によってコントロールすることが容易であることがいえる。またMOS構造はその作製の容易さ、及び主にシリコンによって作られることによるコストの低さから実用上非常に重要である。実際MOS構造を用いた電界効果トランジスタであるMOSFETは重要な回路素子の一つである [52]。

HEMT 構造

次に $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ -GaAs ヘテロ接合によって作られる HEMT (High Electron Mobility Transistor) 構造について紹介する。最も簡単な HEMT 構造は、半絶縁体基盤上に高純度の GaAs 及び $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ を成長させ $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ に電子供給源として Si をドープレゲート電極をとりつけたものである。このとき $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ -GaAs 接合面の GaAs 側において伝導電子のバンドがフェルミエネルギーを下回る現象が確認される。これは量子井戸と呼ばれている。 $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ -GaAs 接合では $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ 側からこの量子井戸へ電子が落ち込むことにより GaAs 上部に2次元電子系が形成される。この2次元電子系の特徴として、2次元電子系が形成される位置が電子供給源である $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ の不純物 (Si) から離れているため、不純物による散乱を受けにくく、電子移動度が非常に高い。このことから HEMT も MOSFET 同様に実用上非常に重要な回路素子であり、高速スイッチング素子等に用いられる [53]。本論文では、一般的な2次元電子系のマグネトプラズモンの分散関係を導出し、その妥当性を調べるため、 $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ -GaAs 境界面に形成される2次元電子系における実験結果 [40] と比較した。

グラフェン

最後に、グラフェンを紹介する。グラフェンは炭素の単結晶の1つである。炭素結晶の同素体にはダイヤモンドや黒鉛 (グラファイト) 等があるが、黒鉛は層構造を持つことが知られており、この内の1層のみを取り出したものを特別にグラフェンと呼んでいる。グラフェンは2004年に Novoselov と Geim によってグラファイトから剥離された [54]。グラフェンの構造は、八二カム構造と呼ばれる正六角形を平面的に敷き詰めた格

子点を持つ。グラフェン上で実現される電子系は原子一個分の厚さを持つ2次元電子系となる。ハニカム格子上で形成される2次元電子系の理論的研究は、グラフェン発見以前から行われており、Wallaceはタイトバインディングモデルを用いたバンド構造の研究から、ハニカム格子上における2次元電子系はブリルアンゾーンの各頂点でバンドギャップが零となること、さらに低エネルギーにおいてエネルギーバンドが線形スペクトルで近似できることを発見した [55]。このような線形スペクトルは、相対論的な電子に見られる特徴である。実際 Semenoff は、最隣接近似を用いたタイトバインディングハミルトニアンが、線形近似されたエネルギーバンド領域で、零質量ディラック型になることを示した [39]。このことから、ブリルアンゾーンの各頂点はディラックポイントと呼ばれ、その付近のエネルギーバンドはディラックコーンと呼ばれている。また、この特異な性質を持つ電子場を零質量ディラックフェルミオンと呼ぶ [56]。しかし、これはあくまで線形近似の結果であって、相対論とは無関係である。この零質量ディラックフェルミオンは、異常量子ホール効果として観測された [56, 57]。グラフェンの整数量子ホール効果については、Toyodaによって導入されたERMを用いて理論的に説明されている [12]。ディラックフェルミオンの存在によりグラフェンは他の半導体材料とは全く異なる特性を持つため、非常に多くの研究がなされており、レビューも書かれている [58–60]。

2.2 第2量子化

物質を構成する粒子は、自身を持ちうるスピンの値によって2種類に分類される。一つはスピンの値が \hbar の整数倍となるボソン、もう一つは半奇数倍となるフェルミオンである。電子はスピンの値として $\hbar/2$ を持つフェルミオンである。よって、我々が対象とする2次元電子系はフェルミオンからなる同種粒子多体系である。同種粒子多体系の量子力学では、量子力学特有の性質が現れる。それは個々の粒子の判別不可能性である。量子力学において、粒子を判別するための情報は粒子の量子力学的状態以外にはない。さらに、多体系を構成する粒子がフェルミオンであるとき、パウリの排他律が適用される。これは、2つ以上のフェルミオンが同

一の量子力学的状態を占めることができないというものである。このような同種粒子多体系を取り扱う方法として第2量子化の方法を用いると便利である [61–67]。

2.2.1 スレーター行列式

N 個の電子からなる量子多体系について考える。 N 粒子系を構成する各電子を i でラベル付けすると、 N 粒子系のハミルトニアン H は、

$$H = H^{(0)} + H^{(e-e)} \quad (2.1)$$

と書ける。但し、 $H^{(0)}$ と $H^{(e-e)}$ は

$$H^{(0)} = \sum_{i=1}^N \mathcal{H}(\xi_i) \quad , \quad H^{(e-e)} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|) \quad (2.2)$$

である。ここで、 $\mathcal{H}(\xi_i)$ は適当な1粒子ハミルトニアン、 $V(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|)$ は粒子間相互作用である。変数 ξ_i は粒子 i についての空間座標 \mathbf{x}_i 及びスピン α_i の組 $\xi_i = (\mathbf{x}_i, \alpha_i)$ である。このとき N 粒子系の状態空間は、1粒子系の状態空間の積で表される。これは N 粒子系の波動関数 $\Phi_{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$ が1粒子系の波動関数 $\phi_{\zeta_i}(\xi_i)$ の積

$$\Phi_{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N}^A(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) = \phi_{\zeta_1}(\xi_1) \phi_{\zeta_2}(\xi_2) \cdots \phi_{\zeta_N}(\xi_N) \quad (2.3)$$

で展開されることを意味する。ラベル ζ_i は粒子 i の量子力学的状態を表す量子数である。1粒子系の波動関数 $\phi_{\zeta_i}(\xi_i)$ として固有方程式

$$\mathcal{H}(\xi_i) \phi_{\zeta_i}(\xi_i) = E_{\zeta_i} \phi_{\zeta_i}(\xi_i) \quad (2.4)$$

を満たすものを用いるならば、 $\Phi_{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N}^A(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$ はハミルトニアン H の一つの固有関数である。

ここで、同種粒子系の波動関数が満たすべき条件について考察する。量子力学では、同種粒子は量子力学的状態のみによって判別される。そのため同種粒子系では個々の粒子を区別することができない。これは粒子に付けられたラベル i を付け替えても観測される物理量が同一である

ことを意味している。実際にハミルトニアン H はラベル i の交換に不変である。ハミルトニアン H の一つの固有関数 $\Phi_{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N}^A(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$ について考える。ハミルトニアン H がラベルを付け替えても不変であるから、固有関数 $\Phi_{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N}^A(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$ 及びラベルを付け替えた関数 $\Phi_{\zeta_{1'}, \zeta_{2'}, \dots, \zeta_{N'}}^A(\xi_{1'}, \xi_{2'}, \dots, \xi_{N'})$ は同一の固有値に属する。ラベルの付け替え操作は $N!$ 通りあるため、同一の固有値に属する固有関数も $N!$ 個あることがわかる。ラベルの付け替え操作に対して固有関数に

$$\Phi^A(\dots, \xi_j, \dots, \xi_i, \dots) = -\Phi^A(\dots, \xi_i, \dots, \xi_j, \dots) \quad (2.5)$$

を課す。この条件を用いると、規格化されたハミルトニアンの固有関数は

$$\Phi_{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \det \begin{bmatrix} \phi_{\zeta_1}(\xi_1) & \phi_{\zeta_1}(\xi_2) & \cdots & \phi_{\zeta_1}(\xi_N) \\ \phi_{\zeta_2}(\xi_1) & \phi_{\zeta_2}(\xi_2) & \cdots & \phi_{\zeta_2}(\xi_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{\zeta_N}(\xi_1) & \phi_{\zeta_N}(\xi_2) & \cdots & \phi_{\zeta_N}(\xi_N) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

となる。記号 $\det[A]$ は A の行列式である。これはスレーター行列と呼ばれている。スレーター行列において、2つ以上の粒子が同一の量子力学的状態をとると $\Phi = 0$ となる。これはパウリの排他律を満たしている [66]。

2.2.2 占拠数表示

同種粒子が区別できないことを考慮し、各粒子にラベル付けすることをやめ、 N 粒子系の粒子がとりうる各 1 粒子状態にラベル付けする。さらに、ラベル付けされた各 1 粒子状態を占めている粒子の個数である占拠数 n_{ζ_i} を導入する。電子多体系の場合、パウリの排他律から占拠数の値は

$$n_{\zeta_i} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

をとり、系の全粒子数は

$$N = \sum_{i=1}^{\infty} n_{\zeta_i} \quad (2.8)$$

で表される。 N 粒子系の状態は占拠数の組 $(n_{\zeta_1}, n_{\zeta_2}, \dots, n_{\zeta_\infty})$ によって表されるから、 N 粒子系の状態空間の基底として

$$|n_{\zeta_1}, n_{\zeta_2}, \dots\rangle \quad (2.9)$$

ととることができる。ここで、 N 粒子系の各 1 粒子状態 $\{\phi_{n_{\zeta_j}}(\xi_i)\}$ が完全正規直交系であるとき、状態空間の基底 $|n_{\zeta_1}, n_{\zeta_2}, \dots\rangle$ は正規直交条件

$$\langle n'_{\zeta_1}, n'_{\zeta_2}, \dots | n_{\zeta_1}, n_{\zeta_2}, \dots \rangle = \delta_{n'_{\zeta_1} n_{\zeta_1}} \delta_{n'_{\zeta_2} n_{\zeta_2}} \dots \quad (2.10)$$

を満たす。この状態の表現は全粒子数 N に関する制限がない。このような多粒子系の状態の表現を占拠数表示と呼ぶ。占拠数表示を用いれば多粒子系の波動関数を

$$\Phi_{n_{\zeta_1}, n_{\zeta_2}, \dots}(\xi_1, \xi_2, \dots) = \langle \xi_1, \xi_2, \dots | n_{\zeta_1}, n_{\zeta_2}, \dots \rangle \quad (2.11)$$

と書き表せる。これを用いると N 粒子系の各 1 粒子状態を

$$\phi_{n_{\zeta_j}}(\xi_i) = \begin{cases} \phi_{\zeta_k}(\xi_i) & (n_{\zeta_j} = 1) \\ 1 & (n_{\zeta_j} = 0) \end{cases} \quad (2.12)$$

と書き表せる。また、 N 粒子系の波動関数は、系の全粒子数が $N = \sum_{i=1}^{\infty} n_{\zeta_i}$ で表されるという条件の下で、スレーター行列

$$\Phi_{n_{\zeta_1}, n_{\zeta_2}, \dots}(\xi_1, \xi_2, \dots) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \det \begin{bmatrix} \phi_{n_{\zeta_1}}(\xi_1) & \phi_{n_{\zeta_1}}(\xi_2) & \dots & \phi_{n_{\zeta_1}}(\xi_\infty) \\ \phi_{n_{\zeta_1}}(\xi_2) & \phi_{n_{\zeta_2}}(\xi_2) & \dots & \phi_{n_{\zeta_2}}(\xi_\infty) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n_{\zeta_\infty}}(\xi_1) & \phi_{n_{\zeta_\infty}}(\xi_2) & \dots & \phi_{n_{\zeta_\infty}}(\xi_\infty) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

で表される。

2.2.3 ハミルトニアン of 行列要素

占拠数表示を用いた N 粒子系の状態ケットによって、ハミルトニアン of 行列要素を表すことができる。式 (2.2) で与えられた 1 粒子座標のみに作用するハミルトニアン $H^{(0)}$ について、 N 粒子系の粒子の状態を ζ_i から ζ_j に変えるような行列要素を書き下す。フェルミオンではパウリの排他律より、始状態は $|\cdots, n_{\zeta_i} = 1, \cdots, n_{\zeta_j} = 0, \cdots\rangle$ であり、終状態は $|\cdots, n_{\zeta_i} = 0, \cdots, n_{\zeta_j} = 1, \cdots\rangle$ となるから、行列要素は

$$\begin{aligned} & \langle \cdots, n_{\zeta_i} = 1, \cdots, n_{\zeta_j} = 0, \cdots | H^{(0)} | \cdots, n_{\zeta_i} = 0, \cdots, n_{\zeta_j} = 1, \cdots \rangle \\ &= \int d\xi_1 \cdots d\xi_\infty \Phi_{\cdots, n_{\zeta_i}=1, \cdots, n_{\zeta_j}=0, \cdots}(\xi_1, \xi_2, \cdots) \\ & \quad \times \left\{ \sum_{i=1}^N \mathcal{H}(\xi_i) \right\} \Phi_{\cdots, n_{\zeta_i}=0, \cdots, n_{\zeta_j}=1, \cdots}(\xi_1, \xi_2, \cdots) \end{aligned} \quad (2.14)$$

である。スレーター行列 $\Phi_{\cdots, n_{\zeta_i}=1, \cdots, n_{\zeta_j}=0, \cdots}(\xi_1, \xi_2, \cdots)$ を n_{ζ_i} 列について、 $\Phi_{\cdots, n_{\zeta_i}=0, \cdots, n_{\zeta_j}=1, \cdots}(\xi_1, \xi_2, \cdots)$ を n_{ζ_j} 列について展開し積分を実行すると、

$$\begin{aligned} & \langle \cdots, n_{\zeta_i} = 1, \cdots, n_{\zeta_j} = 0, \cdots | H^{(0)} | \cdots, n_{\zeta_i} = 0, \cdots, n_{\zeta_j} = 1, \cdots \rangle \\ &= (-1)^{\sum_{k=i+1}^{j-1} n_{\zeta_k}} \mathcal{H}_{ij} \end{aligned} \quad (2.15)$$

を得る。ここで、

$$\mathcal{H}_{ij} = \int d\xi \phi_{n_{\zeta_i}}^*(\xi) \mathcal{H}(\xi) \phi_{n_{\zeta_j}}(\xi) \quad (2.16)$$

とした。積分記号は $\int d\xi = \sum_\alpha \int d^3\mathbf{x}$ とした。同様に

$$\begin{aligned} & \langle \cdots, n_{\zeta_i} = 0, \cdots, n_{\zeta_j} = 1, \cdots | H^{(0)} | \cdots, n_{\zeta_i} = 1, \cdots, n_{\zeta_j} = 0, \cdots \rangle \\ &= (-1)^{\sum_{k=i+1}^{j-1} n_{\zeta_k}} \mathcal{H}_{ij} \end{aligned} \quad (2.17)$$

を得る。また対角要素は

$$\langle n_{\zeta_1}, n_{\zeta_2}, \dots | H^{(0)} | n_{\zeta_1}, n_{\zeta_2}, \dots \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} n_{\zeta_i} \mathcal{H}_{ii} \quad (2.18)$$

となる [66]。

2.2.4 生成消滅演算子

1 粒子状態 ζ_i にある粒子を消す演算子 \hat{c}_{ζ_i} 及び 1 粒子状態 ζ_i に粒子を生み出す演算子 $\hat{c}_{\zeta_i}^\dagger$ を導入する。即ち、 N 粒子系の状態に作用させたとき、

$$\hat{c}_{\zeta_i}^\dagger |n_{\zeta_1}, n_{\zeta_2}, \dots\rangle = \begin{cases} |\dots, n_{\zeta_i} = 1, \dots\rangle C_1 & (n_{\zeta_i} = 0) \\ 0 & (n_{\zeta_i} = 1) \end{cases} \quad (2.19)$$

$$\hat{c}_{\zeta_i} |n_{\zeta_1}, n_{\zeta_2}, \dots\rangle = \begin{cases} 0 & (n_{\zeta_i} = 0) \\ |\dots, n_{\zeta_i} = 0, \dots\rangle C_2 & (n_{\zeta_i} = 1) \end{cases} \quad (2.20)$$

となる演算子 \hat{c}_{ζ_i} 及び $\hat{c}_{\zeta_i}^\dagger$ を導入する。 \hat{c}_{ζ_i} を消滅演算子、 $\hat{c}_{\zeta_i}^\dagger$ を生成演算子と呼ぶ。式 (2.15)(2.17) で得た行列要素から係数 C は

$$C_1 = C_2 = (-1)^{n_{\zeta_1} + n_{\zeta_2} + \dots + n_{\zeta_N}} \quad (2.21)$$

となる。また、演算子

$$\hat{n}_{\zeta_i} = \hat{c}_{\zeta_i}^\dagger \hat{c}_{\zeta_i} \quad (2.22)$$

を導入し、 N 粒子系の状態に作用させると、

$$\hat{n}_{\zeta_i} |n_{\zeta_1}, n_{\zeta_2}, \dots\rangle = |n_{\zeta_1}, n_{\zeta_2}, \dots\rangle n_{\zeta_i} \quad (2.23)$$

となる。これは占拠数 n_{ζ_i} を固有値に持つ固有方程式であるから、 \hat{n}_{ζ_i} は数演算子である。さらに、生成消滅演算子は反交換関係

$$\hat{c}_{\zeta_i} \hat{c}_{\zeta_j}^\dagger + \hat{c}_{\zeta_j}^\dagger \hat{c}_{\zeta_i} = \delta_{ij} \quad (2.24)$$

$$\hat{c}_{\zeta_i} \hat{c}_{\zeta_j} + \hat{c}_{\zeta_j} \hat{c}_{\zeta_i} = 0, \quad \hat{c}_{\zeta_i}^\dagger \hat{c}_{\zeta_j}^\dagger + \hat{c}_{\zeta_j}^\dagger \hat{c}_{\zeta_i}^\dagger = 0 \quad (2.25)$$

を満たすことがわかる。また、 N 粒子系の状態が

$$|n_{\eta_1}, n_{\eta_2}, \dots\rangle = |\dots, n_{\zeta_1}, \dots, n_{\zeta_2}, \dots, n_{\zeta_N}, \dots\rangle \quad (2.26)$$

であるとき、生成演算子 $\hat{c}_{\zeta_i}^\dagger$ を用いて、

$$|\dots, n_{\zeta_1}, \dots, n_{\zeta_2}, \dots, n_{\zeta_N}, \dots\rangle = \hat{c}_{\zeta_N}^\dagger \dots \hat{c}_{\zeta_2}^\dagger \hat{c}_{\zeta_1}^\dagger |0\rangle \quad (2.27)$$

と書ける。ここで、 $|0\rangle$ は粒子が1つも無い状態を表し、真空と呼ばれている。このような性質を持つ生成消滅演算子を用いれば全粒子数演算子を

$$\hat{N} = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{c}_{\zeta_i}^\dagger \hat{c}_{\zeta_i} \quad (2.28)$$

と書ける。ハミルトニアンの中の1粒子演算子の項は

$$H^{(0)} = \sum_{i,j} \mathcal{H}_{ij} \hat{c}_{\zeta_i}^\dagger \hat{c}_{\zeta_j} \quad (2.29)$$

と書ける。同様に2粒子演算子の項についても

$$\hat{H}^{(e-e)} = \frac{1}{2} \sum_{ijkl} v_{ijkl} \hat{c}_{\zeta_i}^\dagger \hat{c}_{\zeta_j}^\dagger \hat{c}_{\zeta_k} \hat{c}_{\zeta_l} \quad (2.30)$$

と書ける。ここで、 v_{ijkl} は

$$v_{ijkl} = \int d\xi \int d\xi' \phi_{n_{\zeta_i}}^*(\xi) \phi_{n_{\zeta_j}}^*(\xi') V(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \phi_{n_{\zeta_k}}(\xi') \phi_{n_{\zeta_l}}(\xi) \quad (2.31)$$

である [66]

2.2.5 場の演算子

演算子 \hat{c}_{ζ_i} 、 $\hat{c}_{\zeta_i}^\dagger$ は1粒子状態 ζ_i についての生成消滅演算子であったが、座標について定義することもできる。これを場の演算子と呼び、

$$\hat{\psi}(\xi) = \int d\xi \hat{c}_{\zeta_i} \phi_{n_{\zeta_i}}(\xi) \quad (2.32)$$

で定義する。場の演算子の交換関係は、生成消滅演算子 \hat{c}_{ζ_i} 、 $\hat{c}_{\zeta_i}^\dagger$ の交換関係より、

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\xi)\hat{\psi}^\dagger(\xi') + \hat{\psi}^\dagger(\xi')\hat{\psi}(\xi) &= \int d\xi \int d\xi' \left\{ \hat{c}_{\zeta_i} \hat{c}_{\zeta_j}^\dagger + \hat{c}_{\zeta_j}^\dagger \hat{c}_{\zeta_i} \right\} \phi_{n_{\zeta_i}}(\xi) \phi_{n_{\zeta_j}}^*(\xi') \\ &= \delta(\xi, \xi') \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\hat{\psi}(\xi)\hat{\psi}(\xi') + \hat{\psi}(\xi')\hat{\psi}(\xi) = \hat{\psi}^\dagger(\xi)\hat{\psi}^\dagger(\xi') + \hat{\psi}^\dagger(\xi')\hat{\psi}^\dagger(\xi) = 0 \quad (2.34)$$

となる。場の演算子 $\hat{\psi}(\xi)$ を用いれば、全粒子数演算子は

$$\hat{N} = \int d\xi \hat{\psi}^\dagger(\xi)\hat{\psi}(\xi) \quad (2.35)$$

となる。さらに、ハミルトニアンの中の1粒子演算子の項は

$$\hat{H}^{(0)} = \int d\xi \hat{\psi}^\dagger(\xi)\mathcal{H}(\xi)\hat{\psi}(\xi) \quad (2.36)$$

となり、電子間相互作用の項は

$$\hat{H}^{(e-e)} = \frac{1}{2} \int d\xi \int d\xi' \hat{\psi}^\dagger(\xi)\hat{\psi}^\dagger(\xi')V(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\hat{\psi}(\xi')\hat{\psi}(\xi) \quad (2.37)$$

となる。

2.2.6 場の方程式

これまでの議論は、シュレディンガー描像で行われた。即ち演算子が時間依存しない形で与えられていた。本項では、ハイゼンベルグ描像を

用いて場の演算子の時間発展を調べる。

ハイゼンベルグ描像での場の演算子は

$$\hat{\psi}_H(\xi, t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right)\hat{\psi}(\xi)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right) \quad (2.38)$$

で定義される。ハイゼンベルグ描像での場の演算子は同時刻正準反交換関係

$$\{\hat{\psi}_H(\xi, t), \hat{\psi}_H^\dagger(\xi', t)\} = \delta(\xi, \xi') \quad (2.39)$$

$$\{\hat{\psi}_H(\xi, t), \hat{\psi}_H(\xi', t)\} = \{\hat{\psi}_H^\dagger(\xi, t), \hat{\psi}_H^\dagger(\xi', t)\} = 0 \quad (2.40)$$

を満たす。 $\{A, B\} = AB + BA$ とした。

場の演算子の時間発展はハイゼンベルグ方程式

$$i\hbar\frac{d}{dt}\hat{\psi}_H(\xi, t) = [\hat{\psi}_H(\xi, t), \hat{H}] \quad (2.41)$$

で与えられる。ここで、 $[A, B] = AB - BA$ とした。ハミルトニアンが電子間相互作用等の2体相互作用を含む場合、ハイゼンベルグ方程式は

$$i\hbar\frac{d}{dt}\hat{\psi}_H(\xi, t) = \mathcal{H}(\xi)\hat{\psi}_H(\xi, t) + \int d\xi'\hat{\psi}_H(\xi', t)V(\xi, \xi')\hat{\psi}_H(\xi', t)\hat{\psi}_H(\xi, t) \quad (2.42)$$

となる。これを場の方程式と呼ぶ。また、ハミルトニアンに2体相互作用が無いとき場の方程式は1粒子シュレディンガー方程式と同形になる。このため、場の演算子 $\hat{\psi}_H(\xi, t)$ を第2量子化されたシュレディンガー場の演算子と呼ぶ。

2.3 強磁場下2次元電子系のハミルトニアン

本論文で考察する系は、強い静磁場下にある2次元電子系である。マグネトプラズモンが存在するとき、2次元電子系中に電荷の粗密による電場が生じる。本論文ではこの電場を摂動として取り扱う。即ち、ハミル

トニアンを

$$\hat{H} = \hat{H}^{(0)} + \hat{H}^{(1)}(t) \quad (2.43)$$

のように、時間依存しない項 $\hat{H}^{(0)}$ と時間依存する項 $\hat{H}^{(1)}(t)$ に分け、時間に依存する項 $\hat{H}^{(1)}(t)$ を摂動として扱う。

2.3.1 第2量子化されたハミルトニアン

ハミルトニアンを第2量子化された形で書き下す。

まず、ハミルトニアンの時間依存の無い項 $\hat{H}^{(0)}$ を書き下す。式 (2.36) で求めた通り、第2量子化されたハミルトニアンは1粒子ハミルトニアン $\hat{\mathcal{H}}^{(0)}(\partial)$ 及び第2量子化されたシュレディンガー場の演算子 $\hat{\Psi}_\alpha(\mathbf{x}, t)$ を用いて

$$\hat{H}^{(0)} = \sum_\alpha \int d^3\mathbf{x} \hat{\Psi}_\alpha^\dagger(\mathbf{x}, t) \hat{\mathcal{H}}^{(0)}(\partial) \hat{\Psi}_\alpha(\mathbf{x}, t) \quad (2.44)$$

と書ける。ここで、第2量子化されたシュレディンガー場の演算子 $\hat{\Psi}_\alpha(\mathbf{x}, t)$ は、相互作用描像の演算子

$$\hat{\Psi}_\alpha(\mathbf{x}, t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \hat{H}^{(0)} t\right) \hat{\Psi}_\alpha(\mathbf{x}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}^{(0)} t\right) \quad (2.45)$$

であり、同時刻正準反交換関係

$$\left\{ \hat{\Psi}_\alpha(\mathbf{x}, t), \hat{\Psi}_{\alpha'}^\dagger(\mathbf{x}', t) \right\} = \delta_{\alpha, \alpha'} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (2.46)$$

を満たす。ここで、記号 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ は空間座標、 $\alpha = \uparrow, \downarrow$ はスピンである。今、対象となる2次元電子系は $x_1 - x_2$ 平面に置かれ、静磁場 $B = (0, 0, B)$ が印加されている。このとき、ベクトルポテンシャルとしてランダウゲージ $A = (-Bx_2, 0, 0)$ をとり、電子系を2次元に閉じ込めておくためのポテンシャルを $V(x_3)$ とすると、1粒子ハミルトニアン $\hat{\mathcal{H}}^{(0)}(\partial)$

は

$$\hat{\mathcal{H}}^{(0)}(\partial) = \frac{1}{2m} \left[\left(-i\hbar\partial_1 - \frac{eB}{c}x_2 \right)^2 + (-i\hbar\partial_2)^2 + (-i\hbar\partial_3)^2 \right] + V(x_3) + \frac{g}{2}\mu_B B\sigma(\alpha) - \mu_0 \quad (2.47)$$

と書ける。 m は電子の有効質量、 $-e$ は電子の電荷、 g は g 因子、 μ_B はボーア磁子、 μ_0 は化学ポテンシャルである。記号 $\sigma(\alpha)$ は $\alpha = \uparrow$ のとき $\sigma(\alpha) = 1$ 、 $\alpha = \downarrow$ のとき $\sigma(\alpha) = -1$ とした。ボーア磁子 μ_B は、

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_0c} \quad (2.48)$$

である。 m_0 は電子の静止質量である。

次に、ハミルトニアン時間に依存する項 $\hat{H}^{(1)}(t)$ を書き下す。ハミルトニアン時間に依存する項 $\hat{H}^{(1)}(t)$ は電場に関する項である。電場をスカラーポテンシャル $A_0(\mathbf{x}, t)$ で表すと時間依存項は

$$\hat{H}^{(1)}(t) = -e \sum_{\alpha} \int d^3\mathbf{x} \hat{\Psi}_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{x}, t) \hat{\Psi}_{\alpha}(\mathbf{x}, t) A_0(\mathbf{x}, t) \quad (2.49)$$

と書ける。

2.3.2 2次元閉じ込めポテンシャル

2次元電子系を取り扱うために場の演算子 $\hat{\Psi}_{\alpha}(\mathbf{x}, t)$ を x_3 方向の成分とそれ以外の成分とに分離する。今、2次元電子系を構成する電子は閉じ込めポテンシャル $V(x_3)$ によって x_3 方向に束縛され定常状態にあると仮定する。さらに、閉じ込めポテンシャル $V(x_3)$ が非常に強力なために、電子は基底状態にあると仮定する。即ち電子の x_3 方向の運動は、固有方程式

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m} \partial_3^2 + V(x_3) \right] \chi(x_3) = E_0 \chi(x_3) \quad (2.50)$$

を満たす波動関数 $\chi(x_3)$ によって記述される。 E_0 は電子の x_3 方向の基底エネルギーである。ここで波動関数 $\chi(x_3)$ は

$$\int dx_3 |\chi(x_3)|^2 = 1 \quad (2.51)$$

で規格化されている。この x_3 方向の波動関数 $\chi(x_3)$ を用いて、場の演算子 $\hat{\Psi}_\alpha(\mathbf{x}, t)$ は

$$\hat{\Psi}_\alpha(\mathbf{x}, t) = \chi(x_3) \hat{\Phi}_\alpha(\mathbf{r}, t) \quad (2.52)$$

と分離される。記号 $\mathbf{r} = (x_1, x_2)$ は2次元空間座標とした。場の演算子の平面方向成分 $\hat{\Phi}_\alpha(\mathbf{r}, t)$ は3次元場の演算子の交換関係 (2.46) より、同時刻正準反交換関係

$$\left\{ \hat{\Phi}_\alpha(\mathbf{r}, t), \hat{\Phi}_{\alpha'}^\dagger(\mathbf{r}', t) \right\} = \delta_{\alpha\alpha'} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.53)$$

を満たすことがわかる。

3次元場の演算子の分離 (2.52) を式 (2.44) にある非摂動ハミルトニアン $\hat{H}^{(0)}$ へ適用すると、平面方向成分のみで書かれたハミルトニアン

$$\hat{H}^{(0)} = \sum_\alpha \int d^2\mathbf{r} \hat{\Phi}_\alpha^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{h}(\partial) \hat{\Phi}_\alpha(\mathbf{r}, t) \quad (2.54)$$

を得る。 $\hat{h}(\partial)$ は2次元空間での1粒子ハミルトニアン

$$\hat{h}(\partial) = \frac{1}{2m} \left[\left(-i\hbar\partial_1 - \frac{eB}{c}x_2 \right)^2 + (-i\hbar\partial_2)^2 \right] + \frac{g}{2}\mu_B B\sigma(\alpha) - \mu \quad (2.55)$$

であり、新たな化学ポテンシャルを

$$\mu = \mu_0 - E_0 \quad (2.56)$$

とした。

2.3.3 ランダウ準位

2次元場の演算子 $\hat{\Phi}_\alpha(\mathbf{r}, t)$ を2次元空間での1粒子ハミルトニアン $\hat{h}(\partial)$ の固有関数系 $\{v_{nk}(\mathbf{r})\}$ で展開する。

波動関数 $v_{nk}(\mathbf{r})$ は1粒子ハミルトニアン $\hat{h}(\partial)$ の固有関数であるから、固有方程式

$$\hat{h}(\partial)v_{nk}(\mathbf{r}) = E_{n\alpha}v_{nk}(\mathbf{r}) \quad (2.57)$$

を満たす。この方程式を満たす固有関数はよく知られており、

$$v_{nk}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx_1} u_n(x_2 - l^2 k) \quad (2.58)$$

$$u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! l \sqrt{\pi}}} \exp\left[\frac{-1}{2} \left(\frac{x}{l}\right)^2\right] H_n\left[\frac{x}{l}\right] \quad (2.59)$$

である。ここで、 $H_n[x]$ はエルミート多項式であり、

$$H_n[x] = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2} \right) \quad (2.60)$$

で定義される [68]。 $E_{n\alpha}$ はランダウ準位

$$E_{n\alpha} = \hbar\omega_C \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{g}{2} \mu_B B \sigma(\alpha) - \mu \quad (2.61)$$

である。 ω_C はサイクロトロン振動数、 l は磁気長であり、それぞれ、

$$\omega_c = \frac{eB}{mc}, \quad l = \sqrt{\frac{c\hbar}{eB}} \quad (2.62)$$

である。

2次元場の演算子 $\hat{\Phi}_\alpha(\mathbf{r}, t)$ は波動関数 $v_{nk}(\mathbf{r})$ を用いて、

$$\hat{\Phi}_\alpha(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{C}_{nk\alpha}(t) v_{nk}(\mathbf{r}) \quad (2.63)$$

と展開される。ここで演算子 $\hat{C}_{nk\alpha}(t)$ は、2次元場の演算子 $\hat{\Phi}_\alpha(\mathbf{r}, t)$ の交

換関係 (2.53) より、同時刻正準反交換関係

$$\left\{ \hat{C}_{nk\alpha}(t), \hat{C}_{n'k'\alpha'}^\dagger(t) \right\} = \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{nn'} \delta(k - k') \quad (2.64)$$

を満たすフェルミ演算子であることがわかる。

また、2次元場の演算子 $\hat{\Phi}_\alpha(\mathbf{r}, t)$ の展開 (2.63) を2次元ハミルトニアン (2.54) へ適用し、量子数 n, k にそくした書き直すと、ハミルトニアンは

$$\hat{H}^{(0)} = \sum_{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk E_{n\alpha} \hat{C}_{nk\alpha}^\dagger(t) \hat{C}_{nk\alpha}(t) \quad (2.65)$$

となり、対角化された形で書き表せる。

2.3.4 フェルミ演算子の時間依存性

対角化されたハミルトニアン $\hat{H}^{(0)}$ を用いて、フェルミ演算子の時間依存性を決定する。

相互作用描像におけるシュレディンガー場の演算子の定義 (2.45) 及び、場の演算子の展開 (2.52)(2.63) より、フェルミ演算子 $\hat{C}_{nk\alpha}(t)$ の時間依存性は

$$\hat{C}_{nk\alpha}(t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \hat{H}^{(0)} t\right) \hat{C}_{nk\alpha} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}^{(0)} t\right) \quad (2.66)$$

で表され、その時間発展は

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} \hat{C}_{nk\alpha}(t) &= \left[\hat{C}_{nk\alpha}(t), \hat{H}^{(0)} \right] \\ &= \sum_{\alpha'} \sum_{n'=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk' E_{n'\alpha'} \left[\hat{C}_{nk\alpha}(t), \hat{C}_{n'k'\alpha'}^\dagger(t) \hat{C}_{n'k'\alpha'}(t) \right] \end{aligned} \quad (2.67)$$

によって決定される。

右辺の交換子積を計算する。交換子積を書き下すと、

$$\begin{aligned}
& \left[\hat{C}_{nk\alpha}(t), \hat{C}_{n'k'\alpha'}^\dagger(t) \hat{C}_{n'k'\alpha'}(t) \right] \\
&= \hat{C}_{nk\alpha}(t) \hat{C}_{n'k'\alpha'}^\dagger(t) \hat{C}_{n'k'\alpha'}(t) - \hat{C}_{n'k'\alpha'}^\dagger(t) \hat{C}_{n'k'\alpha'}(t) \hat{C}_{nk\alpha}(t) \\
&= \left\{ \hat{C}_{nk\alpha}(t) \hat{C}_{n'k'\alpha'}^\dagger(t) + \hat{C}_{n'k'\alpha'}^\dagger(t) \hat{C}_{nk\alpha}(t) - \hat{C}_{n'k'\alpha'}^\dagger(t) \hat{C}_{nk\alpha}(t) \right\} \hat{C}_{n'k'\alpha'}(t) \\
&\quad - \hat{C}_{n'k'\alpha'}^\dagger(t) \hat{C}_{n'k'\alpha'}(t) \hat{C}_{nk\alpha}(t) \tag{2.68}
\end{aligned}$$

となる。フェルミ演算子 $\hat{C}_{nk\alpha}(t)$ は同時刻正準反交換関係 (2.64) を満たすため、

$$\begin{aligned}
& \left[\hat{C}_{nk\alpha}(t), \hat{C}_{n'k'\alpha'}^\dagger(t) \hat{C}_{n'k'\alpha'}(t) \right] \\
&= \left\{ \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{nn'} \delta(k - k') - \hat{C}_{n'k'\alpha'}^\dagger(t) \hat{C}_{nk\alpha}(t) \right\} \hat{C}_{n'k'\alpha'}(t) \\
&\quad - \hat{C}_{n'k'\alpha'}^\dagger(t) \hat{C}_{n'k'\alpha'}(t) \hat{C}_{nk\alpha}(t) \\
&= \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{nn'} \delta(k - k') \hat{C}_{n'k'\alpha'}(t) \tag{2.69}
\end{aligned}$$

を得る。これをフェルミ演算子の時間発展の方程式 (2.67) へ代入すると

$$\begin{aligned}
i\hbar \frac{d}{dt} \hat{C}_{nk\alpha}(t) &= \sum_{\alpha'} \sum_{n'=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk' E_{n'\alpha'} \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{nn'} \delta(k - k') \hat{C}_{n'k'\alpha'}(t) \\
&= E_{n\alpha} \hat{C}_{nk\alpha}(t) \tag{2.70}
\end{aligned}$$

となり、フェルミ演算子 $\hat{C}_{nk\alpha}(t)$ の時間依存性

$$\hat{C}_{nk\alpha}(t) = e^{-i\omega_{n\alpha}t} \hat{C}_{nk\alpha} \tag{2.71}$$

を得る。ここで、

$$\omega_{n\alpha} = \frac{E_{n\alpha}}{\hbar} \tag{2.72}$$

とした。時間依存の無いフェルミ演算子 $\hat{C}_{nk\alpha}$ は正準反交換関係

$$\left\{ \hat{C}_{nk\alpha}, \hat{C}_{n'k'\alpha'}^\dagger \right\} = \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{nn'} \delta(k - k') \quad (2.73)$$

を満たす。

対角化されたハミルトニアン (2.65) のフェルミ演算子 $\hat{C}_{nk\alpha}(t)$ へ、時間依存性 (2.71) を適用すると、ハミルトニアンは

$$\hat{H}^{(0)} = \sum_{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk E_{n\alpha} \hat{C}_{nk\alpha}^\dagger \hat{C}_{nk\alpha} \quad (2.74)$$

となり、結局、非摂動ハミルトニアンは時間に依存しないことがわかる。また、2次元場の演算子 $\hat{\Phi}_{\alpha}(\mathbf{r}, t)$ の展開は

$$\hat{\Phi}_{\alpha}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-i\omega_{n\alpha}t} \hat{C}_{nk\alpha} v_{nk}(\mathbf{r}) \quad (2.75)$$

となる。

2.4 Semenoff モデル

グラフェンの結晶格子は六角形を平面的に敷き詰めた二カム構造を持つ。本節では、まず、最隣接近似の下でタイトバインディングハミルトニアンがディラック型で書けることを示す [39, 59]。次に、グラフェンが強磁場下に置かれた場合において、2次元ディラック場をランダウ準位の波動関数で展開することで、2次元ディラックハミルトニアンが対角化されることを示す [12]。

図 2.1 にグラフェン格子の基本的構造を示した。 a は格子定数であり、その値は $a \approx 2.46 \text{ \AA}$ である。 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ は基本格子ベクトルであり、それぞれ

$$\mathbf{a}_1 = a \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right), \quad \mathbf{a}_2 = a \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right) \quad (2.76)$$

で定義される。 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ は隣り合う格子点の位置を表すベクトルであり、

それぞれ、

$$\mathbf{b}_1 = \frac{a}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad \mathbf{b}_2 = \frac{a}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad \mathbf{b}_3 = \frac{a}{\sqrt{3}} (-1, 0) \quad (2.77)$$

で定義される。グラフェンの全ての格子点はサイト A 及びサイト B に分けることができ、サイト A の全ての格子点は

$$\mathbf{A} = n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2, \quad (n_1, n_2 \text{ は整数}) \quad (2.78)$$

で定義される格子ベクトルによって表すことができる。同様にサイト B の全ての格子点は

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{b}_1 \quad (2.79)$$

で定義される格子ベクトルによって表すことができる。また、図 2.2 にグラフェンの逆格子空間におけるブリルアンゾーンを示した。 $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ は逆格子ベクトルであり、

$$\mathbf{R}_1 = \frac{4\pi}{\sqrt{3}a} (1, 0), \quad \mathbf{R}_2 = \frac{4\pi}{\sqrt{3}a} \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad (2.80)$$

で定義される。ブリルアンゾーンの各頂点 I, II, III, IV, V, VI の座標は、それぞれ、

$$\begin{aligned} & \frac{4\pi}{3a} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right), \quad \frac{4\pi}{3a} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right), \quad \frac{4\pi}{3a} (0, -1), \\ & \frac{4\pi}{3a} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right), \quad \frac{4\pi}{3a} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right), \quad \frac{4\pi}{3a} (0, 1) \end{aligned} \quad (2.81)$$

である。

Wallace によると、ハニカム格子における 2 次元電子系のエネルギーバンドは、最隣接近似を用いた場合、

$$E_{\pm}(\mathbf{k}) = \pm t_G \sqrt{3 + f(\mathbf{k})} \quad (2.82)$$

$$f(\mathbf{k}) = 2 \cos(\sqrt{3}k_y a) + 4 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_y a\right) \cos\left(\frac{3}{2}k_x a\right) \quad (2.83)$$

となる。ここで、 t_G は最隣接の格子点間における電子のホッピングエネルギーであり、その値は $t_G \approx 2.8(\text{eV})$ 、 $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$ は波数ベクトルである。図 2.3 に Wallace によるエネルギーバンド (2.82) を $a = 1$ 、 $t_G = 1$ と置いて 3次元プロットした。図 2.3 からエネルギーバンドの周期性及び六角形のブリルアンゾーンの頂点でバンドギャップが近づくことが読み取れる。図 2.4 からブリルアンゾーンの頂点でバンドギャップが零となっていることが分かる。さらに、ブリルアンゾーンの頂点は、その周りのバンド構造が線形に近似できることから、ディラックポイントと呼ばれている。

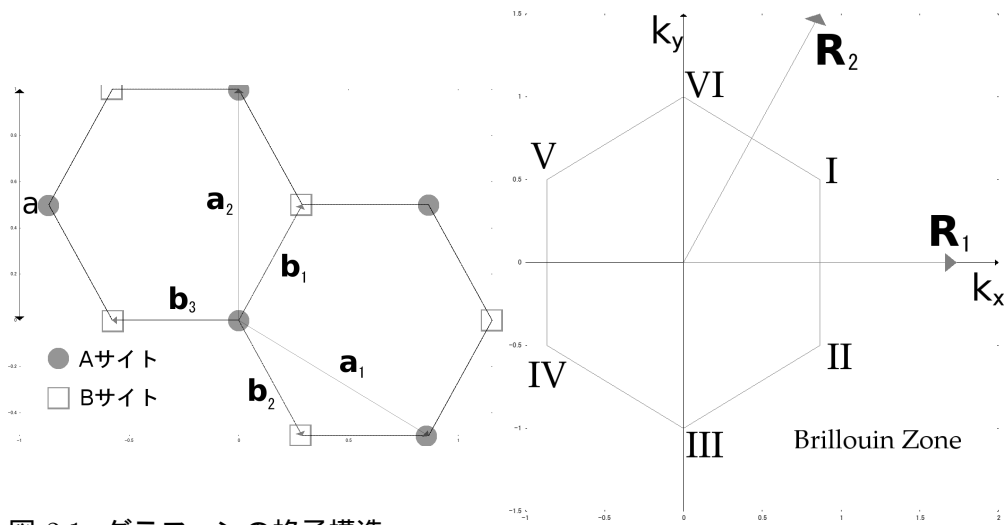


図 2.1: グラフェンの格子構造
 a は格子定数

図 2.2: グラフェンの逆格子空間における第1ブリルアンゾーン

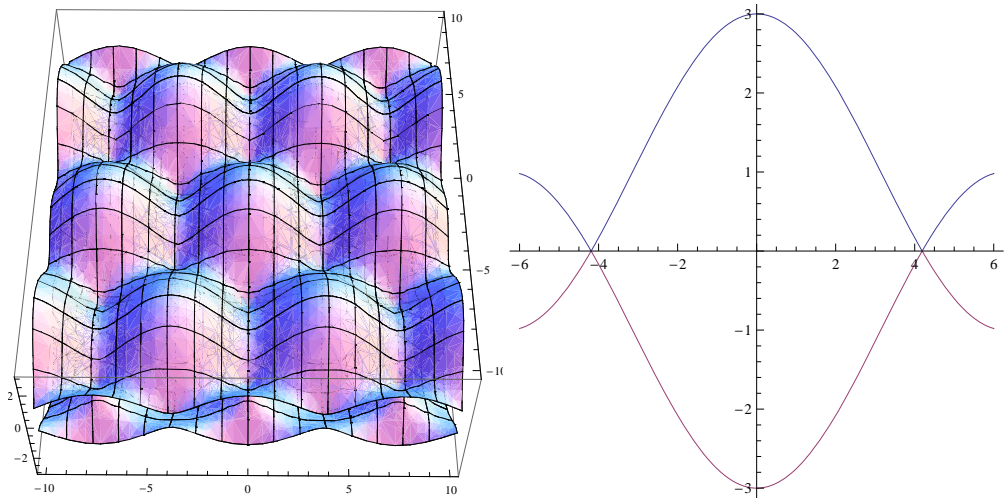


図 2.3: グラフェン上の2次元電子系のエネルギーバンド
格子定数 $a = 1$ 、ホッピングエネルギー $t_G = 1$ としている

図 2.4: ブリルアンゾーンの頂点付近のエネルギーバンド
格子定数 $a = 1$ 、ホッピングエネルギー $t_G = 1$ としている。

2.4.1 グラフェンにおける2次元ディラックハミルトニアン タイトバインディングハミルトニアン

電子が格子点上に強く束縛されているような系において、電子の移動が最も近くの格子点間でのみ行われるとする仮定を、最隣接近似タイトバインディングモデルと呼ぶ。このモデルを用いると、グラフェンのハミルトニアンは

$$H = t_G \sum_{\mathbf{A}, j} \left\{ \hat{C}^\dagger(\mathbf{A}) \hat{D}(\mathbf{A} + \mathbf{b}_j) + \hat{D}^\dagger(\mathbf{A} + \mathbf{b}_j) \hat{C}(\mathbf{A}) \right\} \quad (2.84)$$

で与えられる。ここで、 $\hat{C}(\mathbf{A})$ は \mathbf{A} で指定された格子点上にある電子を消滅させる演算子であり、 $\hat{D}(\mathbf{A} + \mathbf{b}_j)$ は $\mathbf{A} + \mathbf{b}_j$ で指定された格子点上にある電子を消滅させる演算子である。各生成消滅演算子のフーリエ変換

$$\hat{C}(\mathbf{A}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\Omega} d^2 \mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}} \hat{C}(\mathbf{k}) \quad (2.85)$$

$$\hat{D}(\mathbf{A} + \mathbf{b}_j) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\Omega} d^2 \mathbf{k}' e^{i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{b}_j)} \hat{D}(\mathbf{k}') \quad (2.86)$$

で定義する。これらフーリエ変換 $\hat{C}(\mathbf{k}), \hat{D}(\mathbf{k}')$ を用いるとハミルトニアンは

$$H = t_G \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_j \int_{\Omega} d^2 \mathbf{k} \left\{ e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{b}_j} \hat{C}^\dagger(\mathbf{k}) \hat{D}(\mathbf{k}) + e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{b}_j} \hat{D}^\dagger(\mathbf{k}) \hat{C}(\mathbf{k}) \right\} \quad (2.87)$$

となる。ここで、エネルギーバンドを与えるエネルギー固有値を

$$\eta(\mathbf{k}) = t_G \sum_j e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{b}_j} \quad (2.88)$$

と定義すると、ハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\Omega} d^2 \mathbf{k} \left[\hat{C}^\dagger(\mathbf{k}), \hat{D}^\dagger(\mathbf{k}) \right] \begin{bmatrix} 0 & \eta(\mathbf{k}) \\ \eta^*(\mathbf{k}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{C}(\mathbf{k}) \\ \hat{D}(\mathbf{k}) \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

となり、2行2列の行列で書くことができる。

ディラックポイントでのテイラー展開

最隣接近似タイトバインディングモデルから得たハミルトニアンをディラックポイントの周辺でテイラー展開する。あるディラックポイントを指すベクトルを q とする。ハミルトニアンを $k = q$ 周りでテイラー展開するために原点をディラックポイント上に移動する。すなわち、 $k \rightarrow k' = k + q$ と変数変換すると、ハミルトニアンは、

$$H = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\Omega} d^2\mathbf{k} \left[\hat{C}^\dagger(\mathbf{k} - \mathbf{q}), \hat{D}^\dagger(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \right] \mathcal{H} \begin{bmatrix} \hat{C}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \\ \hat{D}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

となる。ここでハミルトニアン密度 \mathcal{H} を

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} 0 & \eta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \\ \eta^*(\mathbf{k} - \mathbf{q}) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

と定義した。このとき $\eta(\mathbf{k} - \mathbf{q})$ を $k = 0$ 周りでテイラー展開し、1次の項までをとると、 $\eta(\mathbf{k} - \mathbf{q})$ は、

$$\eta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) = t_G \sum_j \left(1 + ib_{jx}k_x + ib_{jy}k_y \right) e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{b}_j} \quad (2.92)$$

となる。ここで、ブリルアンゾーンの頂点の組 I, III, V 及び II, IV, VI は同等であるから、ディラックポイントは2種類を考えれば十分である。これらは K 点及び K' 点と呼ばれている。我々は K 点及び K' 点として、それぞれ頂点 I 及び頂点 II を採用する。

K 点での展開

K 点としてブリルアンゾーンの頂点 I を採用したため、逆格子空間における K 点の位置ベクトル \mathbf{q}_K は

$$\mathbf{q}_K = \frac{4\pi}{3a} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right) \quad (2.93)$$

であるから、これを $\eta(\mathbf{k} - \mathbf{q})$ の展開式 (2.92) へ代入すると、

$$\eta(\mathbf{k} - \mathbf{q}_K) = v_F \left\{ \left(-i\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \hbar k_x + \left(i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \right) \hbar k_y \right\} \quad (2.94)$$

を得る。ここで、 v_F はフェルミ速度であり、

$$v_F = \frac{-t_G a \sqrt{3}}{2\hbar} \quad (2.95)$$

と定義した。これをハミルトニアン密度 (2.91) へ代入すると

$$\mathcal{H}_K = v_F \left[\left(\frac{1}{2}\sigma^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma^1 \right) \hbar k_x + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma^2 - \frac{1}{2}\sigma^1 \right) \hbar k_y \right] \quad (2.96)$$

となる。ここで、 σ^j はパウリ行列

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.97)$$

である。パウリ行列の性質より

$$\sigma^1 \frac{-\sqrt{3}}{2} + \sigma^2 \frac{1}{2} = e^{-i\frac{5\pi}{12}\sigma^3} \sigma^1 e^{i\frac{5\pi}{12}\sigma^3} \quad (2.98)$$

また、

$$\sigma^2 \frac{-\sqrt{3}}{2} - \sigma^1 \frac{1}{2} = e^{-i\frac{5\pi}{12}\sigma^3} \sigma^2 e^{i\frac{5\pi}{12}\sigma^3} \quad (2.99)$$

であるから、ハミルトニアン密度は

$$\mathcal{H}_K = v_F e^{-i\frac{5\pi}{12}\sigma^3} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hbar \mathbf{k} e^{i\frac{5\pi}{12}\sigma^3} \quad (2.100)$$

と書くことができる。ここで、 $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2)$ とした。ハミルトニアン密度 \mathcal{H}_K をハミルトニアン (2.90) へ代入すると、

$$H_K = \frac{v_F}{(2\pi)^2} \int_{\Omega} d^2\mathbf{k} \left[\hat{C}^\dagger(\mathbf{k} - \mathbf{q}_K), \hat{D}^\dagger(\mathbf{k} - \mathbf{q}_K) \right] \times e^{-i\frac{5\pi}{12}\sigma^3} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hbar\mathbf{k} e^{i\frac{5\pi}{12}\sigma^3} \begin{bmatrix} \hat{C}(\mathbf{k} - \mathbf{q}_K) \\ \hat{D}(\mathbf{k} - \mathbf{q}_K) \end{bmatrix} \quad (2.101)$$

を得る。ここで、新たに演算子 $\Psi_K(\mathbf{k})$ を

$$\Psi_K(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} \psi_{K,1}(\mathbf{k}) \\ \psi_{K,2}(\mathbf{k}) \end{bmatrix} = e^{i\frac{5\pi}{12}\sigma^3} \begin{bmatrix} \hat{C}(\mathbf{k} - \mathbf{q}_K) \\ \hat{D}(\mathbf{k} - \mathbf{q}_K) \end{bmatrix} \quad (2.102)$$

と定義する。演算子 $\Psi_K(\mathbf{k})$ を用いればハミルトニアン

$$H_K = \frac{v_F}{(2\pi)^2} \int_{\Omega} d^2\mathbf{k} \Psi_K^\dagger(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \hbar\mathbf{k} \cdot \Psi_K(\mathbf{k}) \quad (2.103)$$

を得る。これは運動量表示であるから逆フーリエ変換

$$\Psi_K(\mathbf{k}) = \int d^2\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \Psi_K(\mathbf{r})$$

$$\Psi_K(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} \psi_{K,1}(\mathbf{r}) \\ \psi_{K,2}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} \quad (2.104)$$

を用いて位置座標表示のハミルトニアンを得る。

演算子 $\Psi_K(\mathbf{k})$ の逆フーリエ変換 (2.104) を運動量表示のハミルトニアン (2.103) へ代入すると、位置座標表示のハミルトニアン

$$H_K = v_F \int d^2\mathbf{r} \Psi_K^\dagger(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot (-i\hbar\nabla) \cdot \Psi_K(\mathbf{r}) \quad (2.105)$$

を得る。

K' 点での展開

同様に K' 点の周辺で展開する。 K' 点としてブリルアンゾーンの頂点 II を採用したため、逆格子空間における K' 点の位置ベクトル $\mathbf{q}_{K'}$ は

$$\mathbf{q}_{K'} = \frac{4\pi}{3a} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right) \quad (2.106)$$

である。よって、 $\eta(\mathbf{k} - \mathbf{q}_{K'})$ は

$$\eta(\mathbf{k} - \mathbf{q}_{K'}) = v_F \left\{ \left(-i\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \hbar k_x + \left(-i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right) \hbar k_y \right\} \quad (2.107)$$

となる。これをハミルトニアン密度 (2.91) へ代入すると、

$$\mathcal{H}_{K'} = v_F e^{-i\frac{5\pi}{12}\sigma^3} \boldsymbol{\sigma}^* \cdot \hbar \mathbf{k} e^{i\frac{5\pi}{12}\sigma^3} \quad (2.108)$$

となる。ここで新たな演算子 $\Psi_{K'}(\mathbf{k})$ を

$$\Psi_{K'}(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} \psi_{K',1}(\mathbf{k}) \\ \psi_{K',2}(\mathbf{k}) \end{bmatrix} = e^{i\frac{5\pi}{12}\sigma^3} \begin{bmatrix} \hat{C}(\mathbf{k} - \mathbf{q}_{K'}) \\ \hat{D}(\mathbf{k} - \mathbf{q}_{K'}) \end{bmatrix} \quad (2.109)$$

で定義する。この演算子 $\Psi_{K'}(\mathbf{k})$ を用いると運動量表示のハミルトニアン $\mathcal{H}_{K'}$ は

$$H_{K'} = \frac{v_F}{(2\pi)^2} \int_{\Omega} d^2\mathbf{k} \Psi_{K'}^\dagger(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\sigma}^* \cdot \hbar \mathbf{k} \cdot \Psi_{K'}(\mathbf{k}) \quad (2.110)$$

となる。ここで、演算子 $\Psi_{K'}(\mathbf{k})$ の逆フーリエ変換 $\Psi_{K'}(\mathbf{r})$ を

$$\begin{aligned} \Psi_{K'}(\mathbf{k}) &= \int d^2\mathbf{r} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \Psi_{K'}(\mathbf{r}) \\ \Psi_{K'}(\mathbf{r}) &= \begin{bmatrix} \psi_{K',1}(\mathbf{r}) \\ \psi_{K',2}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.111)$$

と定義する。この逆フーリエ変換 $\Psi_{K'}(\mathbf{r})$ を用いると位置座標表示のハミルトニアン

$$H_{K'} = v_F \int d^2\mathbf{r} \Psi_{K'}^\dagger(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\sigma}^* \cdot (-i\hbar \nabla) \cdot \Psi_{K'}(\mathbf{r}) \quad (2.112)$$

を得る。

グラフェンにおける2次元ディラックハミルトニアン

2つのディラックポイントにおいてテイラー展開したハミルトニアン(2.105)(2.112)は2次元での質量を零としたディラック場のハミルトニアンと同じ形をしている。グラフェンのハミルトニアンは式(2.105)(2.112)から、

$$\begin{aligned} H &= H_K + H'_K \\ &= v_F \int d^2\mathbf{r} \Psi_K^\dagger(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot (-i\hbar \nabla) \cdot \Psi_K(\mathbf{r}) \\ &\quad + v_F \int d^2\mathbf{r} \Psi_{K'}^\dagger(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\sigma}^* \cdot (-i\hbar \nabla) \cdot \Psi_{K'}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2.113)$$

で得られる [59]。これは Neto 等のレビューで紹介されているハミルトニアンである [59]。Semenoff によって導かれたハミルトニアンを得るためには、運動量空間での場の演算子を

$$\Psi_K(\mathbf{k}) = \sqrt{v_F} \exp \left[-i \frac{\pi}{3} \sigma^3 \right] \begin{bmatrix} \hat{C}(\mathbf{k} - \mathbf{q}_K) \\ \hat{D}(\mathbf{k} - \mathbf{q}_K) \end{bmatrix} \quad (2.114)$$

と定義し、その逆フーリエ変換を

$$\Psi_K(\mathbf{k}) = \int d\mathbf{r} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \Psi_K(\mathbf{r}) \quad (2.115)$$

と定義する。これらを用いると Semenoff が導いたハミルトニアン

$$H_K = \int d^2\mathbf{r} \bar{\Psi}_K(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\gamma} \cdot (-i\hbar \nabla) \cdot \Psi_K(\mathbf{r}) \quad (2.116)$$

を得る [39]。ここで、 $\gamma = (\gamma^1, \gamma^2)$ は、2次元におけるガンマ行列 $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2$ であり、

$$\gamma^0 = \sigma^3, \quad \gamma^1 = i\sigma^1, \quad \gamma^2 = i\sigma^2 \quad (2.117)$$

と定義した。また、演算子 $\bar{\Psi}_K(\mathbf{k})$ は $\Psi_K(\mathbf{k})$ に共役な演算子 $\bar{\Psi}_K(\mathbf{k}) = \gamma^0 \Psi_K^\dagger(\mathbf{k})$ である。

2.4.2 強磁場下におけるグラフェンのハミルトニアン

ハミルトニアン

式 (2.113) で得られたグラフェンのハミルトニアンから、静磁場下に置かれたグラフェンのハミルトニアンを相互作用描像に基づいて書き下す。面に垂直な静磁場が印加されたグラフェン上の2次元電子多体系のハミルトニアンを

$$H_0 = v_F \sum_{j=1}^2 \sum_{\mu=1}^4 \sum_{\nu=1}^4 \int d^2\mathbf{r} \hat{\psi}_\mu^\dagger(\mathbf{r}, t) \Sigma_{\mu\nu}^j \pi_j \hat{\psi}_\nu(\mathbf{r}, t) \quad (2.118)$$

とする。このハミルトニアン H_0 がグラフェン2次元電子系における演算子の時間発展を決める。4成分からなる場の演算子 $\hat{\psi}_\mu(\mathbf{r}, t)$ は

$$(\hat{\psi}_1(\mathbf{r}, t), \hat{\psi}_2(\mathbf{r}, t), \hat{\psi}_3(\mathbf{r}, t), \hat{\psi}_4(\mathbf{r}, t)) \equiv (\hat{\Psi}_{K,\uparrow}(\mathbf{r}, t), \hat{\Psi}_{K,\downarrow}(\mathbf{r}, t), \hat{\Psi}_{K',\uparrow}(\mathbf{r}, t), \hat{\Psi}_{K',\downarrow}(\mathbf{r}, t)) \quad (2.119)$$

と定義した。 K, K' はディラックポイント、 \uparrow, \downarrow は Semenoff 擬スピンである。また、場の演算子 $\hat{\psi}_\mu(\mathbf{r}, t), \hat{\psi}_\mu^\dagger(\mathbf{r}, t)$ は同時刻正準反交換関係

$$\{\hat{\psi}_\mu(\mathbf{r}, t), \hat{\psi}_{\mu'}^\dagger(\mathbf{r}', t)\} = \delta_{\mu,\mu'} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.120)$$

を満たすと仮定する。 $\Sigma = (\Sigma^1, \Sigma^2, \Sigma^3)$ はパウリ行列 $\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3$ を用いて

$$\Sigma^1 \equiv \begin{pmatrix} \sigma^1 & 0 \\ 0 & \sigma^1 \end{pmatrix}, \quad \Sigma^2 \equiv \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & -\sigma^2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma^3 \equiv \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & -\sigma^3 \end{pmatrix} \quad (2.121)$$

と定義した。ここで静磁場下においては、ハミルトニアン²の微分演算子 $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ がランダウゲージのベクトルポテンシャル $\mathbf{A} = (0, Bx_1, 0)$ を用いて

$$\pi_j \equiv -i\hbar\partial_j + \frac{e}{c}A_j \quad (2.122)$$

と書ける。ここで電子の電荷は $-e$ とした。

これらを用いると、ハミルトニアン²の非摂動項は

$$\begin{aligned} H_0 = v_F \sum_{\mu=1}^4 \sum_{\nu=1}^4 \left[\Sigma_{\mu\nu}^1 \int d^2\mathbf{r} \hat{\psi}_\mu^\dagger(\mathbf{r}, t) (-i\hbar\partial_1) \hat{\psi}_\nu(\mathbf{r}, t) \right. \\ \left. + \Sigma_{\mu\nu}^2 \int d^2\mathbf{r} \hat{\psi}_\mu^\dagger(\mathbf{r}, t) (-i\hbar\partial_2) \hat{\psi}_\nu(\mathbf{r}, t) \right. \\ \left. + \Sigma_{\mu\nu}^3 \frac{eB}{c} \int d^2\mathbf{r} \hat{\psi}_\mu^\dagger(\mathbf{r}, t) x_1 \hat{\psi}_\nu(\mathbf{r}, t) \right] \quad (2.123) \end{aligned}$$

となる。

場の演算子 $\hat{\psi}_\mu(\mathbf{r}, t)$ をランダウ準位の波動関数 $v_{n,k}(\mathbf{r})$ を用いて

$$\hat{\psi}_\mu(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \sum_{n=0}^{\infty} \hat{a}_\mu(n, k, t) v_{n,k}(\mathbf{r}) \quad (2.124)$$

と展開する。ここで、用いたベクトルポテンシャルが $\mathbf{A} = (0, Bx_1, 0)$ であるから、ランダウ準位の波動関数 $v_{n,k}(\mathbf{r})$ は、

$$v_{n,k}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ikx_2} u_n(x_1 + l^2 k) \quad (2.125)$$

である。波動関数 $u_n(x)$ の定義は (2.59) で与えられている。

このときハミルトニアンは

$$H_0 = \int_{-\infty}^{\infty} dk \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \hat{\mathbf{a}}^\dagger(n, k, t) \Sigma^2 \hat{\mathbf{a}}(n, k, t) \quad (2.126)$$

となる。ここで、

$$\epsilon_n \equiv v_F \sqrt{\frac{2\hbar e B}{c}} \sqrt{n} \quad (2.127)$$

と定義し、ベクトル $\hat{\mathbf{a}}(n, k, t)$ は

$$\hat{\mathbf{a}}(n, k, t) = \begin{bmatrix} \hat{a}_1(n-1, k, t) \\ \hat{a}_2(n, k, t) \\ \hat{a}_3(n, k, t) \\ \hat{a}_4(n-1, k, t) \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{a}}^\dagger(n, k, t) = \left[\hat{a}_1^\dagger(n-1, k, t), \hat{a}_2^\dagger(n, k, t), \hat{a}_3^\dagger(n, k, t), \hat{a}_4^\dagger(n-1, k, t) \right] \quad (2.128)$$

と定義した。

H_0 の対角化

式 (2.126) で得たハミルトニアンを対角化させるユニタリー演算子 U は

$$U = e^{-i\frac{\pi}{4}\Sigma^1} \quad (2.129)$$

である。このユニタリー演算子 U を用いると

$$\hat{\mathbf{a}}^\dagger(n, k, t) \Sigma^2 \hat{\mathbf{a}}(n, k, t) = \hat{\mathbf{a}}^\dagger(n, k, t) U^{-1} \Sigma^3 U \hat{\mathbf{a}}(n, k, t) \quad (2.130)$$

となる。ここで、新たなフェルミ演算子

$$\begin{bmatrix} \hat{c}_1(n, k, t) \\ \hat{c}_2(n, k, t) \\ \hat{c}_3(n, k, t) \\ \hat{c}_4(n, k, t) \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{c}}(n, k, t) = U\hat{\mathbf{a}}(n, k, t) \quad (2.131)$$

を導入する。これらのフェルミ演算子 $c_\mu(n, k, t)$ は同時刻正準反交換関係

$$\left\{ \hat{c}_\mu(n, k, t), \hat{c}_{\mu'}^\dagger(n', k', t) \right\} = \delta_{\mu, \mu'} \delta_{n, n'} \delta_{k, k'} \quad (2.132)$$

満たすと仮定する。また、 $\hat{c}_\mu(n, k, t)$ は $n = 0$ において、

$$\hat{c}_1(0, k, t) + i\hat{c}_2(0, k, t) = 0 \quad (2.133)$$

$$i\hat{c}_3(0, k, t) + \hat{c}_4(0, k, t) = 0 \quad (2.134)$$

で結びついていると仮定する。

この新しいフェルミ演算子 $\hat{c}_\mu(n, k, t)$ を用いるとハミルトニアン H_0 は

$$H_0 = \int_{-\infty}^{\infty} dk \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mu=1}^4 \Sigma_{\mu\mu}^3 \epsilon_n \hat{c}_\mu^\dagger(n, k, t) \hat{c}_\mu(n, k, t) \quad (2.135)$$

と対角化される。

フェルミ演算子の時間依存性

演算子の時間発展はハイゼンベルグ方程式で表されるから、 $\hat{c}_\mu(n, k, t)$ の時間発展は

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t \hat{c}_\mu(n, k, t) &= \left[\hat{c}_\mu(n, k, t), H_0 \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dk' \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{\mu'=1}^4 \Sigma_{\mu'\mu'}^3 \epsilon_{n'} \left[\hat{c}_\mu(n, k, t), \hat{c}_{\mu'}^\dagger(n', k', t) \hat{c}_{\mu'}(n', k', t) \right] \end{aligned} \quad (2.136)$$

ここで、フェルミ演算子 $\hat{c}_\mu(n, k, t)$ は同時刻正準反交換関係 (2.132) を満たすことより、式中の交換子積は

$$\left[\hat{c}_\mu(n, k, t), \hat{c}_{\mu'}^\dagger(n', k', t) \hat{c}_{\mu'}(n', k', t) \right] = \delta_{\mu, \mu'} \delta_{n, n'} \delta_{k, k'} \hat{c}_{\mu'}(n', k', t) \quad (2.137)$$

となる。よって、ハイゼンベルグ方程式は

$$\begin{aligned} i\hbar \partial_t \hat{c}_\mu(n, k, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dk' \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{\mu'=1}^4 \Sigma_{\mu' \mu'}^3 \epsilon_{n'} \delta_{\mu, \mu'} \delta_{n, n'} \delta_{k, k'} \hat{c}_{\mu'}(n', k', t) \\ &= \Sigma_{\mu \mu}^3 \epsilon_n \hat{c}_\mu(n, k, t) \end{aligned} \quad (2.138)$$

となり、 $\hat{c}_\mu(n, k, t)$ の時間依存性

$$\hat{c}_\mu(n, k, t) = \exp[-i \Sigma_{\mu \mu}^3 \omega_n \cdot t] \hat{c}_\mu(n, k) \quad (2.139)$$

を得る。ここで、振動数 ω_n は

$$\omega_n \equiv \frac{\epsilon_n}{\hbar} \quad (2.140)$$

と定義した。

対角化されたハミルトニアン

式 (2.139) で得たフェルミ演算子の時間依存性を (2.135) へ代入することにより、ハミルトニアンは対角化された形

$$H_0 = \int_{-\infty}^{\infty} dk \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mu=1}^4 \Sigma_{\mu \mu}^3 \epsilon_n \hat{c}_\mu^\dagger(n, k) \hat{c}_\mu(n, k) \quad (2.141)$$

を得る。Toyoda はここで得られたハミルトニアン及び ERM を用いて、グラフェンの整数量子ホール効果を説明した [12]。

第3章 電子数密度応答関数

マグネトプラズモンとは、電子系に与えられた外場としての電場によって励起された電子数密度の波動であった。この振動は非常に複雑であり厳密解を得ることは一般に困難である。そこで、線形応答理論を用いて近似する。

3.1 線形応答理論

系に外場が印加されたとき、応答として観測される物理量を近似的に得る方法として、線形応答理論は便利である [61, 69]。本節では、ハミルトニアンを非摂動項 $\hat{H}^{(0)}$ 及び外場の項 $\hat{H}^{(1)}(t)$ を用いて $\hat{H} = \hat{H}^{(0)} + \hat{H}^{(1)}(t)$ と書き、量子力学の描像から演算子についての線形応答公式を得る。また、大正準集団の理論より有限温度における線形応答を議論する。

3.1.1 正準形式での演算子における線形応答

ハイゼンベルグ描像の演算子と相互作用描像の演算子の関係から演算子形式での線形応答を調べる [70]。ハイゼンベルグ描像の演算子 $\hat{\Omega}_H(t)$ は相互作用描像の演算子 $\hat{\Omega}_I(t)$ 及び時間発展のユニタリー演算子 $V(t, t_0)$ を用いて、

$$\hat{\Omega}_H(t) = V^{-1}(t, t_0)\hat{\Omega}_I(t)V(t, t_0) \quad (3.1)$$

と書ける。このユニタリー演算子 $V(t, t_0)$ の時間発展の方程式は

$$i\hbar \frac{d}{dt}V(t, t_0) = \hat{H}_I^{(1)}(t)V(t, t_0) \quad (3.2)$$

とする。この方程式の解は形式的に

$$\begin{aligned} V(t, t_0) &= V(t_0, t_0) + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' \hat{H}_I^{(1)}(t') V(t', t_0) \\ &= I + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' \hat{H}_I^{(1)}(t') V(t', t_0) \end{aligned} \quad (3.3)$$

と書ける。 $I \equiv V(t_0, t_0)$ は単位演算子である。この形式解をそれ自身に繰り返し代入し、1次までの近似をとると

$$V(t, t_0) = I + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' \hat{H}_I^{(1)}(t') \quad (3.4)$$

を得る。このエルミート共役は

$$V^{-1}(t, t_0) = I - \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' \hat{H}_I^{(1)}(t') \quad (3.5)$$

であるから、これらを用いてハイゼンベルグ描像の演算子を書き下すと

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}_H(t) &= \left\{ I - \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' \hat{H}_I^{(1)}(t') \right\} \hat{\Omega}_I(t) \left\{ I + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' \hat{H}_I^{(1)}(t') \right\} \\ &= \hat{\Omega}_I(t) + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' \hat{\Omega}_I(t) \hat{H}_I^{(1)}(t') - \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' \hat{H}_I^{(1)}(t') \hat{\Omega}_I(t) + \dots \\ &= \hat{\Omega}_I(t) + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' \left[\hat{\Omega}_I(t), \hat{H}_I^{(1)}(t') \right] + \dots \end{aligned} \quad (3.6)$$

となる。1次の項までをとると、演算子に関する線形応答公式

$$\hat{\Omega}_H(t) = \hat{\Omega}_I(t) + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' \left[\hat{\Omega}_I(t), \hat{H}_I^{(1)}(t') \right] \quad (3.7)$$

を得る [70]。また、

$$\hat{\Omega}_S(t) = \int d^3\mathbf{x} \hat{\Omega}_S(\mathbf{x}, t) \quad (3.8)$$

として、 $\hat{\Omega}_S(t)$ の密度 $\hat{\Omega}_S(\mathbf{x}, t)$ を定義し、ハミルトニアン の摂動項が、c-数である外場 $\Phi_0(\mathbf{x}, t)$ を用いて

$$\hat{H}_S^{(1)}(t) = \int d^3\mathbf{x} \hat{\Omega}_S(\mathbf{x}, t) \Phi_0(\mathbf{x}, t) \quad (3.9)$$

と書かれるとする。このとき線形応答公式は

$$\hat{\Omega}_H(\mathbf{x}, t) = \hat{\Omega}_I(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{i\hbar} \int d^3\mathbf{x}' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \theta(t-t') \left[\hat{\Omega}_I(\mathbf{x}, t), \hat{\Omega}_I(\mathbf{x}', t') \right] \Phi_0(\mathbf{x}', t') \quad (3.10)$$

となる [70]。ここで、初期時刻を $t_0 = -\infty$ とした。

3.1.2 大正準集団における応答関数

有限温度における大正準集団での物理量の期待値は

$$\langle \hat{\Omega}_H(\mathbf{x}, t) \rangle = \frac{1}{Z} \text{Tr} \left\{ \hat{\rho}_G \hat{\Omega}_H(\mathbf{x}, t) \right\} \quad (3.11)$$

で定義される。 $\hat{\rho}_G$ は統計演算子、 Z は大分配関数であり、それぞれ、 $\hat{\rho}_G = e^{\beta \hat{H}^{(0)}}$ 、 $Z = \text{Tr} \{ e^{\beta \hat{H}^{(0)}} \}$ で与えられる。ここで、 $\beta = 1/k_B T$ であり、 k_B はボルツマン定数、 T は温度であり、 $\hat{H}^{(0)}$ は化学ポテンシャルを含むとする。また、記号 $\text{Tr} \{ \dots \}$ はトレースを表す。外場による物理量の揺らぎを

$$\delta \langle \hat{\Omega}_I(\mathbf{x}, t) \rangle = \langle \hat{\Omega}_H(\mathbf{x}, t) \rangle - \langle \hat{\Omega}_I(\mathbf{x}, t) \rangle \quad (3.12)$$

と定義すると、線形応答公式 (3.10) より、

$$\begin{aligned} \delta \langle \hat{\Omega}_I(\mathbf{x}, t) \rangle &= \frac{1}{i\hbar} \int d^3\mathbf{x}' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \theta(t-t') \left\langle \left[\hat{\Omega}_I(\mathbf{x}, t), \hat{\Omega}_I(\mathbf{x}', t') \right] \right\rangle \Phi_0(\mathbf{x}', t') \\ &= \frac{1}{\hbar} \int d^3\mathbf{x}' \int_{-\infty}^{\infty} dt' D(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \Phi_0(\mathbf{x}', t') \end{aligned} \quad (3.13)$$

を得る。ここで、 $D(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$ は応答関数と呼ばれ、

$$D(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \frac{1}{i} \theta(t - t') \left\langle \left[\hat{\Omega}_I(\mathbf{x}, t), \hat{\Omega}_I(\mathbf{x}', t') \right] \right\rangle \quad (3.14)$$

で定義される。

3.2 電子数密度応答関数

電子数密度について線形応答公式を書き下し、電子数密度応答関数を定義する。さらに場の演算子を x_3 方向と2次元電子系平面方向へ分離し、2次元電子数密度応答関数を定義する。

全粒子数演算子が式 (2.28) で与えられるから、電子数密度の演算子 $\hat{\rho}_\alpha(\mathbf{x}, t)$ は、第2量子化されたシュレディンガー場の演算子 $\hat{\Psi}_\alpha(\mathbf{x}, t)$ を用いて

$$\hat{\rho}_\alpha(\mathbf{x}, t) = \hat{\Psi}_\alpha^\dagger(\mathbf{x}, t) \hat{\Psi}_\alpha(\mathbf{x}, t) \quad (3.15)$$

と書ける。また、ハミルトニアンの変動項が式 (2.49) で与えられるから、大正準集団における線形応答公式 (3.13) より、電子数密度演算子の期待値の揺らぎ $\delta \langle \hat{\rho}(\mathbf{x}, t) \rangle$ は

$$\delta \langle \hat{\rho}(\mathbf{x}, t) \rangle = -\frac{e}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^3 \mathbf{x}' D^{(3D)}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') A_0(\mathbf{x}', t') \quad (3.16)$$

となる。ここで、 $D^{(3D)}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$ は3次元電子数密度応答関数であり、

$$D^{(3D)}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = -i\theta(t-t') \sum_{\alpha\alpha'} \left\langle \left[\hat{\Psi}_\alpha^\dagger(\mathbf{x}, t) \hat{\Psi}_\alpha(\mathbf{x}, t), \hat{\Psi}_{\alpha'}^\dagger(\mathbf{x}', t') \hat{\Psi}_{\alpha'}(\mathbf{x}', t') \right] \right\rangle \quad (3.17)$$

と定義する。記号 $\langle \dots \rangle$ は大正準集団での期待値を表す。

次に、シュレディンガー場の演算子 $\hat{\Psi}_\alpha(\mathbf{x}, t)$ を式 (2.52) を用いて分離すると、電子数密度応答関数 $D^{(3D)}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$ は、

$$D^{(3D)}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = |\chi(x_3)\chi(x'_3)|^2 \sum_{\alpha} \sum_{\alpha'} D_{\alpha\alpha'}^{(2D)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \quad (3.18)$$

と分離できる。ここで、 $D_{\alpha\alpha'}^{(2D)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$ を 2次元電子数密度応答関数と定義する。2次元電子数密度応答関数の具体的な形は

$$D_{\alpha\alpha'}^{(2D)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = -i\theta(t - t') \left\langle \left[\hat{\Phi}_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}, t) \hat{\Phi}_{\alpha}(\mathbf{r}, t), \hat{\Phi}_{\alpha'}^{\dagger}(\mathbf{r}', t') \hat{\Phi}_{\alpha'}(\mathbf{r}', t') \right] \right\rangle \quad (3.19)$$

である。よって2次元電子系では電子数密度の期待値の揺らぎ $\delta \langle \hat{\rho}(\mathbf{x}, t) \rangle$ を

$$\delta \langle \hat{\rho}(\mathbf{x}, t) \rangle = \frac{-e}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^3\mathbf{x}' |\chi(x_3)\chi(x'_3)|^2 \sum_{\alpha, \alpha'} D_{\alpha\alpha'}^{(2D)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') A_0(\mathbf{x}', t') \quad (3.20)$$

と書ける。

第4章 マグネトプラズモンの分散関係

本章では自己無撞着線形応答理論を用いてマグネトプラズモンの分散関係を求める [29–33]。自己無撞着線形応答理論では電磁場のダイナミクスをマクスウェル方程式により記述し、電子密度のダイナミクスを線形応答によって記述する。本章ではまず、自己無撞着線形応答近似 (Self-Consistent Linear Response Approximation) を用いて 2 次元電子系における自己無撞着線形応答方程式を導く。次に自己無撞着線形応答方程式から 2 次元電子系におけるマグネトプラズモンの分散関係を導出する。

4.1 自己無撞着線形応答理論

本節では自己無撞着線形応答理論に基づいて 2 次元電子系のマグネトプラズモン分散関係を与える方程式を導出する。2 次元電子系のスカラーポテンシャル $A_0(\mathbf{x}, t)$ は、クーロンゲージを用いると、ポアソン方程式

$$\nabla^2 A_0(\mathbf{x}, t) = \frac{-4\pi}{\epsilon} \rho(\mathbf{x}, t) \quad (4.1)$$

で記述される。 ϵ は誘電率、 $\rho(\mathbf{x}, t)$ は電荷密度である。ここで、ポアソン方程式 (4.1) では $\rho(\mathbf{x}, t)$ は与えられた量であり、 $A_0(\mathbf{x}, t)$ のダイナミクスは入っていない。このためマグネトプラズモンを記述するためにはポアソン方程式のみでは不十分である。ポアソン方程式 (4.1) のスカラーポテンシャル $A_0(\mathbf{x}, t)$ が電子密度の揺らぎ $\delta \langle \hat{\rho}(\mathbf{x}, t) \rangle$ によってのみ生じると仮定すれば式 (4.1) は

$$\nabla^2 A_0(\mathbf{x}, t) = \frac{4\pi e}{\epsilon} \delta \langle \hat{\rho}(\mathbf{x}, t) \rangle \quad (4.2)$$

となる。自己無撞着線形応答近似では、この電子密度の揺らぎ $\delta \langle \hat{\rho}(\mathbf{x}, t) \rangle$ を式 (3.20) で得た線形応答

$$\delta \langle \hat{\rho}(\mathbf{x}, t) \rangle = \frac{-e}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^3 \mathbf{x}' |\chi(x_3) \chi(x'_3)|^2 \sum_{\alpha, \alpha'} D_{\alpha\alpha'}^{(2D)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') A_0(\mathbf{x}', t') \quad (4.3)$$

で近似する。ここで、我々が知りたいのはマグネトプラズモンの分散関係であるから、虚数部分項が無視できるような場合について考察する。スピンの和をとった2次元電子数密度応答関数の実数部分を

$$D(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \sum_{\alpha\alpha'} \Re D_{\alpha\alpha'}^{(2D)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \quad (4.4)$$

と定義する。これを用いると電子数密度期待値の揺らぎ $\delta \langle \hat{\rho}(\mathbf{x}, t) \rangle$ は

$$\delta \langle \hat{\rho}(\mathbf{x}, t) \rangle = \frac{-e}{\hbar} \int dt' \int d^3 \mathbf{x}' |\chi(x_3) \chi(x'_3)|^2 D(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') A_0(\mathbf{x}', t') \quad (4.5)$$

となる。この電子数密度期待値の揺らぎ (4.5) 及びポアソン方程式 (4.2) をフーリエ変換することで、マグネトプラズモンの分散関係を与える方程式を導く。スカラーポテンシャル $A_0(\mathbf{x}, t)$ のフーリエ変換を

$$A_0(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2 \mathbf{p} \int dp_3 \int d\omega e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} + ip_3 x_3 - i\omega t} \tilde{A}_0(\mathbf{p}, p_3, \omega) \quad (4.6)$$

で定義する。ここで $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ である。電子数密度期待値の揺らぎ $\delta \langle \hat{\rho}(\mathbf{x}, t) \rangle$ のフーリエ変換を

$$\delta \langle \hat{\rho}(\mathbf{x}, t) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2 \mathbf{p} \int dp_3 \int d\omega e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} + ip_3 x_3 - i\omega t} \delta \langle \hat{\rho}(\mathbf{p}, p_3, \omega) \rangle \quad (4.7)$$

で定義する。電子系を構成する電子の x_3 方向の状態関数の絶対値の2乗 $|\chi(x_3)|^2$ のフーリエ変換を

$$|\chi(x_3)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dp_3 e^{ip_3 x_3} \sigma(p_3) \quad (4.8)$$

で定義する。2次元電子数密度応答関数 $D(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$ のフーリエ変換を

$$D(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int d^2\mathbf{p} \int d\omega e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')-i\omega(t-t')} D(\mathbf{p}, \omega) \quad (4.9)$$

で定義する。フーリエ変換 (4.6)(4.7) より、ポアソン方程式 (4.2) は

$$\begin{aligned} \nabla^2 \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2\mathbf{p} \int dp_3 \int d\omega e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}+ip_3x_3-i\omega t} \tilde{A}_0(\mathbf{p}, p_3, \omega) \\ = \frac{4\pi e}{\epsilon} \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2\mathbf{p} \int dp_3 \int d\omega e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}+ip_3x_3-i\omega t} \delta \langle \hat{\rho}(\mathbf{p}, p_3, \omega) \rangle \end{aligned} \quad (4.10)$$

となり、被積分関数を取り出すことで、

$$-(p^2 + p_3^2) \tilde{A}_0(\mathbf{p}, p_3, \omega) = \frac{4\pi e}{\epsilon} \delta \langle \hat{\rho}(\mathbf{p}, p_3, \omega) \rangle \quad (4.11)$$

を得る。 $p = |\mathbf{p}|$ である。スカラーポテンシャルのフーリエ変換 $\tilde{A}_0(\mathbf{p}, p_3, \omega)$ について整理して、

$$\tilde{A}_0(\mathbf{p}, p_3, \omega) = \frac{-4\pi e \delta \langle \hat{\rho}(\mathbf{p}, p_3, \omega) \rangle}{\epsilon(p^2 + p_3^2)} \quad (4.12)$$

を得る。また、フーリエ変換 (4.7)(4.8)(4.9) を用いると線形応答公式 (4.5) は

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2\mathbf{p} \int dp_3 \int d\omega e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}+ip_3x_3-i\omega t} \delta \langle \hat{\rho}(\mathbf{p}, p_3, \omega) \rangle \\
&= \frac{-e}{\hbar} \int d\mathbf{x}' \int dt' \frac{1}{2\pi} \int dp_3 e^{ip_3x_3} \sigma(p_3) \int dp_3'' e^{ip_3''x_3} \sigma(p_3'') \\
&\quad \times \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int d^2\mathbf{p} \int d\omega e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')-i\omega(t-t')} D(\mathbf{p}, \omega) \\
&\quad \times \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2\mathbf{p}' \int dp_3' \int d\omega' e^{i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{r}'+ip_3'x_3'-i\omega't'} \tilde{A}_0(\mathbf{p}', p_3', \omega') \\
&= \frac{-e}{\hbar} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int d^2\mathbf{p} \int dp_3 \int d\omega \int dp_3' \\
&\quad \times e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}+ip_3x_3-i\omega t} \sigma(p_3) \sigma(-p_3') D(\mathbf{p}, \omega) \tilde{A}_0(\mathbf{p}, p_3', \omega) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2\mathbf{p} \int dp_3 \int d\omega e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}+ip_3x_3-i\omega t} \\
&\quad \times \frac{-\sqrt{2\pi}e}{\hbar} \sigma(p_3) D(\mathbf{p}, \omega) \int dp_3' \sigma(-p_3') \tilde{A}_0(\mathbf{p}, p_3', \omega) \quad (4.13)
\end{aligned}$$

となる。被積分関数を取り出すことで、電子数密度期待値の揺らぎのフーリエ変換

$$\delta \langle \hat{\rho}(\mathbf{p}, p_3, \omega) \rangle = \frac{-\sqrt{2\pi}e}{\hbar} \sigma(p_3) D(\mathbf{p}, \omega) \int dp_3' \sigma(-p_3') \tilde{A}_0(\mathbf{p}, p_3', \omega) \quad (4.14)$$

を得る。ここで、電子数密度期待値の揺らぎのフーリエ変換 $\delta \langle \hat{\rho}(\mathbf{p}, p_3, \omega) \rangle$ の2次元成分を

$$\tilde{\rho}(\mathbf{p}, \omega) = \frac{-\sqrt{2\pi}e}{\hbar} D(\mathbf{p}, \omega) \int dp_3' \sigma(-p_3') \tilde{A}_0(\mathbf{p}, p_3', \omega) \quad (4.15)$$

と定義すれば、電子数密度期待値の揺らぎのフーリエ変換 $\delta \langle \hat{\rho}(\mathbf{p}, p_3, \omega) \rangle$ は

$$\delta \langle \hat{\rho}(\mathbf{p}, p_3, \omega) \rangle = \sigma(p_3) \tilde{\rho}(\mathbf{p}, \omega) \quad (4.16)$$

と分離できる。よってスカラーポテンシャルのフーリエ変換 $\tilde{A}_0(\mathbf{p}, p_3, \omega)$ は

$$\tilde{A}_0(\mathbf{p}, p_3, \omega) = \frac{-4\pi e\sigma(p_3)}{\epsilon(p^2 + p_3^2)} \tilde{\rho}(\mathbf{p}, \omega) \quad (4.17)$$

となり、これを式 (4.14) で得た電子数密度期待値の揺らぎのフーリエ変換へ代入することで、 $\tilde{\rho}(\mathbf{p}, \omega)$ に関する方程式

$$\tilde{\rho}(\mathbf{p}, \omega) = \frac{2(\sqrt{2\pi})^3 e^2}{\epsilon\hbar} D(\mathbf{p}, \omega) \int dp_3 \frac{\sigma(-p_3)\sigma(p_3)}{p^2 + p_3^2} \tilde{\rho}(\mathbf{p}, \omega) \quad (4.18)$$

が得られる。これが自己無撞着線形応答方程式である [32]。

式 (4.18) で得られた自己無撞着線形応答方程式を $\tilde{\rho}(\mathbf{p}, \omega)$ について整理すると

$$\left\{ 1 + \frac{2\sqrt{2\pi}e^2}{\hbar\epsilon} \Gamma(p) D(\mathbf{p}, \omega) \right\} \tilde{\rho}(\mathbf{p}, \omega) = 0 \quad (4.19)$$

となる。ここで、関数 $\Gamma(p)$ を

$$\Gamma(p) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dp_3 \frac{\sigma(-p_3)\sigma(p_3)}{p^2 + p_3^2} \quad (4.20)$$

と定義した。 $\tilde{\rho}(\mathbf{p}, \omega) = 0$ のとき、即ち密度の揺らぎが無いときはマグネトプラズモンが存在しないので、

$$\tilde{\rho}(\mathbf{p}, \omega) \neq 0 \quad (4.21)$$

とする。このとき式 (4.19) が成立するためには

$$-\frac{2\sqrt{2\pi}e^2}{\hbar\epsilon} \Gamma(p) D(\mathbf{p}, \omega) = 1 \quad (4.22)$$

であればよい。これが2次元電子系のマグネトプラズモンの分散関係を与える方程式である。この式 (4.22) へ2次元電子数密度応答関数のフーリエ変換 $D(\mathbf{p}, \omega)$ 及び関数 $\Gamma(p)$ の具体的な関数形を代入することで、マグネトプラズモンの分散関係が導出される。

4.2 マグネトプラズモンの分散関係

本節ではマグネトプラズモンの分散関係を導出する。まず、前節で導いたマグネトプラズモンの分散関係を与える式 (4.22) 中にある 2 次元電子数密度応答関数のフーリエ変換 $D(\mathbf{p}, \omega)$ 及び関数 $\Gamma(p)$ の具体的な関数形を求める。次に求めた関数形をマグネトプラズモンの分散関係を与える式 (4.22) に代入することで 2 次元電子系におけるマグネトプラズモンの分散関係を求める。

4.2.1 電子数密度応答関数のフーリエ変換

電子数密度応答関数の展開

2 次元電子数密度応答関数 $D_{\alpha\alpha'}^{(2D)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$ を展開する。2 次元場の演算子 $\hat{\Phi}_\alpha(\mathbf{r}, t)$ の展開 (2.75) を 2 次元電子数密度応答関数の定義 (3.19) へ適用すると、

$$\begin{aligned}
 & D_{\alpha\alpha'}^{(2D)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \\
 &= -i\theta(t-t') \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{n''=0}^{\infty} \sum_{n'''=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dk' \int_{-\infty}^{\infty} dk'' \int_{-\infty}^{\infty} dk''' \\
 &\quad \times \exp[i\{\omega_{n\alpha} - \omega_{n'\alpha}\}t] \exp[i\{\omega_{n''\alpha'} - \omega_{n'''\alpha'}\}t'] \\
 &\quad \times \left\langle \left[\hat{C}_{nk\alpha}^\dagger \hat{C}_{n'k'\alpha}, \hat{C}_{n''k''\alpha'}^\dagger \hat{C}_{n'''k'''\alpha'} \right] \right\rangle \\
 &\quad \times v_{nk}^*(\mathbf{r}) v_{n'k'}(\mathbf{r}) v_{n''k''}^*(\mathbf{r}') v_{n'''k'''}(\mathbf{r}')
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

となり、量子数 n, k にそくした形に書き下せる。電子数密度演算子の交換子積の期待値は 2 次元場の演算子 $\hat{\Phi}_\alpha(\mathbf{r}, t)$ によるものからフェルミ演算子 $\hat{C}_{nk\alpha}$ によるものへと書き直せる。

交換子積の計算

2次元電子数密度応答関数 $D_{\alpha\alpha'}^{(2D)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$ を展開した結果現れたフェルミ演算子の交換子積を計算する。

計算上簡単のために、フェルミ演算子を

$$\hat{C}_{nk\alpha}^\dagger = C_1^\dagger, \quad \hat{C}_{n'k'\alpha} = C_2, \quad \hat{C}_{n''k''\alpha'}^\dagger = C_3^\dagger, \quad \hat{C}_{n'''k'''\alpha'} = C_4 \quad (4.24)$$

と書く。フェルミ演算子 $\hat{C}_{nk\alpha}(t)$ の反交換関係 (2.64) は

$$\{C_i, C_j^\dagger\} = \delta(i, j) \quad (4.25)$$

と書けるから、式 (4.23) 中のフェルミ演算子の交換子積は

$$\begin{aligned} \left[C_1^\dagger C_2, C_3^\dagger C_4 \right] &= C_1^\dagger C_2 C_3^\dagger C_4 - C_3^\dagger C_4 C_1^\dagger C_2 \\ &= C_1^\dagger \left\{ \delta(2, 3) - C_3^\dagger C_2 \right\} C_4 - C_1^\dagger C_2 C_3^\dagger C_4 \\ &= \delta(2, 3) C_1^\dagger C_4 - C_1^\dagger C_3^\dagger C_2 C_4 - C_1^\dagger C_2 C_3^\dagger C_4 \\ &= \delta(2, 3) C_1^\dagger C_4 - C_3^\dagger C_1^\dagger C_4 C_2 - C_1^\dagger C_2 C_3^\dagger C_4 \\ &= \delta(2, 3) C_1^\dagger C_4 - C_3^\dagger \left\{ \delta(1, 4) - C_1^\dagger C_4 \right\} C_2 - C_1^\dagger C_2 C_3^\dagger C_4 \\ &= \delta(2, 3) C_1^\dagger C_4 - \delta(1, 4) C_3^\dagger C_2 \end{aligned} \quad (4.26)$$

となる [70]。

大正準集団での期待値

交換子積の大正準集団における期待値を計算する。 β 依存するフェルミ演算子について考察し、それを用いてフェルミ演算子の大正準集団での期待値を計算する。

まず、 β 依存性を持つフェルミ演算子 $\hat{C}_{nk\alpha}(\beta)$ について考察する。フェ

フェルミ演算子 $\hat{C}_{nk\alpha}(\beta)$ の β 依存性を

$$\hat{C}_{nk\alpha}(\beta) = \exp \left[-\beta \hat{H}^{(0)} \right] \hat{C}_{nk\alpha} \exp \left[\beta \hat{H}^{(0)} \right] \quad (4.27)$$

と定義する。これを β -ハイゼンベルグ描像と呼ぶことにする。 β -ハイゼンベルグ描像でのフェルミ演算子 $\hat{C}_{nk\alpha}(\beta)$ を β について微分することで、フェルミ演算子 $\hat{C}_{nk\alpha}(\beta)$ の β 発展の方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta} \hat{C}_{nk\alpha}(\beta) &= \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\exp \left[-\beta \hat{H}^{(0)} \right] \hat{C}_{nk\alpha} \exp \left[\beta \hat{H}^{(0)} \right] \right) \\ &= -\hat{H}^{(0)} \left[-\beta \hat{H}^{(0)} \right] \hat{C}_{nk\alpha} \exp \left[\beta \hat{H}^{(0)} \right] \\ &\quad + \left[-\beta \hat{H}^{(0)} \right] \hat{C}_{nk\alpha} \hat{H}^{(0)} \exp \left[\beta \hat{H}^{(0)} \right] \\ &= \exp \left[-\beta \hat{H}^{(0)} \right] \left\{ -\hat{H}^{(0)} \hat{C}_{nk\alpha} + \hat{H}^{(0)} \hat{C}_{nk\alpha} \right\} \exp \left[\beta \hat{H}^{(0)} \right] \\ &= \exp \left[-\beta \hat{H}^{(0)} \right] \left[\hat{C}_{nk\alpha}, \hat{H}^{(0)} \right] \exp \left[\beta \hat{H}^{(0)} \right] \end{aligned} \quad (4.28)$$

を得る。右辺の交換子積は、ハミルトニアン (2.74) を用いて

$$\left[\hat{C}_{nk\alpha}, \hat{H}^{(0)} \right] = \sum_{\alpha'} \sum_{n'=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk' E_{n\alpha} \left[\hat{C}_{nk\alpha}, \hat{C}_{n'k'\alpha'}^\dagger \hat{C}_{n'k'\alpha'} \right] \quad (4.29)$$

と書ける。フェルミ演算子 $\hat{C}_{nk\alpha}$ は正準反交換関係 (2.73) を満たすから、

$$\begin{aligned} \left[\hat{C}_{nk\alpha}, \hat{H}^{(0)} \right] &= \sum_{\alpha'} \sum_{n'=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk' E_{n'\alpha'} \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{nn'} \delta(k - k') \hat{C}_{n'k'\alpha'} \\ &= E_{n\alpha} \hat{C}_{nk\alpha} \end{aligned} \quad (4.30)$$

となり、結局、フェルミ演算子 $\hat{C}_{nk\alpha}(\beta)$ の β 発展の方程式は

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\beta}\hat{C}_{nk\alpha}(\beta) &= E_{n\alpha} \exp\left[-\beta\hat{H}^{(0)}\right] \hat{C}_{nk\alpha} \exp\left[\beta\hat{H}^{(0)}\right] \\ &= E_{n\alpha}\hat{C}_{nk\alpha}(\beta)\end{aligned}\tag{4.31}$$

となる。よってフェルミ演算子 $\hat{C}_{nk\alpha}(\beta)$ の β 依存性

$$\hat{C}_{nk\alpha}(\beta) = \exp[\beta E_{n\alpha}] \hat{C}_{nk\alpha}\tag{4.32}$$

を得る。

次に、フェルミ演算子の大き正準集団での期待値を計算する。大き正準集団における演算子の期待値の定義 (3.11) より、交換子の計算 (4.26) の結果現れたフェルミ演算子の大き正準集団における期待値は

$$\begin{aligned}\langle\hat{C}_i^\dagger\hat{C}_j\rangle &= \frac{1}{Z}\text{Tr}\left\{e^{\beta\hat{H}^{(0)}}\hat{C}_i^\dagger\hat{C}_j\right\} \\ &= \frac{1}{Z}\text{Tr}\left\{\hat{C}_i^\dagger\hat{C}_je^{\beta\hat{H}^{(0)}}\right\} \\ &= \frac{1}{Z}\text{Tr}\left\{\hat{C}_i^\dagger\exp e^{\beta\hat{H}^{(0)}}e^{-\beta\hat{H}^{(0)}}\hat{C}_je^{\beta\hat{H}^{(0)}}\right\} \\ &= \frac{1}{Z}\text{Tr}\left\{\hat{C}_i^\dagger e^{\beta\hat{H}^{(0)}}\hat{C}_j(\beta)\right\}\end{aligned}\tag{4.33}$$

と書ける。ここで、フェルミ演算子の β 依存性 (4.32) を用いると、

$$\begin{aligned}
\langle \hat{C}_i^\dagger \hat{C}_j \rangle &= \frac{1}{Z} \text{Tr} \left\{ \hat{C}_i^\dagger e^{\beta \hat{H}^{(0)}} e^{-\beta E_j} \hat{C}_j \right\} \\
&= e^{-\beta E_j} \frac{1}{Z} \text{Tr} \left\{ \hat{C}_i^\dagger e^{\beta \hat{H}^{(0)}} \hat{C}_j \right\} \\
&= e^{-\beta E_j} \frac{1}{Z} \text{Tr} \left\{ e^{\beta \hat{H}^{(0)}} \hat{C}_j \hat{C}_i^\dagger \right\} \\
&= e^{-\beta E_j} \frac{1}{Z} \text{Tr} \left\{ e^{\beta \hat{H}^{(0)}} \left[\delta(i, j) - \hat{C}_i^\dagger \hat{C}_j \right] \right\} \\
&= \delta(i, j) e^{-\beta E_j} \frac{1}{Z} \text{Tr} \left\{ e^{\beta \hat{H}^{(0)}} \right\} - e^{-\beta E_j} \frac{1}{Z} \text{Tr} \left\{ e^{\beta \hat{H}^{(0)}} \hat{C}_i^\dagger \hat{C}_j \right\} \\
&= \delta(i, j) e^{-\beta E_j} - e^{-\beta E_j} \langle \hat{C}_i^\dagger \hat{C}_j \rangle
\end{aligned} \tag{4.34}$$

となり、整理すると、大正準集団におけるフェルミ演算子の期待値

$$\begin{aligned}
\langle \hat{C}_i^\dagger \hat{C}_j \rangle &= \delta(i, j) \frac{\exp[-\beta E_j]}{1 + \exp[-\beta E_j]} \\
&= \delta(i, j) \frac{1}{\exp[\beta E_i] + 1} \\
&= \delta(i, j) f(E_i)
\end{aligned} \tag{4.35}$$

を得る。ここで、 $f(E_i)$ はフェルミ分布関数

$$f(E_i) = \frac{1}{\exp[\beta E_i] + 1} \tag{4.36}$$

である。

式 (4.35) で得たフェルミ演算子の大正準集団における期待値を交換子積 (4.26) へ適用すると、

$$\begin{aligned}
\left\langle \left[\hat{C}_1^\dagger \hat{C}_2, \hat{C}_3^\dagger \hat{C}_4 \right] \right\rangle &= \delta(2, 3) \langle \hat{C}_1^\dagger \hat{C}_4 \rangle - \delta(1, 4) \langle \hat{C}_3^\dagger \hat{C}_2 \rangle \\
&= \delta(1, 4) \delta(2, 3) \left\{ f(E_1) - f(E_2) \right\}
\end{aligned} \tag{4.37}$$

となり、交換子積の大正準集団における期待値

$$\begin{aligned} & \left\langle \left[\hat{C}_{nk\alpha}^\dagger \hat{C}_{n'k'\alpha}, \hat{C}_{n''k''\alpha}^\dagger \hat{C}_{n'''k'''\alpha'} \right] \right\rangle \\ & = \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{nn'''} \delta_{n'n''} \delta(k - k''') \delta(k' - k'') \left\{ f(E_i) - f(E_j) \right\} \end{aligned} \quad (4.38)$$

を得る。よって展開された2次元電子数密度応答関数(4.23)は

$$\begin{aligned} & D_{\alpha\alpha'}^{(2D)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \\ & = -i\theta(t - t') \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{n''=0}^{\infty} \sum_{n'''=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dk' \int_{-\infty}^{\infty} dk'' \int_{-\infty}^{\infty} dk''' \\ & \quad \times \exp\left[i\{\omega_{n\alpha} - \omega_{n'\alpha}\}t\right] \exp\left[i\{\omega_{n''\alpha'} - \omega_{n'''\alpha'}\}t'\right] \\ & \quad \times \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{nn'''} \delta_{n'n''} \delta(k - k''') \delta(k' - k'') \left\{ f(E_{n\alpha}) - f(E_{n'\alpha}) \right\} \\ & \quad \times v_{nk}(\mathbf{r}) v_{n'k'}(\mathbf{r}) v_{n''k''}(\mathbf{r}') v_{n'''\alpha'}(\mathbf{r}') \\ & = -i\theta(t - t') \delta_{\alpha\alpha'} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} \exp\left[i\{\omega_{n\alpha} - \omega_{n'\alpha}\}(t - t')\right] \left\{ f(E_{n\alpha}) - f(E_{n'\alpha}) \right\} \\ & \quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dk' v_{nk}^*(\mathbf{r}) v_{n'k'}(\mathbf{r}) v_{n'k'}^*(\mathbf{r}') v_{nk}(\mathbf{r}') \\ & = \delta_{\alpha\alpha'} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} \Theta_{nn'}(t - t') \left\{ f(E_{n\alpha}) - f(E_{n'\alpha}) \right\} \mathcal{M}_{nn'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \end{aligned} \quad (4.39)$$

となる。関数 $\Theta_{nn'}(t - t')$ 、 $\mathcal{M}_{nn'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ はそれぞれ、

$$\Theta_{nn'}(t - t') = -i\theta(t - t') \exp\left[i\{\omega_{n\alpha} - \omega_{n'\alpha}\}(t - t')\right] \quad (4.40)$$

$$\mathcal{M}_{nn'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dk' v_{nk}^*(\mathbf{r}) v_{n'k'}(\mathbf{r}) v_{n'k'}^*(\mathbf{r}') v_{nk}(\mathbf{r}') \quad (4.41)$$

と定義した。これらの関数 $\Theta_{nn'}(t - t')$ 、 $\mathcal{M}_{nn'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ をフーリエ変換の形にすることで、2次元電子数密度応答関数のフーリエ変換の具体的な関数形を導く [72]。

ステップ関数のフーリエ変換

まず、式 (4.40) で定義した関数 $\Theta_{nn'}(t-t')$ をフーリエ変換の形に書き下す。ステップ関数 $\theta(t-t')$ はフーリエ変換

$$\theta(t-t') = \frac{-1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega + i\nu} \quad (4.42)$$

によって定義される。ここで、 ν は正の微小量である。即ち $\nu \rightarrow +0$ とする。これを用いると関数 $\Theta_{nn'}(t-t')$ は

$$\begin{aligned} \Theta_{nn'}(t-t') &= -i\theta(t-t') \exp\left[i(\omega_{n\alpha} - \omega_{n'\alpha})(t-t')\right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega + i\nu} \exp\left[i(\omega_{n\alpha} - \omega_{n'\alpha})(t-t')\right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp\left[-i\{\omega - (\omega_{n\alpha} - \omega_{n'\alpha})\}(t-t')\right] \frac{1}{\omega + i\nu} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega(t-t')} \frac{1}{\omega + \omega_C(n-n') + i\nu} \end{aligned} \quad (4.43)$$

と書ける。ここで、

$$\Theta_{nn'}(\omega) = \frac{1}{\omega + \omega_C(n-n') + i\nu} \quad (4.44)$$

で定義される関数 $\Theta_{nn'}(\omega)$ を用いることで、関数 $\Theta_{nn'}(t-t')$ をフーリエ変換の形

$$\Theta_{nn'}(t-t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega(t-t')} \Theta_{nn'}(\omega) \quad (4.45)$$

に書き下せる。

波動関数のフーリエ変換

次に波動関数から成る関数 $\mathcal{M}_{nn'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ をフーリエ変換の形に書き下す。

2次元場の演算子 $\hat{\Phi}_\alpha(\mathbf{r}, t)$ の展開 (2.63) に用いられた 1 粒子波動関数 $v_{nk}(\mathbf{r})$ は、ランダウ準位の波動関数 (2.58) であるから、関数 $\mathcal{M}_{nn'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$

の波動関数を書き下すと

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{nn'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dk' e^{-ikx_1} u_n(x_2 - l^2 k) e^{ik'x_1} u_{n'}(x_2 - l^2 k') \\
&\quad \times e^{-ik'x'_1} u_{n'}(x'_2 - l^2 k') e^{ikx'_1} u_n(x'_2 - l^2 k) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dk' \exp[i(k' - k)(x_1 - x'_1)] \\
&\quad \times u_n(x_2 - l^2 k) u_{n'}(x_2 - l^2 k') u_{n'}(x'_2 - l^2 k') u_n(x'_2 - l^2 k)
\end{aligned} \tag{4.46}$$

と書ける。変数変換 $k' \rightarrow p_1 = k' - k$ を行くと、関数 $\mathcal{M}_{nn'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ は

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{nn'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp \exp[ip_1(x_1 - x'_1)] \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dk u_n(x_2 - l^2 k) u_{n'}(x_2 - l^2(k + p_1)) \\
&\quad \times u_{n'}(x'_2 - l^2(k + p_1)) u_n(x'_2 - l^2 k)
\end{aligned} \tag{4.47}$$

と指数関数の項と波動関数の項へ分離できる。ここで波動関数を新たな関数を

$$w_n(x) = u_n(lx) = N_n \exp\left[\frac{-x^2}{2}\right] H_n[x] \tag{4.48}$$

と定義する。ここで、規格化定数を

$$N_n = \frac{1}{\sqrt{2^n n! l \sqrt{\pi}}} \tag{4.49}$$

と置いた。これを用いると $M_{nn'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ は

$$\begin{aligned}
M_{nn'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp_1 \exp[ip_1(x_1 - x'_1)] \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dk w_n\left(\frac{x_2}{l} - lk\right) w_{n'}\left(\frac{x_2}{l} - lk - lp_1\right) \\
&\quad \times w_{n'}\left(\frac{x'_2}{l} - lk - lp_1\right) w_n\left(\frac{x'_2}{l} - lk\right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp_1 \exp[ip_1(x_1 - x'_1)] M_{nn'}\left(\frac{x_2}{l}, \frac{x'_2}{l}\right) \quad (4.50)
\end{aligned}$$

となる。ここで k についての積分 $M_{nn'}\left(\frac{x_2}{l}, \frac{x'_2}{l}\right)$ を

$$\begin{aligned}
M_{nn'}\left(\frac{x_2}{l}, \frac{x'_2}{l}\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} dk w_n\left(\frac{x_2}{l} - lk\right) w_{n'}\left(\frac{x_2}{l} - lk - lp_1\right) \\
&\quad \times w_{n'}\left(\frac{x'_2}{l} - lk - lp_1\right) w_n\left(\frac{x'_2}{l} - lk\right) \quad (4.51)
\end{aligned}$$

とした。計算を見やすくするため、無次元量 $\zeta, \zeta', \eta, \eta'$ を導入し、それぞれ

$$\zeta = \frac{x_2}{l}, \quad \zeta' = \frac{x'_2}{l}, \quad \eta = lp_1, \quad \eta' = lk \quad (4.52)$$

と定義する。これらを用いると積分 $M_{nn'}\left(\frac{x_2}{l}, \frac{x'_2}{l}\right)$ は

$$\begin{aligned}
M_{nn'}\left(\frac{x_2}{l}, \frac{x'_2}{l}\right) &= M_{nn'}(\zeta, \zeta') \\
&= \frac{1}{l} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta' w_n(\zeta - \eta') w_{n'}(\zeta - \eta' - \eta) w_{n'}(\zeta' - \eta' - \eta) w_n(\zeta' - \eta') \\
&\quad (4.53)
\end{aligned}$$

と書ける [72]。さらに、 $\eta' \rightarrow \eta'' = \zeta' - \eta'$ の変数変換を行い、積分

$M_{nn'}(\zeta, \zeta')$ を、 ζ, ζ' が含まれる項と含まれない項に分離

$$M_{nn'}(\zeta, \zeta') = \frac{-1}{l} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta'' w_n(\zeta - \zeta' + \eta'') w_{n'}(\zeta - \zeta' + \eta'' - \eta) \\ \times w_{n'}(\eta'' - \eta) w_n(\eta'') \quad (4.54)$$

する。ここで、 ζ, ζ' が含まれる項を

$$A_{nn'}(\zeta - \zeta' + \eta'', \eta) = w_n(\zeta - \zeta' + \eta'') w_{n'}(\zeta - \zeta' + \eta'' - \eta) \quad (4.55)$$

と置く。関数 $A_{nn'}(\zeta - \zeta' + \eta'', \eta)$ のフーリエ変換 $\tilde{A}_{nn'}(\eta, s)$ を

$$A_{nn'}(\zeta - \zeta' + \eta'', \eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{i(\zeta - \zeta' + \eta'')s} \tilde{A}_{nn'}(\eta, s) \quad (4.56)$$

で定義する。このときフーリエ変換 $\tilde{A}_{nn'}(\eta, s)$ は、逆フーリエ変換することとて、

$$\tilde{A}_{nn'}(\eta, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta''' e^{-i\eta'''s} w_n(\eta''') w_{n'}(\eta''' - \eta) \quad (4.57)$$

と書かれる。ここで、 $\zeta - \zeta' + \eta'' = \eta'''$ とした。フーリエ変換 $\tilde{A}_{nn'}(\eta, s)$ を用いると積分 $M_{nn'}(\zeta, \zeta')$ は

$$M_{nn'}(\zeta, \zeta') = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}l} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta'' \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{i(\zeta - \zeta' + \eta'')s} \tilde{A}_{nn'}(\eta, s) w_{n'}(\eta'' - \eta) w_n(\eta'') \\ = \frac{-1}{l} \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{i(\zeta - \zeta')s} \tilde{A}_{nn'}(\eta, s) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta'' e^{i\eta''s} w_{n'}(\eta'' - \eta) w_n(\eta'') \quad (4.58)$$

と書ける。ここで、 η'' に関する積分は

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta'' e^{i\eta''s} w_{n'}(\eta'' - \eta) w_n(\eta'') = \tilde{A}_{nn'}(\eta, -s) \quad (4.59)$$

であるから、 $M_{nn'}(\zeta, \zeta')$ をフーリエ変換の形

$$M_{nn'}(\zeta, \zeta') = \frac{-1}{l} \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{i(\zeta - \zeta')s} \tilde{A}_{nn'}(\eta, s) \tilde{A}_{nn'}(\eta, -s) \quad (4.60)$$

で書き下せる。

次にフーリエ変換 $\tilde{A}_{nn'}(\eta, s)$ の具体的な関数形を求める。フーリエ変換 $\tilde{A}_{nn'}(\eta, s)$ を被積分関数 $w_n(x)$ の定義 (4.48) を用いて書き下すと

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_{nn'}(\eta, s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta''' e^{-i\eta'''s} N_n \exp\left[\frac{-\eta'''^2}{2}\right] H_n[\eta'''] \\
&\quad \times N_{n'} \exp\left[\frac{-(\eta''' - \eta)^2}{2}\right] H_{n'}[\eta''' - \eta] \\
&= \frac{N_n N_{n'}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta''' \exp\left[-i\eta'''s - \frac{\eta'''^2}{2} - \frac{(\eta''' - \eta)^2}{2}\right] H_n[\eta'''] H_{n'}[\eta''' - \eta] \\
&= \frac{N_n N_{n'}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[\left(\frac{\eta - is}{2}\right)^2 - \frac{\eta^2}{2}\right] \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} d\eta''' \exp\left[-\left(\eta''' - \frac{\eta - is}{2}\right)^2\right] H_n[\eta'''] H_{n'}[\eta''' - \eta] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\eta''' \exp\left[-\left(\eta''' + \frac{is}{2}\right)^2\right] H_n\left[\eta''' + \frac{\eta}{2}\right] H_{n'}\left[\eta''' - \frac{\eta}{2}\right] \\
&= \frac{N_n N_{n'}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[\left(\frac{\eta''' - is}{2}\right)^2 - \frac{\eta'''^2}{2}\right] \tilde{\mathcal{A}}_{nn'}(\eta, s) \tag{4.61}
\end{aligned}$$

となる。ここで、エルミート多項式の積分を

$$\tilde{\mathcal{A}}_{nn'}(\eta, s) = \int_{-\infty}^{\infty} d\eta''' \exp\left[-\left(\eta''' + \frac{is}{2}\right)^2\right] H_n\left[\eta''' + \frac{\eta}{2}\right] H_{n'}\left[\eta''' - \frac{\eta}{2}\right] \tag{4.62}$$

と置いた。ここで、複素数 $z = \eta''' + i\tau$ を用いて複素関数

$$\mathcal{A}(z) = \exp\left[-\left(z + \frac{is}{2}\right)^2\right] H_n\left[z + \frac{\eta}{2}\right] H_{n'}\left[z - \frac{\eta}{2}\right] \tag{4.63}$$

を定義し、複素積分

$$\begin{aligned} \oint dz \mathcal{A}(z) &= \int_{-r}^r d\eta''' \mathcal{A}(\eta''') + i \int_0^{-\frac{s}{2}} d\tau \mathcal{A}(r + i\tau) \\ &\quad + \int_r^{-r} d\eta''' \mathcal{A}\left(\eta''' - i\frac{s}{2}\right) + i \int_{-\frac{s}{2}}^0 d\tau \mathcal{A}(-r + i\tau) \end{aligned} \quad (4.64)$$

について考える。この経路にそった複素積分では $r \rightarrow \infty$ のとき、第2項及び第4項は0になる。即ち

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{-\frac{s}{2}} d\tau \mathcal{A}(r + i\tau) = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-\frac{s}{2}}^0 d\tau \mathcal{A}(-r + i\tau) = 0 \quad (4.65)$$

である。また、コーシーの積分定理より周回積分は

$$\oint dz \mathcal{A}(z) = 0 \quad (4.66)$$

であるから、エルミート多項式の積分 $\tilde{\mathcal{A}}_{nn'}(\eta, s)$ は

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{A}}_{nn'}(\eta, s) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r d\eta''' \mathcal{A}(\eta''') = - \lim_{r \rightarrow \infty} \int_r^{-r} d\eta''' \mathcal{A}\left(\eta''' - i\frac{s}{2}\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\eta''' \exp[-\eta'''^2] H_n\left[\eta''' - i\frac{s}{2} + \frac{\eta}{2}\right] H_{n'}\left[\eta''' - i\frac{s}{2} - \frac{\eta}{2}\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\eta''' \exp[-\eta'''^2] H_n\left[\eta''' + \frac{\eta - is}{2}\right] H_{n'}\left[\eta''' - \frac{\eta + is}{2}\right] \end{aligned} \quad (4.67)$$

と書き直すことができる。積分を実行するために、エルミート多項式についての積分の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} H_m[x + y] H_n[x + z] = 2^n \sqrt{\pi} m! z^{n-m} L_m^{n-m}(-2yz) \quad , \quad (m \leq n) \quad (4.68)$$

を用いる [68]。ここで、 $L_m^{n-m}(-2yz)$ はラゲール多項式であり、

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{n+\alpha}{n-m} \frac{x^m}{m!} \quad (4.69)$$

で定義される [68]。ラゲール多項式の定義には微分形もあり、

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!} e^x x^{-\alpha} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+\alpha}) \quad (4.70)$$

である [68]。積分 $\tilde{\mathcal{A}}_{nn'}(\eta, s)$ へ公式 (4.68) を適用することで、 $\tilde{\mathcal{A}}_{nn'}(\eta, s)$ の具体的な関数形

$$\tilde{\mathcal{A}}_{nn'}(\eta, s) = \begin{cases} 2^{n'} \sqrt{\pi} n! \left(-\frac{\eta + is}{2} \right)^{n'-n} L_n^{n'-n} \left(\frac{\eta^2 + s^2}{2} \right) & (n \leq n') \\ 2^n \sqrt{\pi} n'! \left(\frac{\eta - is}{2} \right)^{n-n'} L_{n'}^{n-n'} \left(\frac{\eta^2 + s^2}{2} \right) & (n' \leq n) \end{cases} \quad (4.71)$$

を得る [72]。これを用いれば $M_{nn'}(\zeta, \zeta')$ は

$$\begin{aligned} M_{nn'}(\zeta, \zeta') &= \frac{-1}{l} \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{i(\zeta - \zeta')s} \frac{N_n N_{n'}}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[\left(\frac{\eta''' - is}{2} \right)^2 - \frac{\eta'''^2}{2} \right] \tilde{\mathcal{A}}_{nn'}(\eta, s) \\ &\quad \times \frac{N_n N_{n'}}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[\left(\frac{\eta''' + is}{2} \right)^2 - \frac{\eta'''^2}{2} \right] \tilde{\mathcal{A}}_{nn'}(\eta, -s) \\ &= \frac{-1}{2\pi l^3} \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{i(\zeta - \zeta')s} \Lambda_{nn'}(\eta, s) \end{aligned} \quad (4.72)$$

となり、フーリエ変換の形で書き下すことができる。ここで、フーリエ変換 $\Lambda_{nn'}(\eta, s)$ の具体的な関数形は、 $n \leq n'$ のとき、

$$\begin{aligned} \Lambda_{nn'}(\eta, s) &= \Lambda_{nn'}^{(n \leq n')}(\eta, s) \\ &= \frac{n!}{n'!} \exp \left[- \left(\frac{\eta^2 + s^2}{2} \right)^2 \right] \left(\frac{\eta^2 + s^2}{2} \right)^{n'-n} \left\{ L_n^{n'-n} \left(\frac{\eta^2 + s^2}{2} \right) \right\}^2 \end{aligned} \quad (4.73)$$

であり、 $n' \leq n$ のとき

$$\begin{aligned}\Lambda_{nn'}(\eta, s) &= \Lambda_{nn'}^{(n' \leq n)}(\eta, s) \\ &= \frac{n!}{n!} \exp \left[- \left(\frac{\eta^2 + s^2}{2} \right)^2 \right] \left(\frac{\eta^2 + s^2}{2} \right)^{n-n'} \left\{ L_{n'}^{n-n'} \left(\frac{\eta^2 + s^2}{2} \right) \right\}^2\end{aligned}\quad (4.74)$$

である。無次元量の定義 (4.52) 及び s を $x_2 - x'_2$ に共役な変数 p_2 で

$$s = lp_2 \quad (4.75)$$

と書くと、 $M_{nn'} \left(\frac{x_2}{l}, \frac{x'_2}{l} \right)$ の p_2 に関するフーリエ変換

$$M_{nn'} \left(\frac{x_2}{l}, \frac{x'_2}{l} \right) = \frac{-1}{2\pi l^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp_2 e^{i(x_2 - x'_2)p_2} \Lambda_{nn'}(lp_1, lp_2) \quad (4.76)$$

を得る。よって波動関数の積分 $\mathcal{M}_{nn'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ をフーリエ変換の形

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{nn'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{-1}{(2\pi)^2 l^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp_1 \int_{-\infty}^{\infty} dp_2 e^{ip_1(x_1 - x'_1)} e^{ip_2(x_2 - x'_2)} \Lambda_{nn'}(lp_1, lp_2) \\ &= \frac{-1}{(2\pi)^2 l^2} \int d^2 \mathbf{p} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \Lambda_{nn'}(l\mathbf{p})\end{aligned}\quad (4.77)$$

で書き下すことができる。ここで $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ は 2次元波数ベクトルである。また、フーリエ変換 $\Lambda_{nn'}(l\mathbf{p})$ の具体的な関数形は、 $n \leq n'$ のとき、

$$\begin{aligned}\Lambda_{nn'}(l\mathbf{p}) &= \Lambda_{nn'}^{(n \leq n')}(l\mathbf{p}) \\ &= \frac{n!}{n!} \exp \left[- \left(\frac{l^2 p^2}{2} \right)^2 \right] \left(\frac{l^2 p^2}{2} \right)^{n'-n} \left\{ L_n^{n'-n} \left(\frac{l^2 p^2}{2} \right) \right\}^2\end{aligned}\quad (4.78)$$

であり、 $n' \leq n$ のとき

$$\begin{aligned}\Lambda_{nn'}(l\mathbf{p}) &= \Lambda_{nn'}^{(n' \leq n)}(l\mathbf{p}) \\ &= \frac{n!}{n'} \exp \left[- \left(\frac{l^2 p^2}{2} \right)^2 \right] \left(\frac{l^2 p^2}{2} \right)^{n-n'} \left\{ L_{n'}^{n-n'} \left(\frac{l^2 p^2}{2} \right) \right\}^2\end{aligned}\quad (4.79)$$

である [72]。ここで、 $p = |\mathbf{p}|$ とした。

2次元電子数密度応答関数のフーリエ変換

2次元電子数密度応答関数 $D_{\alpha\alpha'}^{(2D)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$ のフーリエ変換を

$$D_{\alpha\alpha'}^{(2D)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d^2\mathbf{p} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')-i\omega(t-t')} \tilde{D}_{\alpha\alpha'}^{(2D)}(\mathbf{p}, \omega)\quad (4.80)$$

で定義すると、式 (4.45) で得た関数 $\Theta_{nn'}(t-t')$ のフーリエ変換及び、式 (4.77) で得た波動関数の積分 $\mathcal{M}_{nn'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ のフーリエ変換から、2次元電子数密度応答関数 $D_{\alpha\alpha'}^{(2D)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$ のフーリエ変換は

$$\tilde{D}_{\alpha\alpha'}^{(2D)}(\mathbf{p}, \omega) = \frac{-\delta_{\alpha\alpha'}}{(\sqrt{2\pi})^3 l^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} \Theta_{nn'}(\omega) \left\{ f(E_{n\alpha}) - f(E_{n'\alpha}) \right\} \Lambda_{nn'}(l\mathbf{p})\quad (4.81)$$

となる。ここで、関数 $\Lambda_{nn'}(l\mathbf{p})$ の具体的な関数形 (4.78)(4.79) より、

$$\Lambda_{nn'}^{(n \leq n')} (l\mathbf{p}) = \Lambda_{n'n}^{(n' \leq n)} (l\mathbf{p})\quad (4.82)$$

であるから、2次元電子数密度応答関数のフーリエ変換 $\tilde{D}_{\alpha\alpha'}^{(2D)}(\mathbf{p}, \omega)$ の第2項の和は

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} \Theta_{nn'}(\omega) f(E_{n'\alpha}) \Lambda_{nn'}(l\mathbf{p}) \\
&= \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n'n}(\omega) f(E_{n\alpha}) \Lambda_{n'n}(l\mathbf{p}) \\
&= \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{n'} \Theta_{n'n}(\omega) f(E_{n\alpha}) \left\{ \Lambda_{n'n}^{(n' \leq n)}(l\mathbf{p}) + \Lambda_{n'n}^{(n \leq n')}(l\mathbf{p}) \right\} \\
&= \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{n'} \Theta_{n'n}(\omega) f(E_{n\alpha}) \left\{ \Lambda_{nn'}^{(n \leq n')}(l\mathbf{p}) + \Lambda_{nn'}^{(n' \leq n)}(l\mathbf{p}) \right\} \\
&= \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n'n}(\omega) f(E_{n\alpha}) \Lambda_{nn'}(l\mathbf{p}) \tag{4.83}
\end{aligned}$$

と書ける。結局、2次元電子数密度応答関数のフーリエ変換 $\tilde{D}_{\alpha\alpha'}^{(2D)}(\mathbf{p}, \omega)$ は、量子数 $n\alpha$ におけるフェルミ分布関数 $f(E_{n\alpha})$ のみを用いて

$$\tilde{D}_{\alpha\alpha'}^{(2D)}(\mathbf{p}, \omega) = \frac{-\delta_{\alpha\alpha'}}{(\sqrt{2\pi})^3 l^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} \{ \Theta_{nn'}(\omega) - \Theta_{n'n}(\omega) \} f(E_{n\alpha}) \Lambda_{nn'}(l\mathbf{p}) \tag{4.84}$$

と書き直せる [72]。

実数部分及び虚数部分への分離

2次元電子数密度応答関数のフーリエ変換 $\tilde{D}_{\alpha\alpha'}^{(2D)}(\mathbf{p}, \omega)$ を実数部分と虚数部分へ分離する。

2次元電子数密度応答関数のフーリエ変換 $\tilde{D}_{\alpha\alpha'}^{(2D)}(\mathbf{p}, \omega)$ において、複素数値は関数 $\Theta_{nn'}(\omega)$ のみがとりうるため、関数 $\Theta_{nn'}(\omega)$ を実数部分と虚

数部分へ分離する。今、関数 $\Theta_{nn'}(\omega)$ の積分を考えると

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \Theta_{nn'}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{\omega + \omega_C(n - n') + i\nu} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\omega + \omega_C(n - n')}{\{\omega + \omega_C(n - n')\}^2} - i \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\nu}{\{\omega + \omega_C(n - n')\}^2}\end{aligned}\quad (4.85)$$

である。ここで、コーシーの主値積分から関数 $\Theta_{nn'}(\omega)$ の積分は

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \Theta_{nn'}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{\omega + \omega_C(n - n') + i\nu} \\ &= P \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{\omega + \omega_C(n - n')} - i\pi \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \delta\{\omega + \omega_C(n - n')\}\end{aligned}\quad (4.86)$$

とも書ける。比較することで、関数 $\Theta_{nn'}(\omega)$ を

$$\Theta_{nn'}(\omega) = \frac{\omega + \omega_C(n - n')}{\{\omega + \omega_C(n - n')\}^2} - i\pi \delta\{\omega + \omega_C(n - n')\}\quad (4.87)$$

と実数部分と虚数部分へ分離することができる。よって2次元電子数密度応答関数のフーリエ変換 $\tilde{D}_{\alpha\alpha'}^{(2D)}(\mathbf{p}, \omega)$ を実数部分と虚数部分へ分離

$$\tilde{D}_{\alpha\alpha'}^{(2D)}(\mathbf{p}, \omega) = \Re \tilde{D}_{\alpha\alpha'}^{(2D)}(\mathbf{p}, \omega) + i\Im \tilde{D}_{\alpha\alpha'}^{(2D)}(\mathbf{p}, \omega)\quad (4.88)$$

すると、実数部分項 $\Re \tilde{D}_{\alpha\alpha'}^{(2D)}(\mathbf{p}, \omega)$ は

$$\Re \tilde{D}_{\alpha\alpha'}^{(2D)}(\mathbf{p}, \omega) = \frac{-\delta_{\alpha\alpha'}}{(\sqrt{2\pi})^3 l^2} \sum_{n=0}^{\infty} f(E_{n\alpha}) \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{-2\omega_C(n - n')}{\omega^2 - \omega_C^2(n - n')^2} \Lambda_{nn'}(l\mathbf{p})\quad (4.89)$$

となり、虚数部分項 $\Im \tilde{D}_{\alpha\alpha'}^{(2D)}(\mathbf{p}, \omega)$ は

$$\begin{aligned} \Im \tilde{D}_{\alpha\alpha'}^{(2D)}(\mathbf{p}, \omega) &= \frac{-\delta_{\alpha\alpha'}\pi}{(\sqrt{2\pi})^3 l^2} \sum_{n=0}^{\infty} f(E_{n\alpha}) \Lambda_{nn'}(l\mathbf{p}) \\ &\quad \times \sum_{n'=0}^{\infty} [\delta\{\omega + \omega_C(n - n')\} - \delta\{\omega + \omega_C(n' - n)\}] \end{aligned} \quad (4.90)$$

となる。

今、長波長近似 $p \ll 1$ を用いると関数 $\Lambda_{nn'}(l\mathbf{p})$ は $\frac{l^2 p^2}{2}$ についてテイラー展開でき、結局、2次元電子数密度応答関数のフーリエ変換の実数部分項 $\Re \tilde{D}_{\alpha\alpha'}^{(2D)}(\mathbf{p}, \omega)$ の具体的な関数形

$$\begin{aligned} \Re \tilde{D}_{\alpha\alpha'}^{(2D)}(\mathbf{p}, \omega) &= \frac{-\delta_{\alpha\alpha'}}{(\sqrt{2\pi})^3} \frac{2\omega_C}{l^2} \left[\frac{1}{\omega^2 - \omega_C^2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} f(E_{n\alpha}) \right\} \frac{l^2 p^2}{2} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{1}{\omega^2 - 4\omega_C^2} - \frac{1}{\omega^2 - \omega_C^2} \right\} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} f(E_{n\alpha})(2n+1) \right\} \left(\frac{l^2 p^2}{2} \right)^2 + \dots \right] \end{aligned} \quad (4.91)$$

を得る。スピンに関する和をとると、

$$\begin{aligned} D(\mathbf{p}, \omega) &= \sum_{\alpha\alpha'} \Re \tilde{D}_{\alpha\alpha'}^{(2D)}(\mathbf{p}, \omega) \\ &= \frac{-1}{(\sqrt{2\pi})^3} \frac{2\omega_C}{l^2} \left[\frac{1}{\omega^2 - \omega_C^2} \left\{ \sum_{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} f(E_{n\alpha}) \right\} \frac{l^2 p^2}{2} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{1}{\omega^2 - 4\omega_C^2} - \frac{1}{\omega^2 - \omega_C^2} \right\} \left\{ \sum_{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} f(E_{n\alpha})(2n+1) \right\} \left(\frac{l^2 p^2}{2} \right)^2 + \dots \right] \end{aligned} \quad (4.92)$$

となる。ここで、フェルミ分布関数 $f(E_{n\alpha})$ の和を

$$A_1 = \sum_{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} f(E_{n\alpha}) \quad , \quad A_2 = \sum_{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} f(E_{n\alpha})(2n+1) \quad (4.93)$$

と置く。これは強磁場下に置かれた多電子系の輸送理論において頻繁に現れる量である [71]。これを用いると 2 次元電子数密度応答関数のフーリエ変換 $D(\mathbf{p}, \omega)$ の具体的な関数形は

$$\begin{aligned} D(\mathbf{p}, \omega) &= \frac{-1}{(\sqrt{2\pi})^3} \frac{2\omega_C}{l^2} \left[\frac{1}{\omega^2 - \omega_C^2} A_1 \frac{l^2 p^2}{2} + \left\{ \frac{1}{\omega^2 - 4\omega_C^2} - \frac{1}{\omega^2 - \omega_C^2} \right\} A_2 \left(\frac{l^2 p^2}{2} \right)^2 + \dots \right] \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\omega^2 - \omega_C^2} \frac{\omega_C}{2\pi} A_1 p^2 + \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{1}{\omega^2 - 4\omega_C^2} - \frac{1}{\omega^2 - \omega_C^2} \right\} \frac{\omega_C}{2\pi} \frac{l^2 A_2}{2} p^4 \end{aligned} \quad (4.94)$$

となる [72]。

4.2.2 $\Gamma(p)$ の具体的な関数形

$\Gamma(p)$ の具体的な関数形を求める。

2 次元電子系の x_3 方向の電子数密度分布が正規分布であると仮定する。

即ち、 x_3 方向の波動関数 $\chi(x_3)$ について、

$$|\chi(x_3)|^2 = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[\frac{-a^2 x_3^2}{2} \right] \quad (4.95)$$

とガウス関数型を仮定する。 a は 2 次元電子系の厚みに関する量である。2 次元電子系の厚み d を、電子の 99 % が含まれる範囲と仮定する。即ち、 $\int_{-d/2}^{d/2} |\chi(x_3)|^2 = 0.99$ と仮定すると、 $a = 5/d$ となる [33]。2 次元電子系の x_3 方向の波動関数の 2 乗 $|\chi(x_3)|^2$ のフーリエ変換 $\sigma(p_3)$ はその定義 (4.8)

より、

$$\begin{aligned}
\sigma(p_3) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx_3 e^{-ip_3 x_3} |\chi(x_3)|^2 \\
&= \frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx_3 \exp \left[\frac{-a^2 x_3^2}{2} - ip_3 x_3 \right] \\
&= \frac{a}{2\pi} \exp \left[\frac{-p_3^2}{2a^2} \right] \int_{-\infty}^{\infty} dx_3 \exp \left[\frac{-1}{2} \left(ax_3 + \frac{ip_3}{a} \right)^2 \right] \\
&= \frac{a}{2\pi} \exp \left[\frac{-p_3^2}{2a^2} \right] \int_{-\infty}^{\infty} dx_3 \exp \left[\frac{-a^2}{2} \left(x_3 + \frac{ip_3}{a^2} \right)^2 \right] \quad (4.96)
\end{aligned}$$

と書ける。さらに、複素数 $z = x_3 + i\tau$ についての周回積分は

$$\begin{aligned}
&\oint dz \exp \left[\frac{-a^2}{2} z^2 \right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx_3 \exp \left[\frac{-a^2}{2} \left(x_3 + \frac{ip_3}{a^2} \right)^2 \right] + \int_{-\infty}^{\infty} dx_3 \exp \left[\frac{-a^2 x_3^2}{2} \right] \\
&= 0 \quad (4.97)
\end{aligned}$$

となるから、積分を実行でき、関数 $\sigma(p_3)$ の具体的な関数形

$$\begin{aligned}
\sigma(p_3) &= \frac{a}{2\pi} \exp \left[\frac{-p_3^2}{2a^2} \right] \int_{-\infty}^{\infty} dx_3 \exp \left[-\frac{a^2 x_3^2}{2} \right] \\
&= \frac{a}{2\pi} \frac{\sqrt{2}}{a} \exp \left[\frac{-p_3^2}{2a^2} \right] \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-y^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[\frac{-p_3^2}{2a^2} \right] \quad (4.98)
\end{aligned}$$

を得る。

式 (4.98) で得た関数 $\sigma(p_3)$ の具体的な関数形を用いて、関数 $\Gamma(p)$ の具体的な関数形を決定する。を用いて、関数 $\Gamma(p)$ の定義 (4.20) へ関数 $\sigma(p_3)$

の関数形 (4.98) を適用すると、

$$\begin{aligned}
 \Gamma(p) &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dp_3 \frac{\sigma(-p_3)\sigma(p_3)}{p^2 + p_3^2} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dp_3 \frac{1}{p^2 + p_3^2} \exp\left[-\frac{p_3^2}{a^2}\right] \\
 &= 2 \int_0^{\infty} dp_3 \frac{1}{p^2 + p_3^2} \exp\left[-\frac{p_3^2}{a^2}\right] \quad (4.99)
 \end{aligned}$$

となる。ここで、ガウス関数の積分は

$$\int_0^{\infty} dx \frac{e^{-a^2 x^2}}{x^2 + b^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{b} e^{a^2 b^2} \operatorname{Erfc}(ab) \quad (4.100)$$

であることが知られている。 $\operatorname{Erfc}(ab)$ は誤差関数であり、

$$\operatorname{Erfc}(x) = \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{10} + \dots \quad (4.101)$$

で定義される [73, 74]。ガウス関数の積分に関する公式 (4.100) より、関数 $\Gamma(p)$ の具体的な関数形

$$\Gamma(p) = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{p} \exp\left[-\frac{p^2}{a^2}\right] \operatorname{Erfc}\left(\frac{p}{a}\right) \quad (4.102)$$

を得る。ここで、2次元電子数密度応答関数のときと同様、長波長近似において $\Gamma(p)$ を p/a についてテイラー展開すると、関数 $\Gamma(p)$ の具体的な

関数形は

$$\begin{aligned}
 \Gamma(p) &= 2\frac{\sqrt{\pi}}{p} \left\{ 1 + \left(\frac{p}{a}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{p}{a}\right)^4 + \frac{1}{6} \left(\frac{p}{a}\right)^6 + \dots \right\} \\
 &\quad \times \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \left(\frac{p}{a}\right) + \frac{1}{3} \left(\frac{p}{a}\right)^3 - \frac{1}{10} \left(\frac{p}{a}\right)^5 + \dots \right\} \\
 &= 2\frac{\sqrt{\pi}}{p} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - x + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{p}{a}\right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{p}{a}\right)^3 + \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left(\frac{p}{a}\right)^4 - \frac{4}{15} \left(\frac{p}{a}\right)^5 + \dots \right] \\
 &= \frac{\pi}{p} \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}x + \left(\frac{p}{a}\right)^2 - \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left(\frac{p}{a}\right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{p}{a}\right)^4 - \frac{8}{15\sqrt{\pi}} \left(\frac{p}{a}\right)^5 + \dots \right] \\
 & \hspace{15em} (4.103)
 \end{aligned}$$

となる。

4.2.3 マグネトプラズモンの分散関係

求めた 2 次元応答関数のフーリエ変換 (4.94) 及び関数 $\Gamma(p)$ の具体的な関数形 (4.103) を 2 次元電子系におけるマグネトプラズモンの分散関係を与える式 (4.22) に代入することで、2 次元電子系におけるマグネトプラズモンの分散関係を導出する。

式 (4.94) で関数形を求めた 2 次元電子数密度応答関数のフーリエ変換 $D(\mathbf{p}, \omega)$ を、2 次元電子系におけるマグネトプラズモンの分散関係を与え

る式 (4.22) の左辺へ代入すると

$$\begin{aligned}
& \frac{2\sqrt{2\pi}e^2}{\hbar\epsilon}\Gamma(p)D(\mathbf{p},\omega) \\
&= \frac{2\sqrt{2\pi}e^2}{\hbar\epsilon}\Gamma(p)\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\omega^2-\omega_C^2}\frac{\omega_C}{2\pi}A_1p^2 \\
&\quad + \frac{2\sqrt{2\pi}e^2}{\hbar\epsilon}\Gamma(p)\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{1}{\omega^2-4\omega_C^2}-\frac{1}{\omega^2-\omega_C^2}\right\}\frac{\omega_C}{2\pi}\frac{l^2}{2}A_2p^4 \\
&= \frac{-1}{\omega^2-\omega_C^2}\frac{e^2\omega_C}{\hbar\pi\epsilon}A_1\Gamma(p)p^2 \\
&\quad - \left\{\frac{1}{\omega^2-4\omega_C^2}-\frac{1}{\omega^2-\omega_C^2}\right\}\frac{e^2\omega_C}{\hbar\pi\epsilon}\frac{l^2}{2}A_2\Gamma(p)p^4 \tag{4.104}
\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\frac{e^2\omega_C}{\hbar\pi\epsilon}A_1 = \tilde{A}_1 \quad , \quad \frac{e^2\omega_C}{\hbar\pi\epsilon}\frac{l^2}{2}A_2 = \tilde{A}_2 \tag{4.105}$$

と置くと、式 (4.22) は

$$\frac{\tilde{A}_1}{\omega^2-\omega_C^2}\Gamma(p)p^2 + \left\{\frac{1}{\omega^2-4\omega_C^2}-\frac{1}{\omega^2-\omega_C^2}\right\}\tilde{A}_2\Gamma(p)p^4 = 1 \tag{4.106}$$

となる。整理すると

$$(\omega^2-4\omega_C^2)(\omega^2-\omega_C^2) = (\omega^2-4\omega_C^2)\tilde{A}_1\Gamma(p)p^2 + 3\omega_C^2\tilde{A}_2\Gamma(p)p^4 \tag{4.107}$$

となる。この方程式を ω^2 について、 p^4 までの近似で解く。

計算上簡単のために

$$\omega^2-4\omega_C^2 = x \tag{4.108}$$

と置く。これを用いれば式 (4.107) は

$$x(x+3\omega_C^2) = x\tilde{A}_1\Gamma(p)p^2 + 3\omega_C^2\tilde{A}_2\Gamma(p)p^4 \tag{4.109}$$

となるから、 x について整理すると、2 次方程式

$$x^2 + \{3\omega_C^2 - \tilde{A}_1\Gamma(p)p^2\}x - 3\omega_C^2\tilde{A}_2\Gamma(p)p^4 = 0 \quad (4.110)$$

を得る。この方程式の解は、2 次方程式の解の公式より

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\{-3\omega_C^2 + \tilde{A}_1\Gamma(p)p^2\} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\{3\omega_C^2 - \tilde{A}_1\Gamma(p)p^2\}^2 + 12\omega_C^2\tilde{A}_2\Gamma(p)p^4} \\ &= \frac{3}{2}\omega_C^2 + \frac{1}{2}\tilde{A}_1\Gamma(p)p^2 \pm \sqrt{\left\{\frac{3}{2}\omega_C^2 - \frac{1}{2}\tilde{A}_1\Gamma(p)p^2\right\}^2 + 3\omega_C^2\tilde{A}_2\Gamma(p)p^4} \end{aligned} \quad (4.111)$$

である。ここで、

$$\left\{\frac{3}{2}\omega_C^2 - \frac{1}{2}\tilde{A}_1\Gamma(p)p^2\right\}^2 + 3\omega_C^2\tilde{A}_2\Gamma(p)p^4 = \mathcal{D} \quad (4.112)$$

と置き、 ω^2 について書き直すと、2 次元電子系におけるマグネトプラズモンの分散関係は

$$\omega^2 = \frac{5}{2}\omega_C^2 + \frac{1}{2}\tilde{A}_1\Gamma(p)p^2 \pm \sqrt{\mathcal{D}} \quad (4.113)$$

となる。

$\sqrt{\mathcal{D}(p)}$ の計算

2 次元電子系におけるマグネトプラズモンの分散関係 (4.113) を具体的に書き下すため $\sqrt{\mathcal{D}(p)}$ を計算する。

$\mathcal{D}(p)$ の定義 (4.112) より、

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} &= \left\{ \frac{3}{2} \omega_C^2 - \frac{1}{2} \tilde{A}_1 \Gamma(p) p^2 \right\}^2 + 3 \omega_C^2 \tilde{A}_2 \Gamma(p) p^4 \\
&= \frac{9}{4} \omega_C^4 - \frac{3}{2} \omega_C^2 \tilde{A}_1 \Gamma(p) p^2 + \frac{1}{4} \tilde{A}_1^2 \{\Gamma(p)\}^2 p^4 + 3 \omega_C^2 \tilde{A}_2 \Gamma(p) p^4 \\
&= \frac{9 \omega_C^4}{4} \left[1 - \frac{2}{3} \frac{\tilde{A}_1}{\omega_C^2} \Gamma(p) p^2 + \frac{1}{9} \frac{\tilde{A}_1^2}{\omega_C^4} \{\Gamma(p)\}^2 p^4 + \frac{4}{3} \frac{\tilde{A}_2}{\omega_C^2} \Gamma(p) p^4 \right] \\
&= \frac{9 \omega_C^4}{4} (1 + \text{[I]} + \text{[II]} + \text{[III]}) \tag{4.114}
\end{aligned}$$

である。ここで、関数 $\Gamma(p)$ を含む第 1 項、第 2 項、第 3 項を [I]、[II]、[III] と置いた。式 (4.103) で求めた関数 $\Gamma(p)$ の関数形を用いて、[I]、[II]、[III] を

$$\begin{aligned}
\text{[I]} &= \frac{-2}{3} \frac{\tilde{A}_1}{\omega_C^2} \Gamma(p) p^2 \\
&= \frac{-2}{3} \frac{\tilde{A}_1}{\omega_C^2} \frac{2\sqrt{\pi}}{p} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - x + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{p}{a}\right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{p}{a}\right)^3 \right] p^2 \\
&= \frac{-2\pi}{3} \frac{\tilde{A}_1}{\omega_C^2} \left\{ p - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{p^2}{a} + \frac{p^3}{a^2} - \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{p^4}{a^3} \right\} \tag{4.115}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{[II]} &= \frac{1}{9} \frac{\tilde{A}_1^2}{\omega_C^4} \{\Gamma(p)\}^2 p^4 \\
&= \frac{1}{9} \frac{\tilde{A}_1^2}{\omega_C^4} \left[\frac{2\sqrt{\pi}}{p} \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{2} - x + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{p}{a}\right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{p}{a}\right)^3 \right\} \right]^2 p^4 \\
&= \frac{\pi^2}{9} \frac{\tilde{A}_1^2}{\omega_C^4} \left\{ p^2 - \frac{4}{\sqrt{\pi}a} p^3 + \frac{2\pi + 4}{\pi} \frac{1}{a^2} p^4 \right\} \tag{4.116}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{[III]} &= \frac{4}{3} \frac{\tilde{A}_2}{\omega_C^2} \Gamma(p) p^4 \\
&= \frac{4}{3} \frac{\tilde{A}_2}{\omega_C^2} \frac{2\sqrt{\pi}}{p} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - x + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{p}{a}\right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{p}{a}\right)^3 \right] p^4 \\
&= \frac{4\pi}{3} \frac{\tilde{A}_2}{\omega_C^2} \left\{ p^3 - \frac{2}{\sqrt{\pi}a} p^4 \right\}
\end{aligned} \tag{4.117}$$

と書き下し、 p について整理すると、 D は

$$\begin{aligned}
D &= \frac{9\omega_C^4}{4} \left[1 + \frac{-2\pi}{3} \frac{\tilde{A}_1}{\omega_C^2} p + \left\{ \frac{4\sqrt{\pi}}{3} \frac{\tilde{A}_1}{\omega_C^2} \frac{1}{a} + \frac{\pi^2}{9} \frac{\tilde{A}_1^2}{\omega_C^4} \right\} p^2 \right. \\
&\quad + \left\{ \frac{-2\sqrt{\pi}}{3} \frac{\tilde{A}_1}{\omega_C^2} \frac{1}{a^2} - \frac{4\pi\sqrt{\pi}}{9} \frac{\tilde{A}_1^2}{\omega_C^4} \frac{1}{a} + \frac{4\pi}{3} \frac{\tilde{A}_2}{\omega_C^2} \right\} p^3 \\
&\quad \left. + \left\{ \frac{8\sqrt{\pi}}{9} \frac{\tilde{A}_1}{\omega_C^2} \frac{1}{a^3} + \frac{2\pi(\pi+2)}{9} \frac{\tilde{A}_1^2}{\omega_C^4} \frac{1}{a^2} - \frac{8\sqrt{\pi}}{3} \frac{\tilde{A}_2}{\omega_C^2} \frac{1}{a} \right\} p^4 \right]
\end{aligned} \tag{4.118}$$

となる。ここで、各項の係数を

$$C_1 = \frac{-2\pi}{3} \frac{\tilde{A}_1}{\omega_C^2} \tag{4.119}$$

$$C_2 = \frac{4\sqrt{\pi}}{3} \frac{\tilde{A}_1}{\omega_C^2} \frac{1}{a} + \frac{\pi^2}{9} \frac{\tilde{A}_1^2}{\omega_C^4} \tag{4.120}$$

$$C_3 = \frac{-2\sqrt{\pi}}{3} \frac{\tilde{A}_1}{\omega_C^2} \frac{1}{a^2} - \frac{4\pi\sqrt{\pi}}{9} \frac{\tilde{A}_1^2}{\omega_C^4} \frac{1}{a} + \frac{4\pi}{3} \frac{\tilde{A}_2}{\omega_C^2} \tag{4.121}$$

$$C_4 = \frac{8\sqrt{\pi}}{9} \frac{\tilde{A}_1}{\omega_C^2} \frac{1}{a^3} + \frac{2\pi(\pi+2)}{9} \frac{\tilde{A}_1^2}{\omega_C^4} \frac{1}{a^2} - \frac{8\sqrt{\pi}}{3} \frac{\tilde{A}_2}{\omega_C^2} \frac{1}{a} \tag{4.122}$$

と置き、新たな関数

$$\mathcal{G} = C_1 p + C_2 p^2 + C_3 p^3 + C_4 p^4 \tag{4.123}$$

を用いると、 D は \mathcal{G} についてテイラー展開でき、

$$\begin{aligned}
\sqrt{D} &= \frac{3\omega_C}{2} \sqrt{1 + \mathcal{G}} \\
&= \frac{3\omega_C}{2} \left(1 + \frac{\mathcal{G}}{2} - \frac{\mathcal{G}^2}{8} + \frac{\mathcal{G}^3}{16} - \frac{5}{128}\mathcal{G}^4 + \dots \right) \\
&= \frac{3\omega_C}{2} \left\{ 1 + \frac{C_1}{2}p + \left(\frac{C_2}{2} - \frac{C_1^2}{8} \right) p^2 + \left(\frac{C_3}{2} - \frac{C_1 C_2}{4} + \frac{C_1^3}{16} \right) p^3 \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{C_4}{2} - \frac{2C_1 C_3 + C_2^2}{8} + \frac{3C_1^2 C_2}{16} + \frac{5C_1^4}{128} \right) p^4 \right\} \quad (4.124)
\end{aligned}$$

となる。各係数 C_1 、 C_2 、 C_3 、 C_4 を代入することで、

$$\begin{aligned}
\sqrt{D} &= \frac{3\omega_C^2}{2} - \frac{\pi}{2}\tilde{A}_1 p + \frac{\pi\tilde{A}_1}{a} p^2 + \left(\frac{-\pi\tilde{A}_1}{2} \frac{1}{a^2} + \pi\tilde{A}_2 \right) p^3 \\
&\quad + \left(\frac{2\sqrt{\pi}\tilde{A}_1}{3} \frac{1}{a^3} - 2\sqrt{\pi}\frac{\tilde{A}_2}{a} + \frac{\pi^2}{3} \frac{\tilde{A}_1\tilde{A}_2}{\omega_C^2} \right) p^4 \quad (4.125)
\end{aligned}$$

となる。これをマグネトプラスモンの分散関係の式 (4.113) へ代入し、 \tilde{A}_1 、 \tilde{A}_2 の定義 (4.105) を用いれば、2つの分散関係の式

$$\frac{\omega^2}{\omega_C^2} = 4 + \gamma \left\{ \frac{A_2}{2} (lp)^2 + \left(\frac{\gamma A_1 A_2}{6} - \frac{A_2}{\sqrt{\pi}\lambda} \right) (lp)^4 \right\} \equiv \Omega_+^2(lp) \quad (4.126)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\omega^2}{\omega_C^2} &= 1 + \gamma \left\{ A_1 lp - \frac{2A_1}{\sqrt{\pi}\lambda} (lp)^2 + \left(\frac{A_1}{\lambda^2} - \frac{A_2}{2} \right) (lp)^3 \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{-4A_1}{3\sqrt{\pi}\lambda^3} + \frac{A_2}{\sqrt{\pi}\lambda} - \frac{\gamma A_1 A_2}{6} \right) (lp)^4 \right\} \equiv \Omega_-^2(lp) \quad (4.127)
\end{aligned}$$

を得る。これが2次元電子系のマグネトプラスモン分散関係である。こ

ここで、 γ 、 λ は無次元量であり、

$$\gamma = \frac{e^2}{\hbar \epsilon l \omega_C} \quad , \quad \lambda = \frac{5l}{d} \quad (4.128)$$

と定義した。

第5章 結果及び考察

第3章では強磁場下2次元電子系のダイナミクスを第2量子化された電子場の演算子を用いて扱い、ハイゼンベルグ描像の場の演算子に関して線形応答理論を定式化した。第4章では電子系とスカラー場 A_0 の相互作用を線形応答理論で扱った。本論文ではスカラー場 A_0 は古典場とし、ポアソン方程式の電荷密度項を第2量子化された電子場演算子で構成される電子密度演算子の期待値とした。この電子密度演算子の期待値をスカラー場 A_0 に対する線形応答で近似する。その結果、スカラー場 A_0 のポアソン方程式の電荷密度項は A_0 の空間および時間に関する積分を含むことになり、 A_0 の積分方程式となる。この積分方程式は異なる時間での A_0 を含むため、結果的に A_0 のダイナミクスを与える。これが自己無撞着線形応答近似の基本的な考え方である。本研究で得た強磁場下2次元電子系のマグネトプラズモンの分散関係は (4.126) と (4.127) である。これらの式で、フェルミ分布関数の和に関する量 A_1, A_2 及び無次元量 γ, λ はそれぞれ式 (4.93)、(4.128) で定義した。ここではまず、 A_1, A_2 について考える。 A_1, A_2 はフェルミ分布関数の和に関する量である。ランダウ準位では単位面積当たりの縮退が eB/hc で与えられるから、2次元電子系の全電子数密度の期待値、及び全エネルギー期待値はそれぞれ

$$\frac{eB}{hc} \sum_{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} f(E_{n\alpha}) = \langle N \rangle, \quad \frac{eB}{hc} \sum_{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} f(E_{n\alpha}) \hbar\omega_C \left(n + \frac{1}{2} \right) = \langle E \rangle \quad (5.1)$$

となり、フェルミ分布関数の和で与えられる。このことから、 A_1, A_2 はその定義 (4.93) より

$$A_1 = \frac{hc}{eB} \langle N \rangle, \quad A_2 = \frac{4\pi\omega_C^2}{m} \langle E \rangle \quad (5.2)$$

と書け、 A_1 は全電子数密度の期待値に関する項、 A_2 は全エネルギー期待値に関する項であることが分かる。

次に、式 (4.126)(4.127) に現れた厚みの効果を見捨てた場合について考える。即ち $d \rightarrow 0$ の極限をとる。このとき、本研究で導出したマグネトプラズモンの分散関係 (4.126)(4.127) は、Horing と Yildiz により得られた結果 [75] と一致する。また、マグネトプラズモンモード (4.127) へ、 A_1, A_2 の定義 (4.93) 及び無次元量 γ, λ の定義 (4.128) を代入し、波数 p について 1 次までをとることで、プラズモンの分散関係は

$$\omega^2 = \omega_C^2 + \frac{2\pi e^2 \langle N \rangle}{m\epsilon} p \quad (5.3)$$

となる。これは Bernstein によって得られた結果 [76] と一致する。彼はマクスウェル方程式とボルツマン方程式を線形近似を用いて古典的に計算した。しかし、我々は量子多体系の理論を用いて計算を行った。そのため、得られたマグネトプラズモンモード (4.126)(4.127) にフェルミ分布関数が現れ、量子効果への応用が可能となった。また、分散関係 (5.3) は $B \rightarrow 0$ の極限でよく知られたプラズモンモード [18] となる。

5.1 実験との比較

本節では我々の得たマグネトプラズモンモード (4.126)(4.127) の妥当性を検証するため、実験結果と比較する。今回比較する実験結果は Batke 等によって測定されたものである [40]。また、本節は文献 [77] に準拠する。

Batke 等の実験において、2次元電子系の電子数密度 N_{2DES} はサンプルの電子数密度 N_S で与えられている。このとき、マグネトプラズモンモード (4.126)(4.127) における電子数密度の期待値 $\langle N \rangle$ は与えられた電子数密度 N_S で

$$\langle N \rangle = N_S \quad (5.4)$$

と置き換えられる。また、サンプルは熱浴中に置かれており温度は一定に保たれているから、 A_1, A_2 のフェルミ分布関数に現れる化学ポテン

シャルは、

$$\frac{eB}{hc} \sum_{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} f(E_{n\alpha}) = N_S \quad (5.5)$$

を解いて求められ、電子数密度 N_S 、温度 T 、磁場 B の関数 $\nu = \nu(N_S, T, B)$ で表される。しかし一般にこの方程式を解くことは困難である。そのため A_2 の値を決めることができない。しかし、極低温 ($T \rightarrow 0$) においては、フェルミ分布関数の性質を用いて A_2 の値を決定することが可能である。極低温におけるフェルミ分布関数は、2次元電子系が占める最も高いランダウ準位を M とすると、

$$f(E_{n\alpha}) \simeq \begin{cases} 1 & (0 \leq n \leq M) \\ 0 & (M \leq n) \end{cases} \quad (5.6)$$

で近似される。この近似より、フェルミ分布関数の和は

$$\sum_{\alpha} \sum_{N=0}^{\infty} f(E_{n\alpha}) \simeq 2(M+1) \quad , \quad \sum_{\alpha} \sum_{N=0}^{\infty} f(E_{n\alpha}) n \simeq M(M+1) \quad (5.7)$$

となるから、 A_2 はその定義 (4.93) より

$$A_2 = 2 \sum_{\alpha} \sum_{N=0}^{\infty} f(E_{n\alpha}) n + A_1 \simeq \frac{A_1^2}{2} \quad (5.8)$$

となる。期待値の置き換え (5.4) 及び A_2 の近似 (5.8) を用いれば、マグネトプラズモンモード (4.126)(4.127) は磁場 B と波数 p の関数となる。文献 [40] において、Batke 等はマグネトプラズモンの振動数 $\nu = \omega/2\pi c$ (cm^{-1}) を固定した波数 p について磁場 B の関数としてプロットしている。そこで、我々が得たマグネトプラズモンの振動数 (4.126)(4.127) から、新たにプラズモンモード

$$\nu_{\pm}(B, p) = \frac{\omega_C}{2\pi c} \Omega_{\pm}(lp) \quad (5.9)$$

を定義する。このマグネトプラズモンモード (5.9) を文献 [40] のパラメーターを用いてプロットし、Batke 等の結果 (文献 [40] の図 7) と比較する。

文献 [40] で用いられたサンプルは $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As-GaAs}$ ヘテロ構造上に形成された 2 次元電子系である。その厚み d 、電子数密度 N_s 、有効電子質量 m 、誘電率 ϵ はそれぞれ $d = 8 \times 10^{-6}$ (cm)、 $N_s = 6.7 \times 10^{11}$ (cm^{-2})、 $m = 0.071m_0$ 、 $\epsilon = 12$ である。 m_0 は電子の静止質量である。また、入射電場の波数は $q_1 = 0.72 \times 10^5$ (cm^{-1}) 及び $q_2 = 1.44 \times 10^5$ (cm^{-1}) の 2 種類である。これらのパラメーターを用いて、マグネトプラズモンモード (5.9) を与えられた波数 p における磁場 B の関数としてプロットする。波数 $p = q_1$ についてのマグネトプラズモンモードを図 5.1 にプロットした。波数 $p = q_2$ についてのマグネトプラズモンモードを図 5.2 にプロットした。図 5.3 に 2 つの波数 q_1, q_2 についての理論的に得たマグネトプラズモンモードを重ねてプロットした。

図 5.1 から、理論的に得られた曲線と実験結果は、 $B_C(q_1) \approx 1$ (T) とすると、 $B_C < B$ のとき非常によく一致することが読み取れる。しかし、 $B < B_C$ のとき理論曲線は実験とのずれが大きくなることが分かる。同様に図 5.2 から、 $B_C(q_2) \approx 2$ (T) とすると、 $B_C < B$ のとき非常によく一致することが読み取れる。しかし、 $B < B_C$ のとき理論曲線は実験とのずれが大きくなることが分かる。このずれはマグネトプラズモンモードを求めるために lp でテイラー展開したことに起因すると思われる。我々は展開の条件として長波長極限の下 lp の値を小さいものと仮定した。今回比較に用いた入射電場の波長は $B < B_C(p)$ のとき lp の値が無視できない大きさをとったと考えられる。実際、図 5.3 から読み取れる通り、 $B_C(p)$ の値は波数 p が小さくなるにつれて 0 に近づく。さらに、 $p \rightarrow 0$ の極限ではよく知られたプラズモンモード (5.3) を与える。これらのことから、我々の得たマグネトプラズモンモード (4.126)(4.127) は長波長においては有効であると考えられる。また、 $B_C(q_1)$ 、 $B_C(q_2)$ のみでは $B_C(p)$ の定量的な p 依存性を決定することはできないが、我々の得たマグネトプラズモンモード (4.126)(4.127) の適用範囲についての一定の基準を得ることに成功した。

³MAGNETIC INDUCTION DEPENDENCE OF THE DISPERSION OF MAGNETOPLASMON IN A TWO-DIMENSIONAL ELECTRON GAS WITH FINITE LAYER THICKNESS, T. UCHIDA, N. HIRAIWA, K. YAMADA, M. FUJITA and T. TOYODA, International Journal of Modern Physics B, Vol. 28, No. 6 (2014) 1450044, Copyright©2014 World Scientific Publishing Company

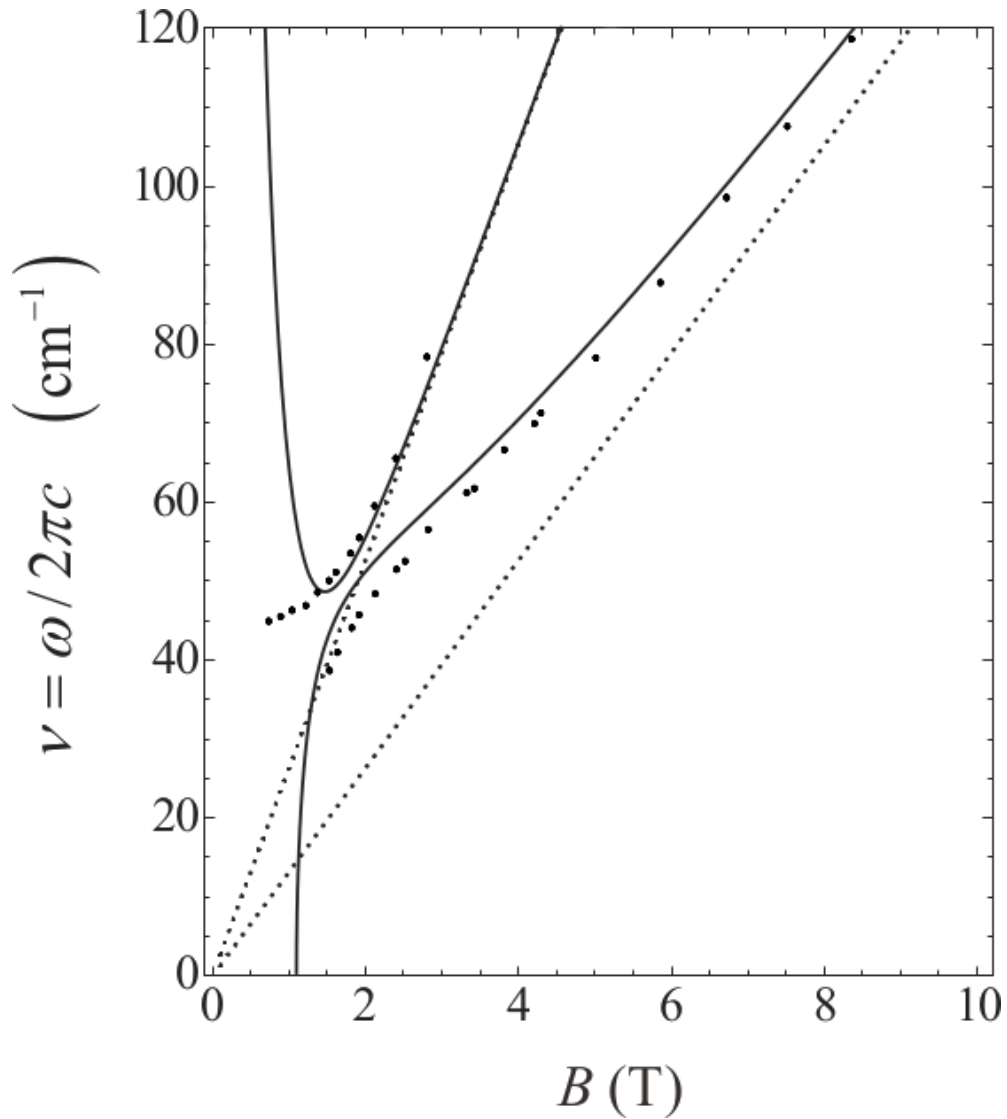


図 5.1: $q_1 = 0.72 \times 10^5 \text{ (cm}^{-1}\text{)}$ におけるマグネトプラズモンモード $\nu(B, q_1)$ の B 依存性のプロット 太線は式 (5.9) で得た理論的モード $\nu_{\pm}(B, q_1)$ である。濃い点は測定値 (文献 [40] の図 7) である。2 本の細点線はそれぞれサイクロトロン振動数 $\omega_C/2\pi c$ 及び $2\omega_C/2\pi c$ である。本図は文献 [77] より引用した³。

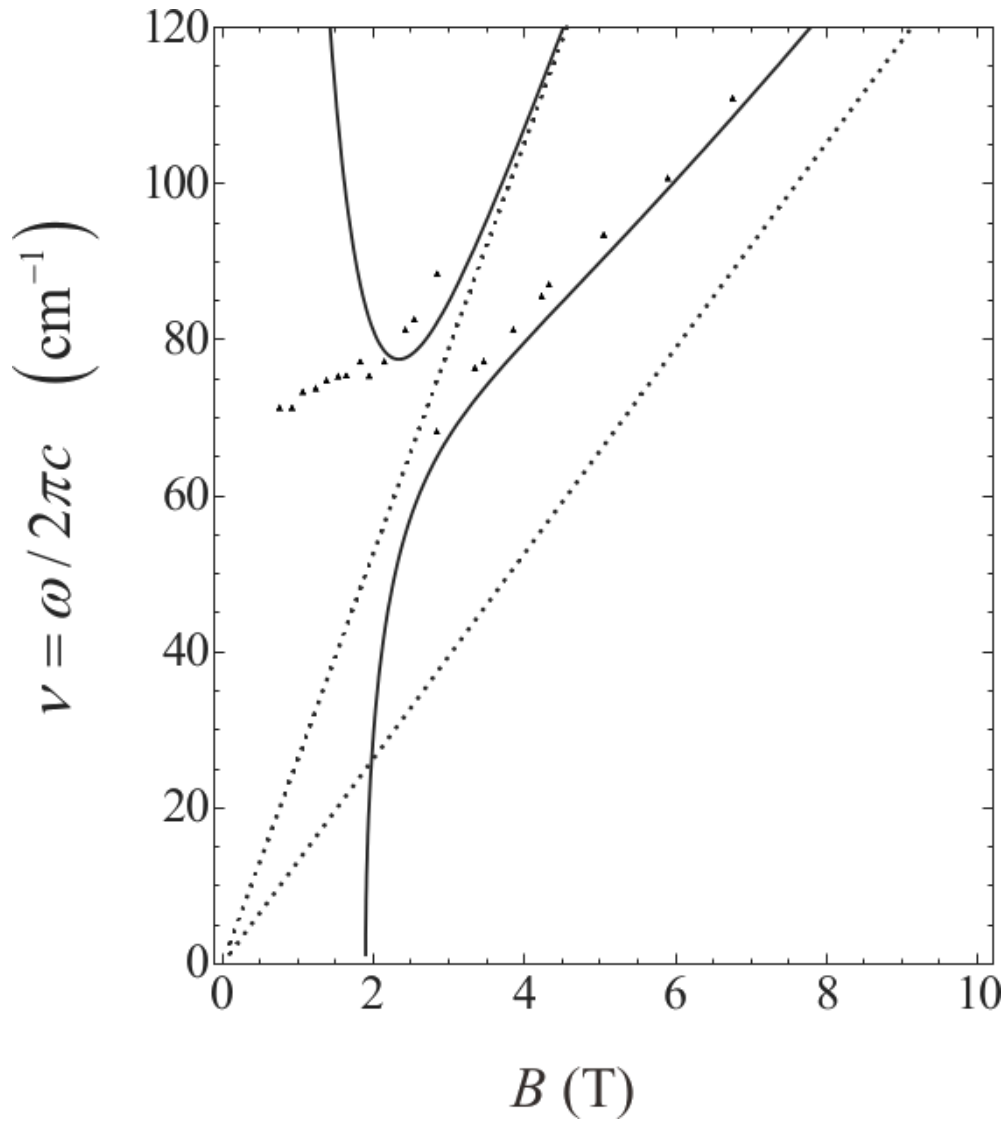


図 5.2: $q_2 = 1.44 \times 10^5 \text{ (cm}^{-1}\text{)}$ におけるマグネトプラズモンモード $\nu(B, q_2)$ の B 依存性のプロット 太線は式 (5.9) で得た理論的モード $\nu_{\pm}(B, q_2)$ である。濃い点は測定値 (文献 [40] の図 7) である。2 本の細点線はそれぞれサイクロトロン振動数 $\omega_C/2\pi c$ 及び $2\omega_C/2\pi c$ である。本図は文献 [77] より引用した³

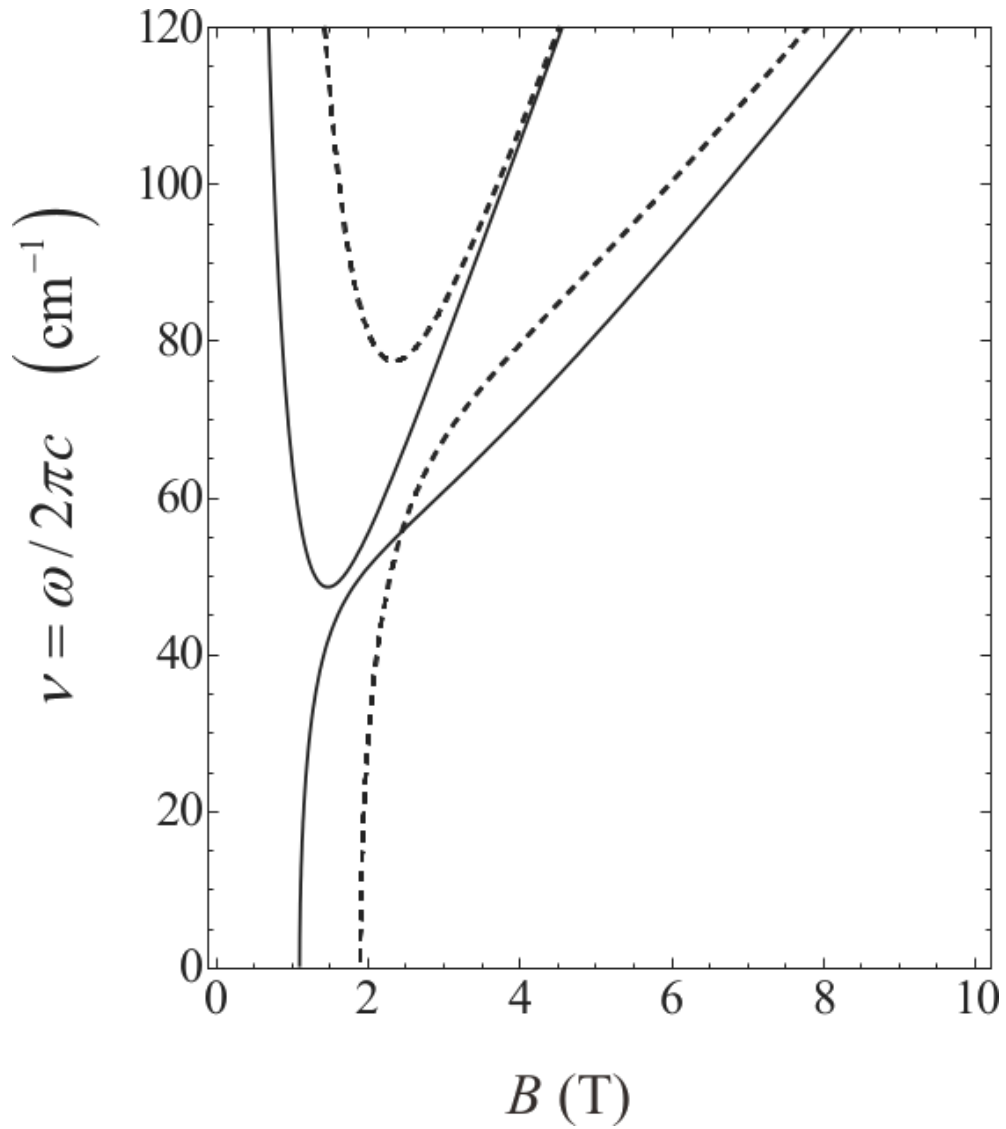


図 5.3: 式 (5.9) で得た理論的モード $\nu_{\pm}(B, p)$ のプロット 太線は $q_1 = 0.72 \times 10^5$ (cm^{-1}) におけるマグネトプラズモンモード $\nu_{\pm}(B, q_1)$ 、点線は $q_2 = 1.44 \times 10^5$ (cm^{-1}) におけるマグネトプラズモンモード $\nu_{\pm}(B, q_1)$ である。本図は文献 [77] より引用した³。

第6章 結論

本論文では、強磁場下2次元電子系の量子多体論から出発して自己無撞着線形応答近似を用いることで、2次元電子系におけるマグネトプラズモンの分散関係の式(4.126)(4.127)を導出した。また、得られたマグネトプラズモンの分散関係(4.126)(4.127)をBatke等によって測定された値と比較した[40]。Batke等は測定したマグネトプラズモンの振動数を磁場 B の関数としてプロットしており[40]、我々はこの結果と第4章で得たマグネトプラズモンの分散関係を比較した。比較の際、2次元電子系の電子数密度 N_{2DES} がサンプルの材質によって決定され、化学ポテンシャル μ が磁場 B 、温度 T 、サンプルの電子数密度 N_S の関数 $\mu = \mu(B, T, N_S)$ として与えられると仮定した。この仮定を用いて、導出した分散関係(4.126)(4.127)及びBatke等による測定結果を図5.1図5.2にプロットした。結果、導出した分散関係(4.126)(4.127)が強磁場下($B_C < B$)において測定結果をよく説明することが示された。また、測定結果と理論曲線のずれが生じる磁場の大きさ B_C の波数依存性 $B_C = B_C(p)$ を定性的に示し、理論的分散関係の式(4.126)(4.127)の実験への適用に一定の基準を示した。

最後に今後の展望について述べる。

今後の課題の1つは、マグネトプラズモン分散関係に対する温度の寄与を考察することである。今回我々は、得たマグネトプラズモンの分散関係(4.126)(4.127)と実験を比較する際、温度を極低温($T \rightarrow 0$)として係数 A_2 の値を計算した。温度が有限の値を持つ場合、 A_2 の値を計算するためには、式(5.5)で書かれたフェルミ分布関数の和と電子数密度に関する方程式を化学ポテンシャルについて解く必要がある。しかし、一般にこの方程式を解くことは困難である。解法の1つとしては、Sommerfeld展開を用いた方法が考えられる。Sommerfeld展開を用いれば化学ポテンシャルの温度依存性が近似的に得られるため、それを用いて有限温度でのマグネトプラズモン分散関係を議論できると予想される。

他の課題としては、グラフェン2次元電子系におけるマグネトプラズモン分散関係の導出がある。第2章で紹介したようにグラフェンの2次元電子系ではハミルトニアンが2次元零質量ディラック型になる [39]。また、グラフェンに垂直な静磁場を印加したとき、零質量ディラックハミルトニアンは、ランダウ準位の波動関数で場の演算子を展開することにより、式 (2.141) で示したように対角化される。このハミルトニアンを用いて、自己無撞着線形応答近似の下、グラフェンのマグネトプラズモンの分散関係を導出することを試みたい。ここで、グラフェンでは、ハミルトニアンの固有値 ϵ_n が式 (2.127) で書かれたように、ランダウ準位 n の平方根に比例している。これは一般の2次元電子系では応答関数にランダウ準位の差が現れるが、グラフェンではランダウ準位の平方根の差が現れることを意味している。即ち、マグネトプラズモンの分散関係を解析的に得ることが非常に困難になる。よって、マグネトプラズモン分散関係の導出の方法として計算機による数値計算も視野に入れて研究を行いたい。

参考文献

- [1] K. von Klitzing, G. Dorda and M. Pepper, Phys. Rev. Lett. **45**, 494 (1980).
- [2] T. Ando, Y. Matsumoto and Y. Uemura, J. Phys. Soc. Jpn. **39**, 279 (1975).
- [3] M. Büttiker, Phys. Rev. B **38**, 9375 (1988).
- [4] R. B. Laughlin, Phys. Rev. B **23**, 5632 (1981).
- [5] B. I. Halperin, Helvetica Physica Acta **56**, 1079 (1983).
- [6] H. Aoki and H. Kamimura, Solid State Commun. **21**, 45 (1977)
- [7] G. A. Baraff and D. C. Tsui, Phys. Rev. B **24**, 2274 (1981).
- [8] T. Toyoda, V. Gudmundsson and Y. Takahashi, Phys. Lett. A **102**, 130 (1984).
- [9] T. Toyoda, V. Gudmundsson and Y. Takahashi, Physica A **132**, 164 (1985).
- [10] T. Toyoda, Mod. Phys. Lett. B **24**, 1923 (2010).
- [11] T. Toyoda, N. Hiraiwa, T. Fukuda and H. Koizumi, Phys. Rev. Lett. **100**, 036802 (2008).
- [12] T. Toyoda and C. Zhang, Phys. Lett. A **376**, 616 (2012).
- [13] K. Yamada, T. Uchida, J. Iizuka, M. Fujita and T. Toyoda, Solid State Commun., **155**, 79 (2013).

- [14] T. Toyoda, M. Fujita, T. Uchida, N. Hiraiwa, T. Fukuda, H. Koizumi and C. Zhang, *Phy. Rev. Lett.* **111**, 086801 (2013).
- [15] S. Holland, Ch. Heyn, D. Heitmann, E. Batke, R. Hey, K. J. Friedland and C.-M. Hu, *Phy. Rev. Lett.* **93**, 186804 (2004).
- [16] P. Hawrylak, G. Eliasson and J. J. Quinn, *Phys. Rev. B* **37**, 10187 (1988).
- [17] J. J. Quinn and R. A. Ferrell, *Phys. Rev.* **112**, 812 (1958).
- [18] F. Stern, *Phys. Rev. Lett.* **18**, 546 (1967).
- [19] R. A. Ferrell, *Phys. Rev.* **111**, 1214 (1958).
- [20] A. K. Rajagopal, *Phys. Rev. B* **15**, 4264 (1977).
- [21] S. Das Sarma and A. Madhukar, *Phys. Rev. B* **23**, 805 (1981).
- [22] U. Mackens, D. Heitmann, L. Prager, J. P. Kotthaus and W. Beinvoogl, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 1485 (1984).
- [23] G. Eliasson, P. Hawrylak and J. J. Quinn, *Phys. Rev. B* **36**, 7631 (1987).
- [24] X. Zhu, X. Xia, J. J. Quinn and P. Hawrylak, *Phys. Rev. B* **38**, 5617 (1988).
- [25] D. Antoniou, A. H. MacDonald and J. C. Swihart, *Phys. Rev. B* **41**, 5440 (1990).
- [26] P. Hawrylak, *Phys. Rev. B* **42** 8986 (1990).
- [27] H. Shi and A. Griffin, *Phys. Rev. B* **44**, 11977 (1991).
- [28] A. S. Bhatti, D. Richards, H. P. Hughes, D. A. Ritchie, J. E. F. Frost and G. A. C. Jones, *Phys. Rev. B* **51**, 2252 (1995).
- [29] T. Toyoda, V. Gudmundsson, and Y. Takahashi, *Physica A* **127**, 529 (1984).

- [30] T. Toyoda, *Physica A* **253**, 498 (1998).
- [31] T. Fukuda and T. Toyoda, *Phys. Rev. B* **70**, 205117 (2004).
- [32] T. Toyoda and T. Fukuda, *Phys. Rev. B* **71**, 205312 (2005).
- [33] T. Fukuda, N. Hiraiwa, T. Mitani, and T. Toyoda, *Phys. Rev. B* **76**, 033416 (2007).
- [34] T. Toyoda, *Ann. Phys.* **173**, 226 (1987).
- [35] 豊田正, *科学 (岩波書店)* Vol.60, No.3, 164 (1990).
- [36] 豊田正, *日本物理学会誌* Vol. 43, No. 12, 931 (1988).
- [37] T. Toyoda and M. Okada, *Phys. Rev. B* **58**, 1210 (1998).
- [38] T. Toyoda, *Phys. Rev. A* **39**, 2659 (1989).
- [39] G. W. Semenoff, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 2449 (1984).
- [40] E. Batke, D. Heitmann and C. W. Tu, *Phys. Rev. B* **34**, 6951 (1986).
- [41] P. Bloom, *Phys. Rev. B* **12**, 125 (1975).
- [42] A. Isihara and T. Toyoda, *Phys. Rev. B* **21**, 3358 (1980).
- [43] P. Hawrylak, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 485 (1987).
- [44] S. Yarlagadda and G. F. Giuliani, *Phys. Rev. B* **40** 5432 (1989).
- [45] T. Uenoyama and L. J. Sham, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 1048 (1990).
- [46] W. Stephan and P. Horsch, *Phys. Rev. B* **42**, 8736 (1990).
- [47] P. Hawrylak, *Phys. Rev. B* **44**, 3821 (1991).
- [48] G. E. W. Bauer, *Phys. Rev. B* **45**, 9153 (1992).
- [49] W. Xu, *J. Phys.: Condens. Matter* **13**, 3717 (2001).
- [50] K. von Klitzing, *Rev. Mod. Phys.* **58**, 519 (1986).

- [51] T. Ando, A. B. Fowler and F. Stern, *Rev. Mod. Phys.* **54**, 437 (1982).
- [52] 東京大学物性研究所 編, “物性科学辞典”, (東京書籍, 東京, 1996).
- [53] 日本物理学会 編, “半導体超格子の物理と応用”, (培風館, 東京, 1984).
- [54] K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov, D. Jiang, Y. Zhang, S. V. Dubonos, I. V. Grigorieva and A. A. Firsov, *Science* **306**, 666 (2004).
- [55] P. R. Wallace, *Phys. Rev.* **71**, 622 (1947).
- [56] K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov, D. Jiang, M. I. Katsnelson, I. V. Grigorieva, S. V. Dubonos and A. A. Firsov, *Nature* **438**, 197 (2005).
- [57] K. S. Novoselov, Z. Jiang, Y. Zhang, S. V. Morozov, H. L. Stormer, U. Zeitler, J. C. Maan, G. S. Boebinger, P. Kim and A. K. Geim, *Science* **315**, 1379 (2007).
- [58] A. K. Geim and K. S. Novoselov, *Nature Materials* **6**, 183 (2007).
- [59] A. H. C. Neto, F. Guinea, N. M. R. Peres, K. S. Novoselov and A. K. Geim, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 109 (2009).
- [60] D. S. L. Abergela, V. Apalkov, J. Berashevich, K. Ziegler and T. Chakraborty, *Adv. Phys.* **59**, 261 (2010).
- [61] A. L. Fetter and J. D. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems*, (McGraw-Hill, New York, 1971).
- [62] ア・アブリゴソフ, エ・リ・ゴリコフ, イ・ジャロシンスキー, “統計物理学における場の量子論の方法”, (東京図書, 東京, 1970).
- [63] D. J. Thouless, *THE QUANTUM MECHANICS OF MANY-BODY SYSTEMS*, (ACADEMIC PRESS, New York and London, 1972).
- [64] 高橋康, “物性研究者のための場の量子論 I”, (培風館, 東京, 1974).

- [65] 高橋康, “物性研究者のための場の量子論 II”, (培風館, 東京, 1974).
- [66] 湯川秀樹・豊田利幸 編集, “岩波講座 現代物理学の基礎 [第2版]3 量子力学 I”, (岩波書店, 東京, 1978).
- [67] 石原明・和達三樹 編著, “新しい物性”, (共立出版, 東京, 1990).
- [68] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products* (Academic Press, New York, 1965).
- [69] R. Kubo, J. Phys. Soc. Jpn. **12**, 570 (1957).
- [70] 豊田正, “場の量子論講義ノート (仮題) (原稿)”, (2011).
- [71] M. P. Greene, H. J. Lee, J. J. Quinn and S. Rodriguez, Phys. Rev. **177**, 1019 (1969).
- [72] N. Hiraiwa, “2DES 計算ノート”, (2008).
- [73] 森口, 宇田川, 一松, “岩波 数学公式 I”, (岩波書店, 東京, 1956).
- [74] 森口, 宇田川, 一松, “岩波 数学公式 II”, (岩波書店, 東京, 1956).
- [75] N. J. M. Horing and M. Yildiz, Phys. Lett. A **44**, 386 (1973).
- [76] I. B. Bernstein, Phys. Rev. **109**, 10 (1958).
- [77] T. Uchida, N. Hiraiwa, K. Yamada, M. Fujita and T. Toyoda, Int. J. Mod. Phys. B **28**, 1450044 (2014).