論 文 の 内 容 の 要 旨

論文題目 「The cut locus of a certain class of cylinders（柱面からなるある族の最小跡）」

学位申請者 Pakkinee Chitsakul

キーワード：Cut point, Cut locus, Half period function, Cylinder of revolution

ポアンカレが最初に、最小跡の概念を導入した。 彼は単連結完備実解析的な2次元リーマン多様体のある点の最小跡を研究した。彼の研究から30年後にマイヤーズとホワイトヘッドは、2次元多様体の最小跡の詳細な構造を研究した。マイヤーズは実解析的な2次元コンパクトなリーマン多様体上の最小跡が有限グラフになることを証明した。ホワイトヘッドは最小跡までの距離関数が連続であることを一般次元のリーマン多様体に対して証明した。 1994年に、ヘブダは完備な2次元リーマン多様体の最小跡は局所樹木構造をもつことを証明した。彼の結果は、塩濱と田中によりアレクサンダー曲面のコンパクトな集合の最小跡の最小跡に対して拡張された。

リーマン多様体の最小跡の構造を決めることは非常に難しい問題である。1980年にエルラスが回転二葉双曲面と回転放物面の最小跡の構造の決定に成功して以来、回転2次曲面の最小跡の構造が研究された。 彼の研究以降、2次曲面や標準的トーラスの最小跡の構造が伊藤、清原、シンクレア、田中らにより決定された。

回転柱面 $(M, ds^2) = (R^1 \times S^1, dt^2 + m(t)^2 d\theta^2)$ に関しては、辻により最初に、ガウス曲率が上半子午線にそって単調減少なる場合に於いて、赤道上の点の最小跡の構造が決定された。ここで、赤道とは、柱面の平行円 t=0 でこれに関する折り返しをもつようなものを言う。2003年に，田村は赤道以外に測地線となるような平行円が存在しないという仮定下で、最小跡の構造を決定した。

第１章では最小跡の歴史が述べられている。本学位論文の目的も述べられている。すなわち、第３章と第４章において柱面からなるある族に対する最小跡の構造定理が紹介される。

第２章ではリーマン多様体の一般論が説明されている。最初に、ユークリッド空間内の古典的曲面がリーマン多様体の典型的例として与えられる。例えば、回転柱面が紹介される。ガウス曲率がゼロである回転柱面と球面上の測地線が研究されている。ガウス曲率がゼロの回転柱面上の測地線は、常

螺旋または平行円のみであり、球面上の測地線は大円のみであることが証明される。また、測地線、ガウス曲率、最小点、最小跡、共役点が紹介される。ホップーリノウの定理やスツルムの比較定理などいくつかの定理が議論される。

第３章では、最小跡の構造定理がのべられる。ガウス曲率が各上半子午線に沿って単調減少であることを仮定して、まず、赤道上のある点の最小点が赤道と真向かいの子午線を除き存在しないことを証明し、半周期関数が単調減少であることが証明される。ここで、スツルムの比較定理（または、ラウチの比較定理）が用いられる。各点 q の最小跡は対蹠平行円の部分孤と真向かいの子午線の和集合からなることと、点 q が赤道から遠い場合は、最小跡は真向かいの子午線のみからなることが主定理として述べられる。

第４章では、ガウス曲率の単調性を仮定せずに半周期関数が単調減少であることと、ガウス曲率が $t^{-1}(-\infty,-t_0)\cup t^{-1}(t_0,\infty)$ (ただし、t_0 は m' の最初の零点を表す)上で非正であることを仮定し最小跡は同じ構造をもつことが証明される。

第５章では。３章と４章における主定理が纏められている。第４章で紹介された柱面からなるある族は非常に重要な例である。この族の各柱面の半周期関数は、単調減少であるが、ガウス曲率は単調ではない。また、ユークリッド空間内に実現できるとは限らない柱面が存在するが、ある柱面はユークリッド空間内に実現されることが注意されている。