

パラメータをもつ拘束条件付最小2乗フィルタを用いた デジタル画像の復元法

熱田清明*・近藤正三**

Digital Image Restoration by a Parametric Constrained Least Squares Filter

by

Kiyoaki ATSUTA and Shozo KONDO

(Received on Sept. 21, 1984)

Abstract

The constrained least squares filter (CLSF) proposed by B.R. Hunt can obtain restoration images with good quality for a small amount of a priori knowledge required. But Hunt's CLSF has some defect that causes to arise degradation of outlines in restoration images.

In this paper, in order to overcome this defect, the restoration by CLSF is analyzed in general manner from the viewpoint of the eigenvalue problem and physical meanings of this restoration method are discussed. From this analysis and discussion, the cause for the defect of Hunt's CLSF is made clear, and a new restoration method by a parametric CLSF is proposed.

Finally, some examples of image restoration by the proposed method are presented which proves effectiveness of the method.

1. 緒 言

付加雑音を伴った線形空間劣化画像を復元するいくつかのフィルタがある。すなわち、逆フィルタ、ウィーナフィルタ、カルマンフィルタ、拘束条件付最小2乗フィルタなどである。これらのフィルタの中で拘束条件付最小2乗フィルタ (Constrained Least Squares Filtering, 以下 CLSF と略記する) は²⁾、原画像や付加雑音に関する統計的知識をほとんど必要とせず、しかも比較的良好な結果を得るというすぐれた性質をもっている。しかしながら、CLSF によって復元された画像にはかなりの輪郭ボケが生じる。CLSF による復元におけるこのボケの原因は復元画像に望まれる尺度として、ラプラシアン演算子を用いた画像の滑らかさが使用されているためであ

る。この欠点を取り除く方法を得るためには、ラプラシアン演算子を用いた画像の滑らかさの評価が CLSF による画像復元においてどんな物理的意味をもっているかを綿密に解析することが必要であろう。

本論文では CLSF に対する以上に述べた思想に基づき、以下に列举された項目に関して考察し CLSF の欠点を取り除く新しい方法を提案する；

- (1) 巡回ブロックをもつブロック巡回行列の理論を用いて CLSF による画像復元問題を固有値問題の立場から一般的に定式化し解析する。
- (2) CLSF の雑音除去に対する機能の物理的な意味を明らかにする。
- (3) (1), (2)の検討に基づいて、CLSF による復元画像に生じる輪郭ボケを除去する新しい方法を提案する。

* 工学研究科修士課程電気工学専攻

** 工学部通信工学科助教授

(4) この新しい画像復元法の有効性を実験によって検証する。

Hunt の論文においても上記の項目(1)に類似する考察をすることができるが²⁾、それは単に数値計算上の手段を得るための考察である。本論文は、CLSF による画像復元法の雑音除去の機能およびその能力の物理的な意味を明らかにする(項目(2))のために、固有値問題の立場から一般的に CLSF による画像復元問題を定式化し解析する(項目(1))という思想によっている。本論文で提案された新しい復元法は Hunt の方法と類似の計算法によって復元画像を得ることができる。この新しい方法による復元画像には輪郭ボケがほとんど見られず、Hunt の方法のもつ欠点が克服されている。

2. 問題の定式化

2.1 CLSF による画像復元の一般的定式化

本論文においては、2次元格子状の $M(=m_1 \times m_2)$ 個の画素よりなるデジタル画像の全体が複素数体 $\mathbf{C}$ 上の M 次元の列ベクトル全体のなす空間；

$$\mathbf{C}^M = \{x = [x_1, x_2, \dots, x_M]^T \mid x_i \in \mathbf{C}, 1 \leq i \leq M\}, \quad (2.1)$$

によって表わされるものとする*。

また、 $\mathbf{C}^M$ には内積 (x, y) およびノルム $\|x\|$ が次式のように定められている；

$$(x, y) = \sum_{i=1}^M x_i \overline{y_i}, \quad (2.2)$$

$$\|x\| = \{(x, x)\}^{\frac{1}{2}}. \quad (2.3)$$

画像 x に対する付加雑音を伴った線形空間劣化画像 y は次式でモデル化されるとする；

$$y = Ax + n. \quad (2.4)$$

ここで、 A は線形空間劣化を表わす $\mathbf{C}^M$ の上の線形作用素であり、 $\mathbf{C}^M$ の自然基底のもとで $M \times M$ 複素行列で表現されているとする。また、 n はランダムな付加雑音を表わすベクトルである。本論文では n の大きさのみが既知であり、それを ε とする；

$$\|n\| = \|Ax - y\| = \varepsilon. \quad (2.5)$$

いま、画像から一定の特徴量を測定する機能を $\mathbf{C}^M$ の上の実数値関数 f で表わすとする。例えば、 Lx を x のラプラシアン画像として、

$$f(x) = \|Lx\|^2, \quad (x \in \mathbf{C}^M), \quad (2.6)$$

と定義すれば、 $f(x)$ は画像 x のある種の滑らかさを表わしている²⁾。以上の用語を用いて CLSF による画像復元問題を定式化すると次のようになる；

〔CLSF による画像復元問題の定式化〕

行列 A を既知として、条件式 (2.5) のもとで $f(x)$ を最小〔または最大〕とする x の推定 $\hat{x}$ をもとめよ。

以下、この定式化のもとで CLSF による画像復元問題を具体的に検討していく。

2.2 具体的問題における仮定

CLSF による画像復元問題を具体的に考察するために、以下に示す (c-1)、(c-2) の仮定を設ける。移動不変な線形空間劣化の CLSF を用いた復元問題はほとんどすべてこの仮定のもとで考察できよう。

(c-1) 線形空間劣化は移動不変である。この仮定から、式 (2.4) の行列 A は巡回ブロックをもつブロック巡回行列 (Block Circulant with Circulant Block; BCCB と略記) によって表現することが可能となる²⁾。

(c-2) 画像の特徴量を測定する機能 f は次式で表わされる；

$$f(x) = \sum_{k=1}^l c_k \|B_k x\|^2, \quad (2.7)$$

$$(c_k \in \mathbf{R}, 1 \leq k \leq l).$$

ここで、 $B_k (1 \leq k \leq l)$ は BCCB であるとする。例えば、式 (2.6) における x のラプラシアン画像を作る演算子 L は BCCB で表わすことができる²⁾。

以上の2つの仮定 (c-1)、(c-2) から行列 A 、 $B_k (1 \leq k \leq l)$ は次のようにかける；

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_{m_1} \\ A_{m_1} & A_1 & \dots & A_{m_1-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_2 & A_3 & \dots & A_1 \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

$$A_i = \begin{pmatrix} a(i, 1) & a(i, 2) & \dots & a(i, m_2) \\ a(i, m_2) & a(i, 1) & \dots & a(i, m_2-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a(i, 2) & a(i, 3) & \dots & a(i, 1) \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

$$(1 \leq i \leq m_1, a(i, j) \in \mathbf{C}, \\ (1 \leq j \leq m_2)),$$

$$B_k = \begin{pmatrix} B_1^k & B_2^k & \dots & B_{m_1}^k \\ B_{m_1}^k & B_1^k & \dots & B_{m_1-1}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_2^k & B_3^k & \dots & B_1^k \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

$$B_i^k = \begin{pmatrix} b^k(i, 1) & b^k(i, 2) & \dots & b^k(i, m_2) \\ b^k(i, m_2) & b^k(i, 1) & \dots & b^k(i, m_2-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b^k(i, 2) & b^k(i, 3) & \dots & b^k(i, 1) \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

$$(1 \leq k \leq l, 1 \leq i \leq m_1, b^k(i, j) \in \mathbf{C},$$

* 実際の画像の濃度は実数値であるが、解析の便宜のため濃度を複素数値にまで拡張した。実際の問題への適用には支障はない。

$$(1 \leq j \leq l)).$$

A と B_k ($1 \leq k \leq l$) が BCCB であることから、これらに対して次の性質がいえる³⁾;

(a) A, B_k ($1 \leq k \leq l$) は正規行列である。すなわち、

$$A^*A = AA^*, \quad B_k^*B_k = B_kB_k^* \quad (1 \leq k \leq l).$$

(b) $A, B_1, B_2, \dots, B_l$ は互いに可換である。すなわち、 $AB_k = B_kA, B_kB_j = B_jB_k$ ($1 \leq k, j \leq l$)。

上の(a), (b)の性質から、 $A, B_1, B_2, \dots, B_l$ は共通の固有ベクトル $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_M$ をもつ、これらの $\mathbf{C}^M$ の正規直交基を形成すると仮定することができる⁴⁾。いま、 φ_i に対する A, B_k の固有値を λ_i, μ_{ki} ($1 \leq i \leq M, 1 \leq k \leq l$) とする。画像 x は $\{\varphi_i\}_{i=1}^M$ を用いると、

$$x = \sum_{i=1}^M x_i \varphi_i, \quad (x_i = (x, \varphi_i), 1 \leq i \leq M), \quad (2.12)$$

のように展開されるから、 Ax は次のようにかける；

$$Ax = \sum_{i=1}^M x_i A \varphi_i = \sum_{i=1}^M \lambda_i x_i \varphi_i. \quad (2.13)$$

式 (2.13) および $y = \sum_{i=1}^M y_i \varphi_i$ ($y_i = (y, \varphi_i), 1 \leq i \leq M$) より、条件式 (2.5) は次のように書きかえることができる。

$$\sum_{i=1}^M |y_i - \lambda_i x_i|^2 = \varepsilon^2. \quad (2.14)$$

同様にして次式がでる。

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^l c_k \|B_k x\|^2 \\ &= \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^M c_k |\mu_{ki}|^2 |x_i|^2. \end{aligned} \quad (2.15)$$

したがって、CLS F の問題は以上の用語を用いると、次のように表現できる。すなわち、CLS F による画像復元問題は条件式 (2.14) のもとで、式 (2.15) で与えられる $f(x)$ を最小にする x の推定 $\hat{x}$ を求める問題である。

3. CLS F の物理的意味

CLS F による画像復元における推定画像 $\hat{x}$ をラグランジュ乗数法を用いて求める。

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^M c_k |\mu_{ki}|^2 |x_i|^2 \\ &\quad + \nu \left(\sum_{i=1}^M |y_i - \lambda_i x_i|^2 - \varepsilon^2 \right), \end{aligned} \quad (3.1)$$

とおく。ここで、 $\nu \in \mathbf{R}$ はラグランジュ乗数である。 $x \in \mathbf{C}^M$ の各成分を実数部および虚数部に分けて次のように表現する；

$$\begin{aligned} x &= [x_1, x_2, \dots, x_M]^T, \\ x_i &= \alpha_i + j\beta_i, \quad (\alpha_i, \beta_i \in \mathbf{R}, 1 \leq i \leq M). \end{aligned} \quad (3.2)$$

このとき、推定画像 $\hat{x}$ は条件式 (2.14) のもとで、

$$\frac{\partial F(x)}{\partial \alpha_i} = 0, \quad \frac{\partial F(x)}{\partial \beta_i} = 0, \quad (1 \leq i \leq M), \quad (3.3)$$

を満たす $\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_i$ ($1 \leq i \leq M$) より求めることができる。式 (3.3) より次式が得られる。

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=1}^l c_k |\mu_{ki}|^2 \alpha_i - 2\nu \operatorname{Re}[y_i \lambda_i] \\ + 2\nu |\lambda_i|^2 \alpha_i &= 0, \\ 2 \sum_{k=1}^l c_k |\mu_{ki}|^2 \beta_i - 2\nu \operatorname{Im}[y_i \lambda_i] \\ + 2\nu |\lambda_i|^2 \beta_i &= 0, \end{aligned} \quad (1 \leq i \leq M).$$

したがって、

$$\left. \begin{aligned} \hat{\alpha}_i &= \frac{\hat{\nu} \operatorname{Re}[y_i \lambda_i]}{\sum_{k=1}^l c_k |\mu_{ki}|^2 + \hat{\nu} |\lambda_i|^2}, \\ \hat{\beta}_i &= \frac{\hat{\nu} \operatorname{Im}[y_i \lambda_i]}{\sum_{k=1}^l c_k |\mu_{ki}|^2 + \hat{\nu} |\lambda_i|^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

これより、 $\hat{x}$ は次式で与えられる；

$$\begin{aligned} \hat{x}_i &= \hat{\alpha}_i + j\hat{\beta}_i \\ &= \frac{\hat{\nu} \bar{\lambda}_i}{\sum_{k=1}^l c_k |\mu_{ki}|^2 + \hat{\nu} |\lambda_i|^2}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$(1 \leq i \leq M).$$

ここで、 $\hat{\nu}$ は条件式 (2.14) を満足するラグランジュ乗数である。このとき、式 (2.4) の劣化モデルのもとで式 (3.5) で与えられる復元画像 $\hat{x}$ に対して、付加雑音は次式のように評価されている；

$$\hat{n} = [\hat{n}_1, \hat{n}_2, \dots, \hat{n}_M]^T = y - A\hat{x}, \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \hat{n}_i &= y_i - \frac{\hat{\nu} |\lambda_i|^2}{\sum_{k=1}^l c_k |\mu_{ki}|^2 + \hat{\nu} |\lambda_i|^2} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^l c_k |\mu_{ki}|^2}{\sum_{k=1}^l c_k |\mu_{ki}|^2 + \hat{\nu} |\lambda_i|^2} y_i, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$(1 \leq i \leq M).$$

ところで、 $\hat{n}$ は条件式 (2.14) を満たしているから、式 (3.6) を式 (2.14) に代入すると次式が得られる；

$$\sum_{i=1}^M \left[\frac{\sum_{k=1}^l c_k |\mu_{ki}|^2}{\sum_{k=1}^l c_k |\mu_{ki}|^2 + \hat{\nu} |\lambda_i|^2} \right]^2 |y_i|^2 = \varepsilon^2. \quad (3.8)$$

式 (3.7), (3.8) から分かるように CLS F による画像復元法は、雑音の全エネルギーが ε^2 という条件のもとで雑音の各成分を式 (3.7) のように評価し、したがって、雑音の全エネルギーを各成分に式 (3.7) で与えられる形で分配するものと考えられる。この分配特性は明らかに式 (2.7) で与えられる関数 f に依存するものであり、 f を変化させることにより分配の特性が制御できることが

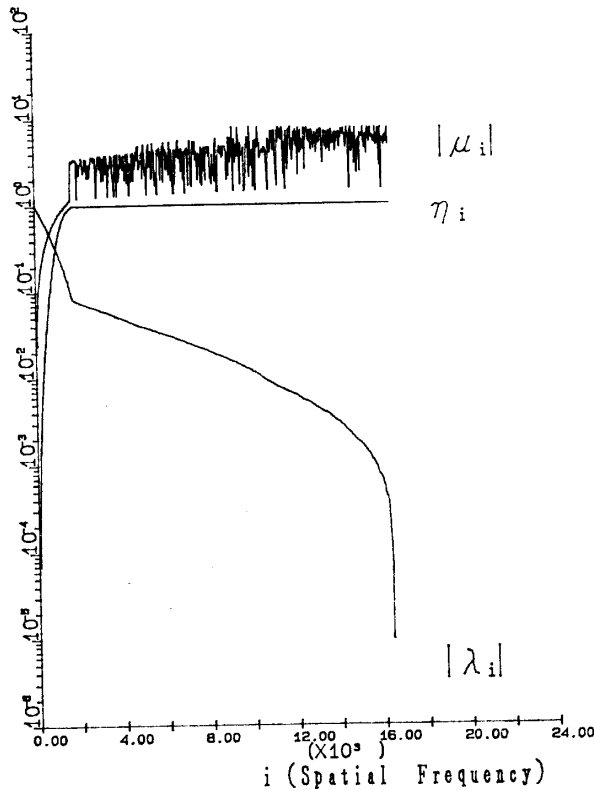


Fig. 3.1 Spatial frequency characteristics of $|\lambda_i|$, $|\mu_i|$ and η_i .

分かる。

上述の考察に基づき, B.R. Hunt の CLSF の物理的意味を次に示す²⁾. Hunt の CLSF は式 (2.7) の関数 f が,

$$f(x) = \|Lx\|^2, \quad (3.9)$$

と定義された場合に相当する。ここで, L はラプラシアン演算子である。 $\{\varphi_i\}_{i=1}^M$ に対応する L の固有値を μ_i ($1 \leq i \leq M$) とすると, 式 (3.7) より,

$$\hat{n}_i = \eta_i y_i, \quad (3.10)$$

$$\eta_i = \frac{|\mu_i|^2}{|\mu_i|^2 + \hat{\nu} |\lambda_i|^2}, \quad (3.11)$$

$$(1 \leq i \leq M),$$

となる。このとき, η_i は $0 \leq \eta_i \leq 1$ であり, 劣化画像の成分 y_i のうち雑音とみなされる部分の割合を表している。

さて, いま劣化を表す行列 A の階数を r とする ($r \leq M$)。このとき, A の固有値は次のように絶対値の大きい順に並べることができる;

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_r| > |\lambda_{r+1}| = \dots = |\lambda_M| = 0. \quad (3.12)$$

いま, 固有値 λ_i には固有ベクトル φ_i が対応しているとす。劣化行列 A は一種の低域通過フィルタと考えられるから, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_M$ は空間周波数が高くなる順に並んでいると考えることができる。逆にラプラシアン演算子 L は一種の高域通過フィルタと考えられるから, 固有

ベクトル φ_i に対応する L の固有値 μ_i の絶対値 $|\mu_i|$ は一般に $|\lambda_i|$ の大きさの順序とは逆になる (Fig. 3.1)。したがって, 式 (3.11) で与えられる η_i は Fig. 3.1 のようになる。すなわち, η_i の大きさは i が大きくなるにつれて, すなわち周波数が高くなるにつれて大きくなり, さらに $\eta_i = 1$ ($i \geq r+1$) となる。この事実は次のように解釈できる。すなわち, 周波数が高いほど劣化画像の成分 y_i のうちに占める雑音の比率が大きくなり, $i \geq r+1$ では成分 y_i がすべて雑音と評価される。Fig. 3.1 から明らかなように Hunt の CLSF の場合, η_i 曲線はかなり高周波の方向にかたよっている。すなわち, 一部の低周波成分を除いて η_i はほとんど 1 になっている。このことは Hunt の CLSF が劣化画像の高周波成分を過度に雑音として除去する傾向を持っていることを示している。この事実が Hunt の CLSF による復元画像に輪郭ボケを生じる原因である。したがって, 輪郭ボケが生じないようにするためには, 式 (3.9) で与えられる $f(x)$ の代りに他の関数を用いて η_i 曲線の高周波方向へのかたよりを制御すればよいことが分かる。

4. CLSF による新しい画像復元

前章で行なった考察から, Hunt の CLSF による画像復元の欠点を改善するためには, 式 (2.7) で定義される関数 $f(x)$ を適当に選択して望ましい η_i の周波数特性を得ればよいことが分かった。本論文では, 式 (2.7) の $f(x)$ として次式で与えられるものを用いる;

$$f(x) = \beta \|x\|^2 + \|Lx\|^2. \quad (4.1)$$

このとき, I を $M \times M$ 単位行列とすると, $\|x\|^2 = \|Ix\|^2$ とかける。 I の固有値はすべて 1 であるから式 (3.7) より,

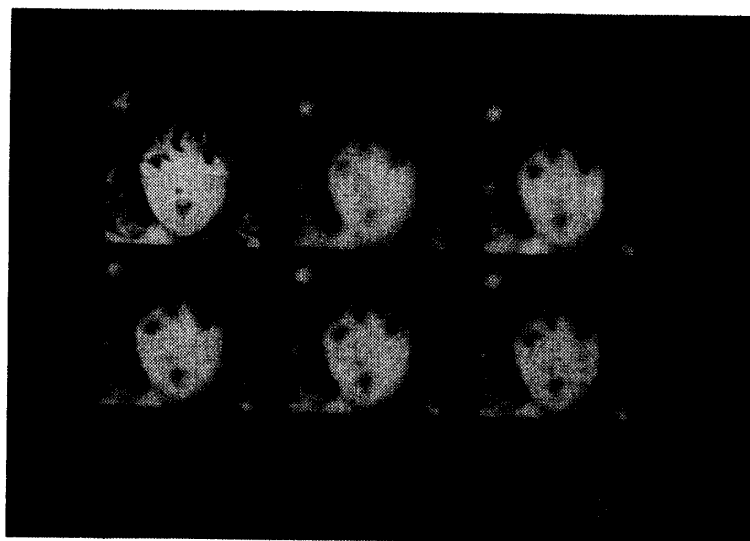
$$\hat{n}_i = \eta_i(\beta) y_i, \quad (4.2)$$

$$\eta_i(\beta) = \frac{(\beta + |\mu_i|^2)}{(\beta + |\mu_i|^2) + \hat{\nu} |\lambda_i|^2}, \quad (4.3)$$

$$(1 \leq i \leq M),$$

となる。前章で述べたように, 式 (4.3) の $\eta_i(\beta)$ は y_i のうちに雑音の占める割合を示すものである。明らかに β を調整することにより $\eta_i(\beta)$ の周波数特性を制御することができる (Fig. 4.1a, 4.1b, 4.1c)。

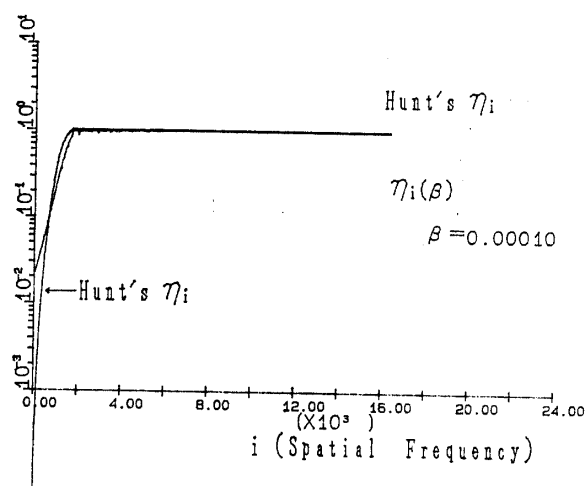
本論文で提案された新しい復元法は次のように定式化できる。すなわち, 画像劣化モデルを式 (2.4) とし, 付加雑音に対する式 (2.5) の拘束条件のもとで, 式 (4.1) で与えられる関数 $f(x)$ を最小とする x の推定 $\hat{x}$ を求める。この復元画像を求める数値計算は Hunt の CLSF 法のそれとほとんど同じである²⁾。すなわち, 拘束条件式 (2.5) のもとで $f(x)$ を最小とする $\hat{x}$ をラグランジュ乗数法で求める。この求解は 2 次元 DFT を用いながら反



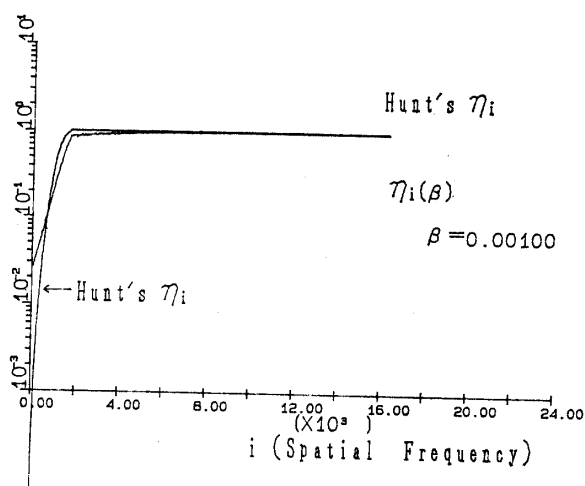
a	b	c
d	e	f

Photo. 4.1 Example of image restoration by the new restoration method compared with Hunt's CLSF.

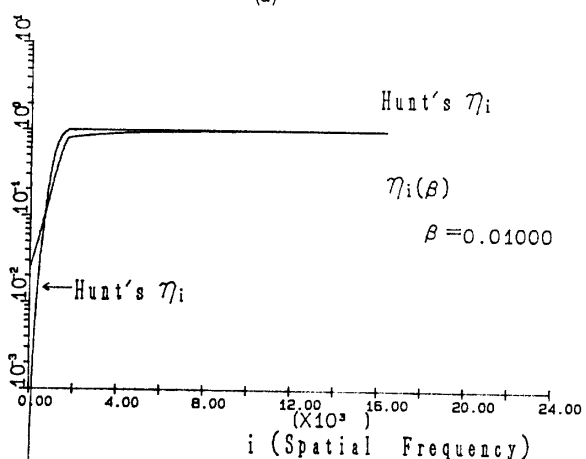
- (a) An original image
 (b) A degraded image
 (c) A restoration image by Hunt's CLSF
 (d), (e), (f) Restoration images by the new restoration method
 (d) $\beta=10^{-4}$ (e) $\beta=10^{-3}$ (f) $\beta=10^{-2}$



(a)



(b)



(c)

Fig. 4.1 Spatial frequency characteristics of $\eta_i(\beta)$ compared with Hun's η_i .

(a) $\beta=10^{-4}$ (b) $\beta=10^{-3}$ (c) $\beta=10^{-2}$

復法でなされる。本論文の復元法に基づく復元画像の導出プロセスは Hunt の CLSF による方法とほとんど同一であるが、後に示される復元例からも明らかなように復元画像に輪郭ボケを生じるという Hunt の CLSF 法の欠点は克服されている。

以上に述べられた新しい復元法を実際の問題に適用してその有効性を検証する。使用する画像は $M=64 \times 64$ ($m_1=m_2=64$) 個の画素からなるとする。空間劣化は 7×7 の窓をもつガウス型の移動不変なものとする。雑音は画素間で相関のない様なランダム雑音とし、 $\|n\|=\varepsilon=40.287$ とする。原画像 x (Photo. 4.1a) に対して、劣化画像 y は Photo. 4.1b に示されている。Photo. 4.1c は Hunt の CLSF による復元画像を表わす。Photo. 4.1d, 4.1e, 4.1f は本論文で提案された式 (4.1) で与えられる関数 $f(x)$ を用いた復元画像である。Photo. 4.1c, 4.1d, 4.1e, 4.1f に対する η_i , $\eta_i(\beta)$ の特性は Fig. 4.1 に示されている。

以上の画像データから明らかなように、Hunt の CLSF による復元画像における輪郭ボケ (Photo. 4.1c) が Photo. 4.1d, 4.1e, 4.1f では著しく改善されている。

5. 結 言

Hunt の拘束条件付最小 2 乗フィルタ (CLSF) の基本的欠点、すなわち復元画像に輪郭ボケが生じるという欠点を取り除くためには、CLSF による復元法の物理的意味を解析することが必要であることが確認された。この思想に基づき CLSF による復元法を特に固有値問題の立場から解析し、次の結論を得た。すなわち、CLSF

による復元法は雑音の全エネルギーを各空間周波数成分にどのように分配するかという問題であること、また Hunt の CLSF による復元法の場合にはこの分配の特性が高周波方向にかたよっていること、このかたよりが復元画像に輪郭ボケを生じる原因となることが明らかとなった。この結論から Hunt の復元法を改善するためには、復元画像に望まれる性質を決める関数 $f(x)$ を適当に選択して雑音の全エネルギーの分配の特性を制御すれば良いことが分かった。最後に $f(x)$ として、非常に単純な形 $f(x)=\beta\|x\|^2+\|Lx\|^2$ をもつ新しい復元法を提案し、実際の画像復元に適用しこの復元法の有効性を確かめた。

付加雑音の全エネルギーの大きさに加えて、その周波数特性が分かっている場合には、 $f(x)$ を適当に選択して雑音の全エネルギーの分配特性をこの雑音の周波数特性に近づければ、CLSF による復元法は著しく効果をあげられると思われる。これは今後の課題である。

参考文献

- 1) A. Rosenfeld and A.C. Kak "Digital Picture Processing" Second edition Vol.1 Academic Press. (1982).
- 2) B.R. Hunt : IEEE Trans. on Computers Vol. C-22, No. 9, pp.805-812 (1973).
- 3) P.J. Davis "Circulant Matrices" John Wiley & Sons (1979).
- 4) 佐武一郎 "線形代数学" 裳華房 (1975).
- 5) K.A. Pines and A.C. Kak : IEEE Trans. Acoust Speech Signal Processing Vol. ASSP-25, No. 4 pp. 346-350 (1970).