

有孔回転円板の固有振動数

(解 析)

竹内生公*・金田彰夫**

Natural Frequency of Rotating Disk with Circular Hole at the Center

(Analysis)

by

Seikou TAKEUCHI and Akio KANEDA

(Received Mar. 28, 1983)

Abstract

The equation of motion of a rotating disk with circular hole at its center is transformed into the equation of Sturm-Liouville type. Using this equation, natural frequencies are obtained by means of Runge-Kutta-Gill's method. The main results obtained are as follows ;

- 1) The larger the inner radius is, the larger the natural frequency becomes.
- 2) For the case when the ratio of inner radius to outer one becomes small, in some number of nodal diameters and some nodal circles, the natural frequencies become nearly constant values.

1. 序 論

回転機械の高速化に伴い、ロータあるいは円板のたわみ振動が問題となってきた。回転運動による円板の強制振動に関するこれまでの研究は調和振動、過渡振動を取扱ったものが多く^{1)~4)}、回転円板の固有振動数についての研究は少ない。等厚回転円板の回転中の固有振動数については Southwell ら^{5),6)}の報告があるが、これは回転円板の中心で固定されている場合のみを取扱っている。しかし、一般に回転円板は回転軸に内周位置(内周半径位置)で固定されている。内周半径位置で固定された回転円板の運動中の固有振動数を求めた報告例はない。

そこで、本論文では内周半径位置で固定された等厚回転円板を対象に回転運動中の固有振動数および振動モードを数値計算により求めることを目的としている。解析にあたっては曲げ剛性を無視したたわみ振動の面内張力を回転円板の半径方向の応力と円周方向の応力におきかえる方法をとっている。そして、解析式の導出と数値計算結果について述べる。

2. 主な使用記号

C_1, C_2 : 境界条件より決まる定数.

E : ヤング率.

n : 節直径の数.

p : 固有角振動数.

r : 半径方向の任意の位置.

r_i : 円板の内周半径.

r_o : 円板の外周半径.

s : 節円の数.

w : z 方向のたわみ変位.

x : r^2/r_o^2 .

θ : 円板の回転角.

κ : 半径の二乗比 ($=r_i^2/r_o^2$).

λ : 固有値.

ν : ポアソン比.

ρ : 円板の密度.

σ_r : 半径方向の応力.

σ_t : 円周方向の応力.

ω : 回転角速度.

* 工学部動力機械工学科専任講師(札幌教養部)

** 工学部動力機械工学科教授

3. 解析式

Fig. 3.1 に回転軸—円板系の座標系を示す。O-XYZ を静止座標系とし、S-xyz を回転軸・円板に固定された運動座標系とする。ここで、Z 軸は軸受中心線に一致させる。z 軸は回転軸の接線方向に一致させ、重心 G は x

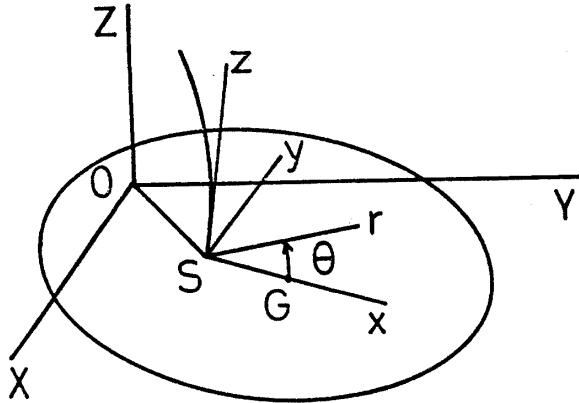


Fig. 3.1 Coordinate system.

軸上に位置するものと仮定する。そして、回転軸中央に等厚円板が固定されているとする。それが中心軸まわりを回転軸と一緒に回転角速度 ω で回転運動をしているときの運動方程式は次式のように表わせる⁵⁾。

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(P \cdot r \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{Q}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}. \quad (3.1)$$

ここで、P と Q は円板の面内張力の半径方向成分と円周方向成分である。ここでは Southwell らと同様の方法をとる。すなわち、P、Q に一平面内で回転する円板に生ずる半径方向の応力 σ_r と円周方向の応力 σ_t を代入することによって解くことにする。

はじめに、 σ_r と σ_t を求める。回転円板の面内変形に関する半径方向の変位 u 、 σ_t および σ_r はそれぞれ次式で示される⁷⁾。

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{C_1}{2} r + \frac{C_2}{r} - \frac{K}{8} r^3, \\ \sigma_t &= \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ (1+\nu) \frac{C_1}{2} + (1-\nu) \frac{C_2}{r^2} - \frac{K}{8} (1+3\nu) r^2 \right\}, \\ \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ (1+\nu) \frac{C_1}{2} - (1-\nu) \frac{C_2}{r^2} - \frac{K}{8} (3+\nu) r^2 \right\}, \\ K &= \frac{1-\nu}{E} \rho \omega^2. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

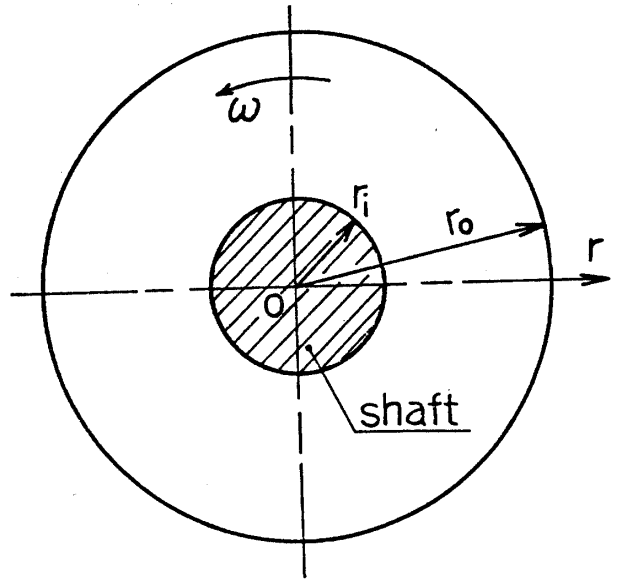


Fig. 3.2 Model of rotating disk.

ただし、 C_1 と C_2 は境界条件を満足するように求められる定数である。一般に、円板は Fig. 3.2 に示すように内周半径 r_i の位置で回転軸に固定されているので次の仮定をおく。1) 回転軸は剛体とし、半径方向に変形しない。2) 円板は r_i の位置で固定され、そこでの半径方向の変位および z 軸方向のたわみは零とする。3) 曲げによる弾性抵抗は無視する。ここで、面内変形に関し、仮定1)と2)より円板の内周半径 $r=r_i$ では $u=0$ である。外周半径 (円板外周) $r=r_o$ では $\sigma_r=0$ とする。これらより、 C_1 と C_2 は式 (3.2) より、

$$C_1 = \frac{K \{ r_i^4 (1-\nu) + r_o^4 (3+\nu) \}}{4 \{ r_i^2 (1-\nu) + r_o^2 (1+\nu) \}}, \quad (3.3)$$

$$C_2 = \frac{K r_i^2 r_o^2 \{ r_i^2 (1+\nu) - r_o^2 (3+\nu) \}}{8 \{ r_i^2 (1-\nu) + r_o^2 (1+\nu) \}}, \quad (3.4)$$

と決定され、 σ_t と σ_r は次式となる。

$$\sigma_t = \rho \omega^2 \left(A r_o^2 - B \frac{r_i^2 r_o^2}{r^2} - C r^2 \right), \quad (3.5)$$

$$\sigma_r = \rho \omega^2 \left(A r_o^2 + B \frac{r_i^2 r_o^2}{r^2} - D r^2 \right). \quad (3.6)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1+\nu}{8} \cdot \frac{3+\nu+(1-\nu)r_i^4/r_o^4}{1+\nu+(1-\nu)r_i^2/r_o^2}, \\ B &= \frac{1-\nu}{8} \cdot \frac{3+\nu-(1+\nu)r_i^2/r_o^2}{1+\nu+(1-\nu)r_i^2/r_o^2}, \\ C &= \frac{1+3\nu}{8}, \\ D &= \frac{3+\nu}{8}. \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

つぎに、式 (3.5) と式 (3.6) の σ_t と σ_r を式 (3.1) の P と Q にそれぞれ代入することにより次式となる。

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \rho \omega^2 \left(r_0^2 A + \frac{r_i^2 r_0^2}{r^2} B - Dr^2 \right) r \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \right\} \\ & + \frac{1}{r^2} \left\{ \rho \omega^2 \left(r_0^2 A - \frac{r_i^2 r_0^2}{r^2} B - Cr^2 \right) \right\} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

式 (3.1) の解を次のように表わす。

$$w(r, \theta, t) = W(r) \cos n\theta \cos pt. \quad (3.9)$$

ここで、 W は r のみの関数であり、 p は固有角振動数、 n は節直径の数で 0, 1, 2, 3, ……をとる。

式 (3.8) に式 (3.9) を代入すると

$$\begin{aligned} -\frac{p^2}{\omega^2} W = & \left(r_0^2 A + \frac{r_i^2 r_0^2}{r^2} B - Dr^2 \right) \frac{d^2 W}{dr^2} \\ & + \frac{1}{r} \left(r_0^2 A + \frac{r_i^2 r_0^2}{r^2} B - Dr^2 \right) \frac{dW}{dr} \\ & - \frac{1}{r} \left(\frac{2r_i^2 r_0^2}{r^2} B + 2Dr^2 \right) \frac{dW}{dr} \\ & - \frac{n^2 W}{r^2} \left(r_0^2 A - \frac{r_i^2 r_0^2}{r^2} B - Cr^2 \right), \end{aligned} \quad (3.10)$$

が得られる。上式を次の諸記号

$$x = \frac{r^2}{r_0^2}, \quad (3.11)$$

$$\kappa = \frac{r_i^2}{r_0^2}, \quad (3.12)$$

$$\lambda D = \frac{p^2}{\omega^2} + n^2 C, \quad (3.13)$$

のおきかえを行ない、さらに両辺を D で割ると式 (3.10) は次式に変形される。

$$\begin{aligned} 4(\alpha x - x^2 + \kappa \beta) \frac{d^2 W}{dx^2} + 4(\alpha - 2x) \frac{dW}{dx} \\ + \left\{ \lambda - n^2 \left(\frac{\alpha}{x} - \frac{\kappa \beta}{x^2} \right) \right\} W = 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

ただし、

$$\alpha = \frac{A}{D}, \quad \beta = \frac{B}{D}, \quad (3.15)$$

とおいている。式 (3.15) の α , β に式 (3.7) を代入することにより次式のように書き換えられる。

$$\alpha = \frac{1+\nu}{3+\nu} \cdot \frac{3+\nu+(1-\nu)\kappa^2}{1+\nu+(1-\nu)\kappa}, \quad (3.16)$$

$$\beta = \frac{1-\nu}{3+\nu} \cdot \frac{3+\nu-(1-\nu)\kappa}{1+\nu+(1-\nu)\kappa}. \quad (3.17)$$

次に、 $1-\kappa\beta$ に式 (3.17) の β を代入すると次式のように変形される。

$$1-\kappa\beta = \frac{1+\nu}{3+\nu} \cdot \frac{3+\nu+(1-\nu)\kappa^2}{1+\nu+(1-\nu)\kappa}. \quad (3.18)$$

上式の右辺は式 (3.16) に等しく、 $1-\kappa\beta=\alpha$ の関係が

ある。これを用いると式 (3.14) は次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[4(1-x)(\kappa\beta+x) \frac{dW}{dx} \right] \\ - n^2 \left(\frac{\alpha}{x} - \frac{\kappa\beta}{x^2} \right) W + \lambda W = 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

これはスツルム-リウヴィル型の方程式である。

ここで、 $W(r)$ に関する境界条件は r_i で固定されており、外周半径 $r=r_0$ では自由端であることから

$$W|_{x=\kappa}=0, \quad W|_{x=1}=1, \quad \sigma_r|_{r=r_0}=0, \quad (3.20)$$

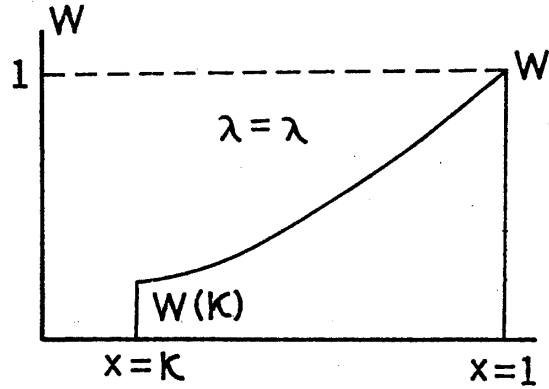
とおく。式 (3.10) において σ_r の項を零とおけばよい。すなわち、式 (3.10) の右辺第一、第二項を零とおいた式を考えればよいから円板の外周位置での式は

$$\begin{aligned} -\frac{p^2}{\omega^2} W \Big|_{r=r_0} = & \left[-\left(\frac{2r_i^2}{r_0} B + 2Dr_0 \right) \frac{dW}{dr} \right. \\ & \left. - \frac{n^2}{r_0^2} (r_0^2 A - r_i^2 B - r_0^2 C) W \right]_{r=r_0}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

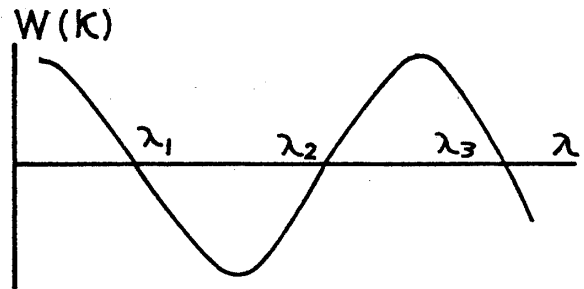
となる。一方、 dW/dr については式 (3.11) より次式になる。

$$\frac{dW}{dr} \Big|_{r=r_0} = \frac{2}{r_0} \cdot \frac{dW}{dx} \Big|_{x=1}. \quad (3.22)$$

これを式 (3.21) に代入し、条件式 (3.20) を考慮すると



(a)



(b)

Fig. 3.3 Method of calculation.

$$\left. \frac{dW}{dx} \right|_{x=1} = \frac{\lambda - n^2(\alpha - \kappa\beta)}{4(1 + \kappa\beta)}, \quad (3.23)$$

になる。任意の λ に対して条件式(3.20)と式(3.23)により式(3.19)から $W(\kappa)$ がFig. 3.3(a)のようにルンゲ・クッタ・ギルの数値解法から得られる。ただし、固有振動数は $W|_{x=\kappa}=0$ を満足しなければならないので $\lambda - W(\kappa)$ に関する計算を繰返し行なう。そして、 $W(\kappa) = 0$ となる点をFig. 3.3(b)のように小さい順に $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ とおくとこれらは順に円板の基本振動数、第2次振動数、……に対応するものである。したがって、式(3.13)および式(3.7)から円板の固有角振動数は

$$\frac{p_i^2}{\omega^2} = \lambda_i \cdot \frac{3+\nu}{8} - n^2 \frac{1+3\nu}{8}, \quad (i=1, 2, 3, \dots) \quad (3.24)$$

で求められる。

4. 数値計算例および検討

Table 4.1 は、数値計算に用いた値である。節直径の数 n は0から3までとし、ポアソン比は0.3としている。電子計算機に与えた x のきざみ幅は0.01とし、 $x=\kappa$ で W が 10^{-3} のオーダーまで零となったときの値を λ と決定している。得られた λ の値をTable 4.2 (a)~(d)に示してあり、(a)は $n=0$ 、(b)は $n=1$ 、(c)は $n=2$ 、(d)は $n=3$ とした場合である。これらの表は節円の数 s と κ のそれぞれに対応する λ の値が示してある。節円の数 s は、 $x=\kappa$ で $W=0$ となったときの解曲線 $W(x)$ と x 軸との交点で決められる。それらの一例として $n=2, \kappa=0.2$ としたときの解曲線 $W(x)$ をFig. 4.1に示してある。図より、 W が x 軸と $x=\kappa$ 以外で交わらない場合は節円の数 s は0、1回交われば $s=1$ である。そして、Fig. 4.2 には $n=2, s=1$ としたときの回転円板上での W, n, s の関係が示してある。

Table 4.3 (a)~(d)に節円の数 s と κ のそれぞれに対応する p^2/ω^2 の値が節直径の数別に示してある。これらの表より、 κ の値が0.5以上で節円の数 s が同じときは節直径の数 n が変わっても p^2/ω^2 の値に大差のないことがわかる。特に、 $\kappa=0.7$ で $s=3$ の場合には n に関係なくほぼ一定値となっている。これは固有角振動数が無限に大きくなるのではなく、ある回転角速度以上になると固有角振動数は大きな変化を示さないことがわかる。

Fig. 4.3 (a)~(d)は、Table 4.3 (a)~(d)を図示したものである。ただし、横軸には r_i/r_0 をとってある。図中の○印は計算値であり、 $r_i/r_0=0$ は中実円板に相当し、回転円板の中心で固定されている場合である。この値はSouthwellらの計算結果と一致している。図より、 r_i で固定された円板が一定角速度 ω で回転運動をしているときの固有角振動数は半径 r_i/r_0 比が大きくなる(穴径が

Table 4.1 Values of parameter.

n	0	1	2	3
κ	0.01 0.3	0.05 0.5	0.1 0.7	0.2
ν	0.3			

Table 4.2 values of λ .

(a) $n=0$

$\kappa \backslash s$	0	1	2	3
0.01	1.139	12.676	33.673	64.194
0.05	1.939	16.485	42.909	81.091
0.1	2.667	20.170	51.806	97.552
0.2	4.048	27.297	69.212	129.770
0.3	5.576	35.345	88.945	166.376
0.5	10.036	58.667	146.182	272.606
0.7	19.709	109.600	271.345	504.994

(b) $n=1$

$\kappa \backslash s$	0	1	2	3
0.01	3.097	15.824	15.139	68.527
0.05	3.485	18.588	45.182	83.461
0.1	3.970	21.861	53.521	99.291
0.2	5.109	28.503	70.442	131.000
0.3	6.491	36.333	89.958	167.339
0.5	10.758	59.412	146.952	273.376
0.7	20.333	110.248	271.994	505.642

(c) $n=2$

$\kappa \backslash s$	0	1	2	3
0.01	7.976	24.170	48.679	81.745
0.05	7.976	25.333	53.091	91.952
0.1	8.073	27.442	59.758	105.770
0.2	8.582	32.873	75.079	135.733
0.3	9.527	39.927	93.697	171.176
0.5	13.164	62.085	149.673	276.097
0.7	22.279	112.388	274.158	507.806

(d) $n=3$

$\kappa \backslash s$	0	1	2	3
0.01	14.879	34.806	62.758	98.733
0.05	14.394	34.297	63.315	102.612
0.1	13.885	34.684	67.339	113.376
0.2	13.475	38.176	80.382	141.012
0.3	13.715	44.261	97.982	175.436
0.5	16.576	65.497	148.397	279.485
0.7	25.400	115.436	277.182	510.806

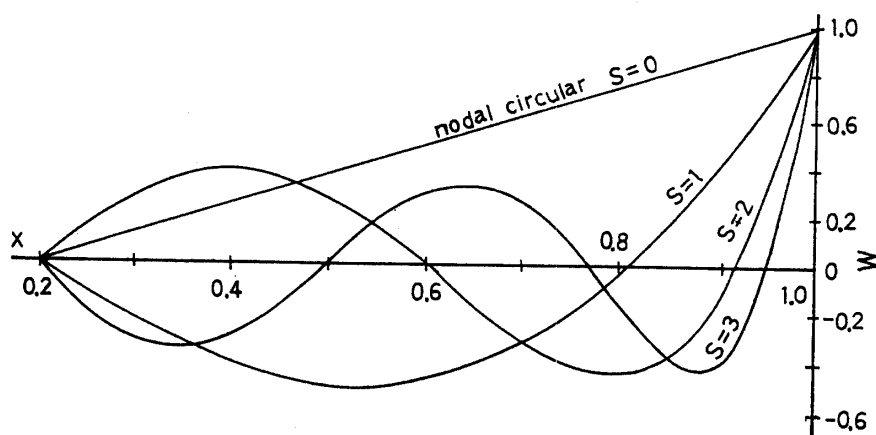


Fig. 4.1 Analysed curves. ($n=2$, $\kappa=0.2$)

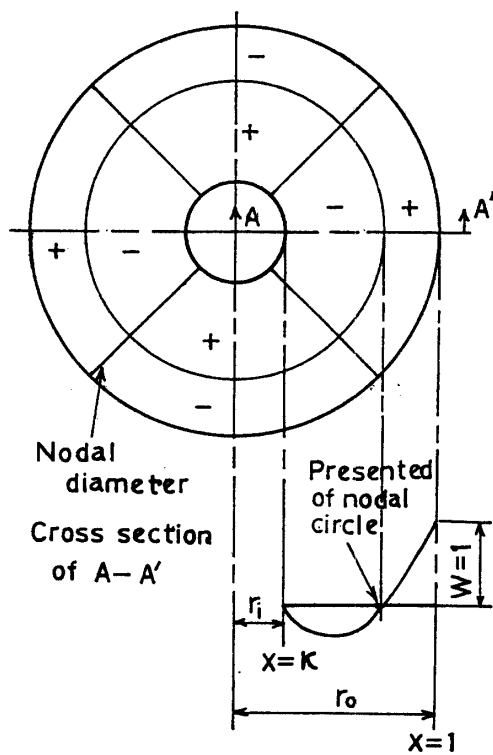
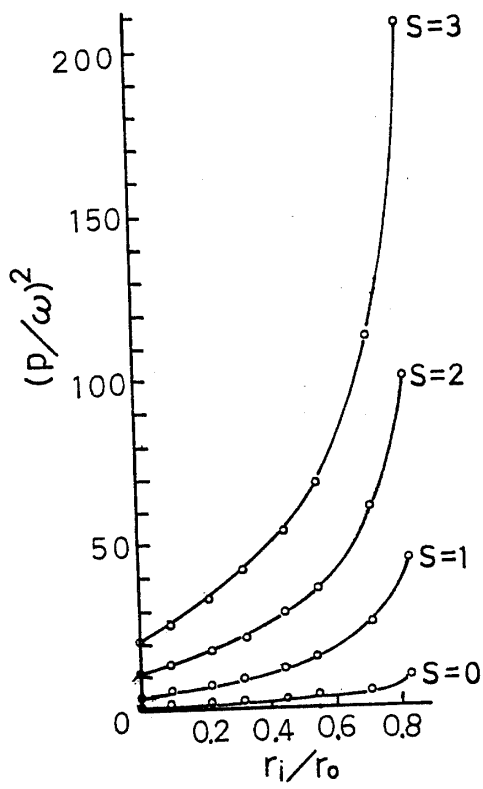
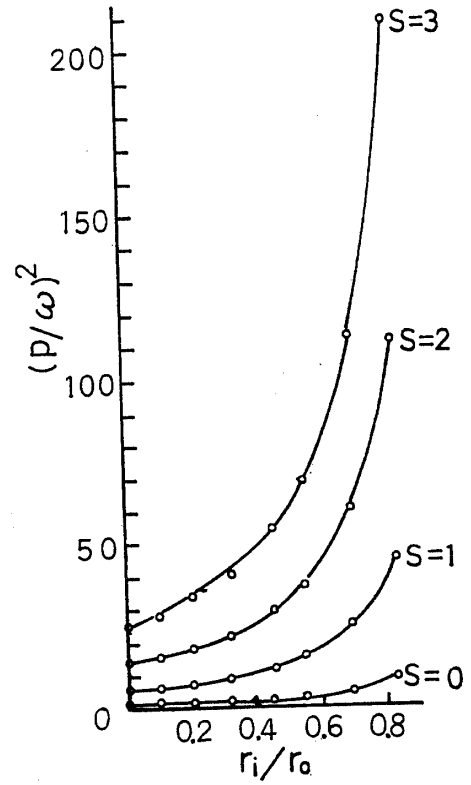


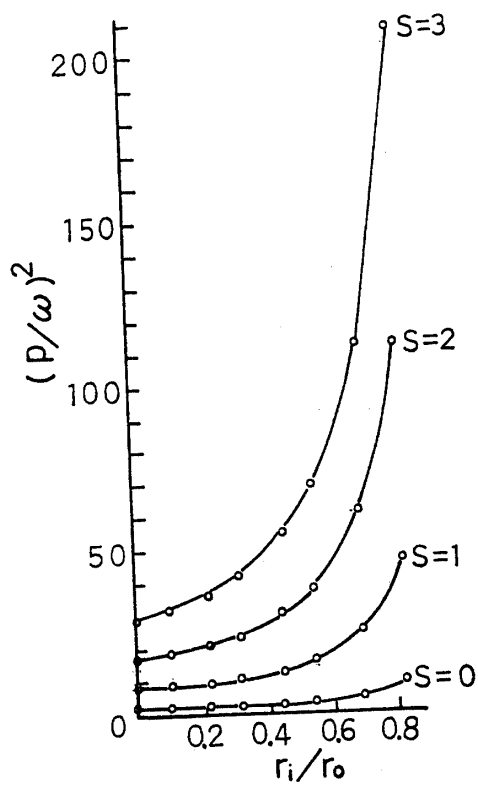
Fig. 4.2 Vibration mode. ($n=2$, $s=1$)



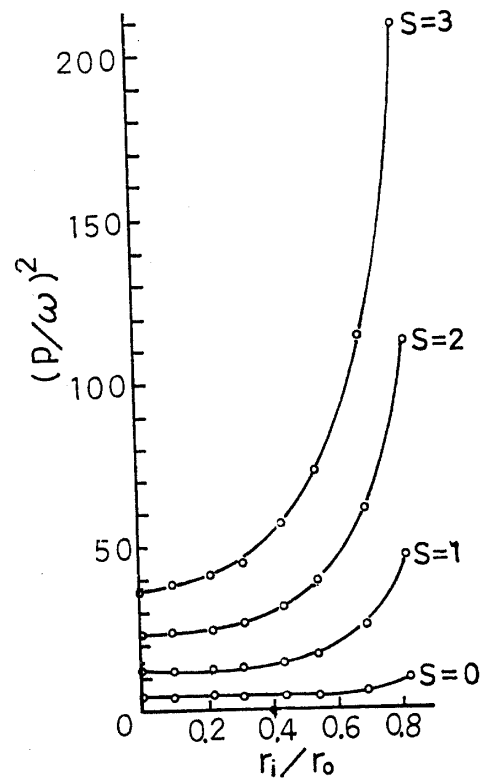
(a) $n=0$



(b) $n=1$



(c) $n=2$



(d) $n=3$

Fig. 4.3 Relation between ratio of radius and natural frequencies.

Table 4.3 Calculation results of natural frequencies.

(a) $n=0$

$\kappa \backslash s$	0	1	2	3
0.01	0.47	5.20	13.89	26.48
0.05	0.80	6.80	17.70	33.45
0.1	1.10	8.32	21.37	40.24
0.2	1.67	11.26	28.55	53.53
0.3	2.30	14.58	36.69	68.63
0.5	4.14	24.20	60.30	112.45
0.7	8.13	45.21	111.93	208.31

(c) $n=2$

$\kappa \backslash s$	0	1	2	3
0.01	2.34	9.02	19.13	32.77
0.05	2.34	9.50	20.95	36.98
0.1	2.38	10.37	23.70	42.68
0.2	2.59	12.01	30.02	55.04
0.3	2.98	15.52	37.70	69.66
0.5	4.48	24.66	60.79	112.94
0.7	8.28	45.41	112.14	208.54

(b) $n=1$

$\kappa \backslash s$	0	1	2	3
0.01	1.04	6.29	15.26	28.03
0.05	1.20	7.43	18.40	34.19
0.1	1.40	8.78	21.84	40.72
0.2	1.87	11.52	28.82	53.80
0.3	2.44	14.75	36.87	68.79
0.5	4.20	24.27	60.38	112.53
0.7	8.15	45.24	111.96	208.34

(d) $n=3$

$\kappa \backslash s$	0	1	2	3
0.01	4.00	12.22	23.75	38.59
0.05	3.80	12.01	23.98	40.19
0.1	3.59	12.17	25.64	44.63
0.2	3.41	13.61	31.02	56.03
0.3	3.52	16.12	38.28	70.23
0.5	4.70	24.88	61.00	113.15
0.7	8.34	45.88	112.20	208.57

大きくなる)につれて2次曲線的に増大する。さらに、円板の半径比が決まるとそれを使用するときの回転角速度 ω が大きくなるほど固有角振動数は高くなる。また、 s が0, 1, 2, 3 となるに従い同じ半径比でも p^2/ω^2 の値が大きくなっており、半径比が増すほどその傾向は顕著に現われている。しかし、Table 4.3 (d) あるいは Fig. 4.3 (d)に示したごとく $n=3$, $s=0$ の場合、 r_i が小さい範囲 ($\kappa=0.01\sim0.3$) では固有角振動数はあまり変化せず、わずかに低くなっているところもある。この傾向は境界条件が内周半径固定、外周半径自由で $n=2$ のとき、半径比を0.1程度としたときの静止時の円板の固有角振動数と同じである⁹⁾。

これらのことより、内周半径位置 r_i で固定されているときの回転円板の材質、形状、回転角速度が決まれば容易に固有角振動数を求められることが示された。

5. 結 論

本報告では、内周半径位置で固定された円板が角速度 ω で回転運動をしているときの固有角振動数を求めた。その結果、次のような結論を得た。

- 1) 内周半径を零(中実回転円板に相当)としたときは Southwell らの計算結果と一致し、内周半径が大きくなるほど固有振動数は高くなる。
- 2) 節直径の数と節円の数の組合せにより、半径比が小さいとき(本計算範囲では、 $n=3$, $s=0$, $\kappa=0.01\sim0.3$) 固有振動数はほぼ一定値となる。

- 3) 使用する回転円板の材質、形状、回転角速度が決まれば、固有角振動数を容易に求めることができる。以上の解析結果を実験で確かめを行なう必要があると思われるが、これについては次報以下で述べる。

謝辞 本解析を行なうにあたり懇切なる御指導を賜った本学動力機械工学科藤野勉教授、精密機械工学科西村源六郎教授、石坂昭夫助教授、尾崎晃一講師ならびに理学部札幌教養部数学科落合信義教授に深甚の謝意を表します。

参考文献

- 1) Kung, G. C. and Pao, Y. H., Trans. ASME. Ser. E, 39-4 (1972), 1050.
- 2) 坂田, 他2名: 日本機械学会論文集, 40-331, (昭. 49. 3), 732.
- 3) 浜田: 日本機械学会論文集, 39-317, (昭. 48. 1) 115.
- 4) Sridhar, S., 他2名: J. Sound and Vibr., 41-3(1975), 159.
- 5) R. V. Southwell, "On the Free Transverse Vibrations of a Uniform Circular Disk Clamped at its Center, and on the Effects of Rotation", Proc. Roy. Soc., London, 101, (1921), 133.
- 6) H. Lamb and R. V. Southwell, "The vibrations of a spinning Disk", Proc. Roy. Soc., London, 99, (1921), 272.
- 7) 斉藤, 藤井: "材料力学演習(下)", 共立出版, (昭49), 513.
- 8) 鈴木, 他4名: 日本機械学会論文集, 48-431, C編(昭57), 735.