

1次元横磁場イジング模型におけるクリロフ複雑性の長時間ゆらぎ

深谷友也¹, 伊與田英輝^{*2}

¹〒259–1292 神奈川県平塚市北金目 4–1–1

東海大学大学院 理学研究科 物理学専攻

²〒259–1292 神奈川県平塚市北金目 4–1–1

東海大学 理学部 物理学科

(2025 年 10 月 9 日受付；2025 年 12 月 5 日受理)

Long-time Fluctuation of the Krylov Complexity in One-dimensional Transverse Field Ising Model

by

Tomoya FUKAYA¹ and Eiki IYODA^{*2}

¹*Course of Physics, Graduate School of Science, Tokai University,
4–1–1 Kitakaname, Hiratsuka, Kanagawa 259–1292, Japan*

²*Department of Physics, School of Science, Tokai University,
4–1–1 Kitakaname, Hiratsuka, Kanagawa 259–1292, Japan*

**Corresponding author: E-mail: iyoda.eiki.g@tokai.ac.jp*

(Received on Oct. 9, 2025; accepted on Dec. 5, 2025)

Abstract

The mechanism of thermalization in isolated quantum many-body systems has been extensively studied through quantum chaos and the eigenstate thermalization hypothesis. Recently, the Krylov complexity has emerged as a powerful measure to characterize operator and state dynamics, with features such as its growth, peak structure, and long-time saturation linked to the chaotic behavior. In this work, we focus on the long-time regime of the Krylov complexity in the one-dimensional transverse-field Ising model and numerically calculate the finite-size scaling of its temporal fluctuations. Our results show that the long-time fluctuations grow polynomially with the Krylov subspace dimension, while their relative magnitude decreases, implying that fluctuations become negligible in the thermodynamic limit. We also discuss how the magnitude of fluctuations constrains the peak structure of the Krylov complexity, which acts as an order parameter for quantum chaotic-integrable transitions.

Keywords: Krylov complexity, Quantum chaos, Thermalization

1 序 論

孤立量子多体系におけるユニタリ時間発展のもとで熱平衡化がどのように生じるのかという問題は、古くから広く研究されてきた [1–3]. これまでに人工量子系を用いた実験的研究に加え [4–7], 理論的・数値的研究も数多く行われている [1–3, 8]. 熱平衡化の理解においては非可積分系が中心的な役割を果たしており, エネルギー準位統計 [9, 10] や固有状態熱化仮説 (Eigenstate Thermalization Hypothesis; ETH) [1–3, 11–15] など, 量子カオスの概念が重要な役割を果たしてきた. 当初の関心は主として局所的物理量の期待値が熱平衡化するかどうかに向けられていたが, 近年では非時間順序積相関 (Out-of-Time-Ordered Correlator; OTOC) [16, 17] やエンタングルメントエントロピー [18, 19] といった, 局所物理量の期待値では書けない複雑な量についても理論的・実験的に調べられている. 熱平衡化という過程を物理量の期待値に対するものを超えて一般的に捉え直すならば, 初期状態がユニタリ時間発展によって物理量の固有基底において複雑な状態へと変化していく過程, あるいはハイゼンベルク表示において物理量が非局所で複雑な演算子へと変化していく過程として捉えることができるだろう. このような過程を理解する試みの中で, 近年特に注目を集めているのがクリロフ複雑性 (Krylov complexity) と呼ばれる量である [20–22].

クリロフ複雑性は, 量子多体系における演算子が非局所で複雑なものへと成長する様子を捉える指標として導入された. 演算子成長を表す基底としてクリロフ基底を用いると, そこに現れるランチョス係数に普遍的な増加が現れるという仮説が提示された [20]. この普遍的な振る舞いは, 非局所な演算子を表現するためには指数関数的に多くの非局所な演算子が必要になることがその背景にあり, 物理的にはスペクトル関数の指数減衰や非対角 ETH と関係があると考えられている. この普遍的な増加を定量的に捉えるためにクリロフ複雑性が導入され, 多くの量子多体系でその時間発展が調べられている. 当初は演算子に関する議論が中心であったが, 状態についてのクリロフ複雑性も議論されている [22, 23]. 量子カオスの系においてシュレーディンガー方程式に従うダイナミクスを考えると, クリロフ複雑性は指数関数的に大きな値まで単調に増加し, その後ゆっくりと減少をして長時間領域の定常的なプラトーへと至る. ここに現れるピーク構造が非可積分系に特徴的なものであり, 可積分系ではピークが生じないことから, クリロフ複雑性のピークを量子カオスの秩序変数と見なすことが提案されている [21].

本研究では, 特に長時間領域における状態に関するクリロフ複雑性に注目し, その長時間ゆらぎに対する有限サイズスケリングを明らかにすることを目的とする. 状態に関するクリロフ複雑性は, クリロフ基底における数演算子という非局所的な演算子の期待値として表現できる. 熱平衡化の文脈においては, 演算子の長時間ゆらぎを上から評価する不等式が知られており, 本研究ではこれをクリロフ基底の数演算子に適用する. さらに, 量子スピン系に対する数値計算を通じて, この不等式がどの程度タイトであるかを検証する. 加えて, 長時間ゆらぎの大きさを詳しく考察することで, クリロフ複雑性のピーク高さに関して簡単に議論する.

本論文の構成は以下の通りである. 2 節ではクリロフ基底とクリロフ複雑性を導入する. 3 節では物理量の長時間ゆらぎについての不等式を用いて, クリロフ複雑性のゆらぎについて議論する. 4 節では数値計算に用いた設定を説明する. 5 節では本研究で得られた数値計算の結果について議論する. 6 節ではまとめを行う. 付録では, 補足的な数値計算の結果を示す.

2 クリロフ基底とクリロフ複雑性

本節では文献 [22, 23] に基づいて, 状態に関するクリロフ基底と状態に関するクリロフ複雑性を導入

する。以下, これらを単にクリロフ基底とクリロフ複雑性と呼び, $\hbar = 1$ の単位系をとる。

2.1 クリロフ基底

ここでは有限サイトの量子スピン系のような, 有限次元 (次元 D) の量子多体系を考える。クリロフ基底は初期状態 $|0\rangle$ とハミルトニアン H に対して, ベクトルの集合 $\{H^n|0\rangle\}_n$ を直交化することで生成することが出来る。 $a_0 := \langle 0|H|0\rangle$, $b_0 := 0$ と定義し, 以下の式に従って帰納的にクリロフ基底 $\{|n\rangle\}$ を定義する。

$$|\tilde{n}\rangle := (H - a_n)|n\rangle - b_n|n-1\rangle, \quad (1)$$

$$b_{n+1} := \sqrt{\langle \tilde{n}|\tilde{n}\rangle}, \quad (2)$$

$$|n+1\rangle := |\tilde{n}\rangle/b_{n+1}, \quad (3)$$

$$a_{n+1} := \langle n+1|H|n+1\rangle. \quad (4)$$

ここで $|\tilde{n}\rangle$ は規格化されていないことに注意する。生成されたクリロフ基底 $\mathcal{K} := \{|n\rangle\}$ は正規直交基底をなし, a_n, b_n はエネルギーの次元を持つ。 a_n を対角成分, b_n をその隣の非対角成分に並べた三重対角行列を, 1次元系における相互作用しない系におけるハミルトニアンだと見なせるため, この1次元系をクリロフ鎖とも呼ぶ。生成されたクリロフ基底の次元を $D_{\mathcal{K}}$ と書く。特別な理由がなければ, $D_{\mathcal{K}}$ はヒルベルト空間の次元 D に等しい。しかし, 対称性や保存量が存在する場合, クリロフ部分空間の次元は $D_{\mathcal{K}} < D$ となることがあり, クリロフ部分空間の次元を超えてクリロフ基底を作ろうとしても, b_{n+1} がゼロになるため, それ以上基底は生成されない。また, D は系のサイト数 L に対して指数関数的に大きい。 $D_{\mathcal{K}}$ は保存量の詳細に依存するが, 本研究で扱う状況では, $D_{\mathcal{K}}$ も系のサイト数 L に対して指数関数的に大きい。

クリロフ基底をエネルギー固有基底で展開する：

$$|n\rangle = \sum_{j=1}^{D_{\mathcal{K}}} f_{nj} |E_j\rangle. \quad (5)$$

ここで f_{nj} は二つの正規直交基底を繋ぐユニタリ行列の行列要素である。また, $|E_j\rangle$ はハミルトニアンと対称性に関する演算子の同時固有状態であり, そのため, j についての和の範囲は $1 \leq j \leq D_{\mathcal{K}}$ とした。クリロフ基底を生成する漸化式 (1)–(3) を用いると, 展開係数 f_{nj} が満たす以下の漸化式が得られる。

$$(E_j - a_n)f_{nj} = b_{n+1}f_{n+1,j} + b_nf_{n-1,j}. \quad (6)$$

なお, 初期状態が

$$|0\rangle = \sum_j c_j |E_j\rangle \quad (7)$$

と展開されるとすると, $f_{0j} = c_j$ が成り立つが, これが上記の漸化式の初期条件となる。

式 (6) を整理するため,

$$\hat{E}_n := \text{diag}(E_1 - a_n, E_2 - a_n, \dots, E_{D_{\mathcal{K}}} - a_n), \quad (8)$$

$$|f_n\rangle := (f_{n1}, f_{n2}, \dots, f_{nD_{\mathcal{K}}})^T \quad (9)$$

を導入する。ここで f_{nj} がユニタリ行列の行列要素であるため,

$$\langle f_m | f_n \rangle = \delta_{mn} \quad (10)$$

が成り立つ. これらを用いると式 (6) は

$$\hat{E}_n|f_n\rangle = b_{n+1}|f_{n+1}\rangle + b_n|f_{n-1}\rangle \quad (11)$$

のように漸化式 (1)–(3) と同じ形に書き直せる.

2.2 クリロフ複雑性

クリロフ複雑性を定義するために, まずクリロフ基底における数演算子を定義する.

$$\mathcal{N} \equiv \sum_{n=0}^{D_{\kappa}-1} n|n\rangle\langle n|. \quad (12)$$

クリロフ複雑性は, 時刻 t における状態 $|\psi(t)\rangle = \exp(-iHt)|0\rangle$ における期待値として

$$C(t) := \langle\psi(t)|\mathcal{N}|\psi(t)\rangle = \sum_n n|\langle n|\psi(t)\rangle|^2 \quad (13)$$

と定義される.

時刻 t の状態は

$$|\psi(t)\rangle = \sum_j c_j e^{-iE_j t} |E_j\rangle \quad (14)$$

と書けるので, これを式 (13) に代入して式 (5) を用いて整理すると

$$C(t) = \sum_n n \left(\left| \sum_j f_{nj} c_j^* e^{iE_j t} \right|^2 - \left| \sum_j f_{nj} c_j^* \right|^2 \right) \quad (15)$$

を得る.

2.3 長時間平均と長時間ゆらぎ

物理量の時刻 t における期待値 $\langle\psi(t)|O|\psi(t)\rangle$ の形で書ける量の長時間平均と長時間ゆらぎを計算するために, 以下では, 固有エネルギーに縮退がなく, 非共鳴条件 (non-resonant condition) を満たすとする. 縮退がないため, $E_j \neq E_k$ ($j \neq k$) が成り立つ. また, 非共鳴条件は, $E_i - E_j = E_k - E_l$ が $i = k$ かつ $j = l$ のときのみ成立するという条件である.

クリロフ複雑性は式 (13) で表されるように, 物理量の期待値として定義される. 固有エネルギーに縮退がない場合, クリロフ複雑性の長時間平均は以下のように表される.

$$\overline{C} := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt C(t) \quad (16)$$

$$= \sum_{j=0}^{D-1} |c_j|^2 \langle E_j | \mathcal{N} | E_j \rangle \quad (17)$$

$$= \sum_j \sum_n |c_j|^2 n |f_{nj}|^2. \quad (18)$$

ここで式 (5)(12) を用いた. さらに, 固有エネルギーが非共鳴条件を満たす場合, クリロフ複雑性の長時間平均まわりの時間ゆらぎは

$$(\Delta C)^2 := \overline{(C(t) - \overline{C})^2} \quad (19)$$

$$= \sum_{j \neq k} |c_j|^2 |c_k|^2 |\langle E_j | \mathcal{N} | E_k \rangle|^2 \quad (20)$$

$$= \sum_{j \neq k} |c_j|^2 |c_k|^2 \left| \sum_n n f_{nj} f_{nk}^* \right|^2 \quad (21)$$

と表される.

3 クリロフ複雑性の緩和とゆらぎ

本節では, クリロフ複雑性の長時間ゆらぎのサイズ依存性について議論する.

物理量の期待値が緩和する条件は, 長時間平均および長時間ゆらぎを用いて議論されている. 固有エネルギーに縮退がなく, 非共鳴条件を満たす場合, 物理量 O の長時間ゆらぎは有効次元を用いて上から評価できる [8]:

$$(\Delta O)^2 \leq \frac{\|O\|^2}{D_{\text{eff}}}. \quad (22)$$

ここで $\|O\|$ は物理量 O の演算子ノルムであり, $\hat{O}$ の最大特異値に等しい. D_{eff} は有効次元であり, 固有エネルギーに縮退がなく $|\psi(0)\rangle = \sum_j c_j |E_j\rangle$ と展開できる場合, $D_{\text{eff}} := (\sum_j |c_j|^4)^{-1}$ と定義される.

ランダムな時刻における物理量の期待値 $\langle O(t) \rangle := \langle \psi(t) | O | \psi(t) \rangle$ をサンプルすることを考えると, チェビシェフの不等式により

$$P(|\langle O(t) \rangle - \overline{\langle O(t) \rangle}| > \delta) \leq \frac{(\Delta O)^2}{\delta^2} \quad (23)$$

のように, $\langle O(t) \rangle$ が長時間平均からずれる確率を時間ゆらぎを用いて上から評価することが出来る. 右辺が無視できる場合, この式は $\langle O(t) \rangle$ が長時間領域で長時間平均へと緩和することを表す.

不等式 (22) を $\mathcal{N}$ に対して適用すると,

$$(\Delta C)^2 \leq \frac{\|\mathcal{N}\|^2}{D_{\text{eff}}} \quad (24)$$

が成り立つ. 式 (12) より $\|\mathcal{N}\| = D_K - 1 = \mathcal{O}(D_K)$ である. ここで, $D_{\text{eff}} = \mathcal{O}(D_K^\alpha)$ が成り立つとする. 初期状態がハミルトニアン固有基底においてランダムである場合, $\alpha = 1$ となる. すると,

$$(\Delta C)^2 \leq \mathcal{O}(D_K^{2-\alpha}) \quad (25)$$

が成り立つ. α は一般に $0 \leq \alpha \leq 1$ なので, 時間ゆらぎは熱力学極限で発散してもおかしくない. 本研究では, 時間ゆらぎ $(\Delta C)^2$ を数値的に計算し, その D_K に対する有限サイズスケーリングを議論する.

式 (23) と (25) を合わせることで,

$$P(|C(t) - \overline{C}| > \delta) \leq \frac{\mathcal{O}(D_K^{2-\alpha})}{\delta^2} \quad (26)$$

が成り立つ. 仮に δ が定数だとすると, 右辺は熱力学極限で発散するため, 式 (26) は意味のある制限を与えない. ずれ δ は $\overline{C}$ よりも十分小さい量ならば $C(t)$ の緩和について物理的に意味がある議論が出来るが, $\overline{C}$ は $\overline{C} = \mathcal{O}(D_K)$ のように L について指数関数的に大きい量だと考えられるため, $\delta = \mathcal{O}(D_K^\beta)$ ($\beta < 1$) とおくことにする. すると, 式 (26) の右辺は $\mathcal{O}(D_K^{2-\alpha-2\beta})$ となるため, $(2-\alpha)/2 < \beta < 1$ と置けば $C(t)$ が長時間平均からずれる確率は無視できる.

4 数値計算の設定

本節では、本研究で用いた数値計算の設定などについて説明する。

本研究ではスピン $1/2$ かつ 1 次元（開放端境界条件）の横磁場イジング模型（TFI 模型）に縦磁場を加えたハミルトニアンを用いる。

$$H = -J \sum_{i=1}^{L-1} Z_i Z_{i+1} - h_z \sum_{i=1}^L Z_i - h_x \sum_{i=1}^L X_i. \quad (27)$$

ここで、 L はスピン鎖の長さ、 J は近接スピン間のイジング相互作用であり、 $h_z(h_x)$ は縦磁場（横磁場）を表す。 $J > 0$ をエネルギーのユニットとして扱い、 $h_x \neq 0$ を仮定する。この模型は $h_z = 0$ の場合は可積分であり、 $h_z \neq 0$ の場合に非可積分になる。

上記のハミルトニアンはパリティ対称性を持つ。 i 番目のサイトと $L-i$ 番目のサイトを入れ替えるパリティ演算子を P とすると、 $[H, P] = 0$ が成り立つ。全ヒルベルト空間の次元は $D = 2^L$ であるが、パリティが正の部分空間 $\mathcal{H}_+$ の次元 $D_+ := \dim \mathcal{H}_+$ とパリティが負の部分空間 $\mathcal{H}_-$ の次元 $D_- := \dim \mathcal{H}_-$ は $D_{\pm} = 2^{L-1} \pm 2^{\lfloor \frac{L-1}{2} \rfloor}$ と書ける。ここで $[x]$ は x を超えない最大の整数を表すガウス記号である。

本研究ではエネルギー固有状態を数値的厳密対角化で求める。 $\mathcal{H}_+$ における計算基底を用いて、ハミルトニアンを表す行列を求め、その固有値・固有ベクトルを数値的に求めている。

クリロフ基底を生成する際の初期状態 $|0\rangle$ として、以下の状態を用いた。

$$|X+\rangle := |x+\rangle^{\otimes L}, \quad (28)$$

$$|\text{Néel}\rangle := |z+\rangle \otimes |z-\rangle \otimes |z+\rangle \otimes |z-\rangle \otimes \cdots. \quad (29)$$

ここで $|x_{\pm}\rangle, |z_{\pm}\rangle$ はそれぞれパウリ X, Z の固有値 ± 1 の固有状態である。 $|X+\rangle$ は全てのスピンの X の正方向を向いた状態であり、 $|\text{Néel}\rangle$ はネール状態である。 $|X+\rangle$ は $\mathcal{H}_+$ の元であり、 $P|X+\rangle = |X+\rangle$ が成り立つ。また、 L が奇数の場合には $|\text{Néel}\rangle$ も $\mathcal{H}_+$ の元であり、 $P|\text{Néel}\rangle = |\text{Néel}\rangle$ が成り立つ。これらの初期状態はいずれも、量子もつれがないため、複雑ではない状態と見なすのは妥当であると考えられる。

数値的にクリロフ基底を生成する際は、クリロフ基底の正規直交性を精度よく求めるために、修正グラム・シュミット法を用いて数値誤差に対処している。つまり、式 (3) で求めた $|n+1\rangle$ に対して、 $\{|j\rangle\}_{0 \leq j \leq n}$ との直交化を順番に行なっている。同様に、式 (11) を用いて $|f_n\rangle$ を生成する際にも逐次、直交化を行なっている。また、クリロフ基底を生成する際に b_{n+1} がゼロの場合、クリロフ基底の生成をそこで停止するが、数値計算上は $b_{n+1} < 10^{-12}$ を満たした場合に b_{n+1} をゼロとみなしている。

5 結果と考察

本節では、数値計算の結果を示す。主に、ハミルトニアンは $h_x = -1.05J$ の TFI 模型とし、初期状態は $|X+\rangle$ の結果を示す。初期状態が $|\text{Néel}\rangle$ の場合の結果は付録 A で示す。

5.1 係数 b_n の振る舞い

まず、クリロフ基底の作成で重要な係数 b_n に関する結果を示す。ただし、後述するように可積分点 $h_z = 0$ については注意が必要である。

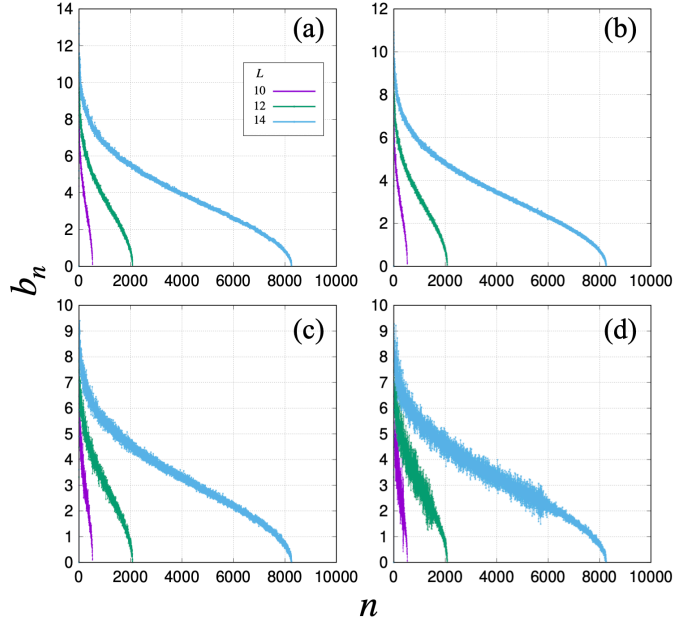


図 1 (a)–(d) 各パラメタにおける b_n の n 依存性. サイズ L はそれぞれ $L = 10, 12, 14$ である. $h_z > 0$ でのクリロフ次元はそれぞれ $D_K = D_+ = 528, 2080, 8256$ である. [パラメタ: (a) $h_z/J = 1$ (b) $h_z/J = 0.5$ (c) $h_z/J = 0.001$ (d) $h_z/J = 0$]

図 1 は b_n の n 依存性を示す. b_n は式 (2) で定義され, ハミルトニアンをクリロフ基底で三重対角行列で表した場合の非対角成分を表す. クリロフ鎖のハミルトニアンでは, 隣のサイトに飛び移る重なり積分を意味する. 図 1(a) は $h_z/J = 1$ の場合の結果であり, $L = 14, 12, 10$ のいずれの場合も, 計算した b_n は小さな乱れは伴いつつも n を大きくするにつれて概ね緩やかに減少する. n が非常に小さい領域と n が D_K に近い領域では, b_n の減少が著しく, $n \sim D_K$ では b_n は 0 へと近づく. また, 図 1(b)–(d) は $h_z/J = 0.5, 0.001, 0$ の結果を表しているが, 定性的に同じ振る舞いを示している.

以上の計算で得られた可積分点 ($h_z = 0$) の結果については注意が必要である. 上記の結果では, 非可積分のパラメタでは $D_K = D_+$ を満たしている. 一方, 可積分点では, 初期状態 $|X_+\rangle$ に対するクリロフ部分空間 $\mathcal{H}_{X_+}$ は, パリティ正の部分空間 $\mathcal{H}_+$ の真の部分空間になっており, $\mathcal{H}_{X_+} \subset \mathcal{H}_+$ が成り立つ. そのため, $D_K < D_+$ になるはずだが, 得られた結果は $D_K = D_+$ となっている. これは, 上記の数値計算では, 可積分性に基づく部分空間の構造を利用した数値計算を行っていないため, 数値誤差によって, 生成されるクリロフ基底が $\mathcal{H}_+$ 全体に広がってしまっているからであると考えられる. そのため, 可積分点の結果については注意が必要であるが, 近可積分点 ($h_z/J = 0.001$) の結果と比べると, 可積分点の結果も定性的には合っていると期待される.

5.2 クリロフ複雑性の時間発展

次に, クリロフ複雑性に関する結果を示す.

図 2 は $C(t)$ の時間依存性を表している. 図 2(a)(b) ではそれぞれ, サイズ L が一定で, 縦磁場の値を $h_z/J = 0, 0.001, 0.1, 0.5, 1$ と変化させた場合の $C(t)$ を示している. サイズ L は, 図 2(a) では $L = 10$, 図 2(b) では $L = 14$ である. 非可積分の場合の例として, 図 2(a)(b) において $h_z/J = 1$ の $C(t)$ に注目すると, 量子カオス的な系において期待される $C(t)$ の典型的な振る舞いをしており, つまり, $C(t)$ ははじめ 0 だが, そこから概ね単調に増加し, ある時刻で減少に転じてピークを形成し, その後, 長時間領域では概ね一定の値を取ってプラトーを形成する. この振る舞いは, $L = 10, 14$,

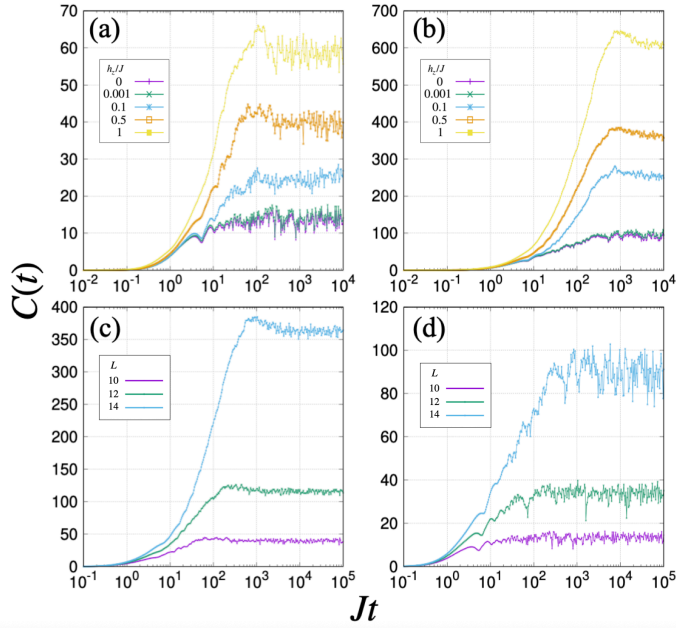


図 2 $C(t)$ の時間依存性. (a) (b) サイズ L は共通で $h_z/J = 0, 0.001, 0.1, 0.5, 1$ (bottom to top). サイズ : (a) $L = 10$, (b) $L = 14$. (c) (d) 縦磁場 h_z は共通で, $L = 10, 12, 14$ (bottom to top). 縦磁場 (c) $h_z/J = 0.5$ (非可積分), (d) $h_z = 0$ (可積分).

$h_z/J = 0.5, 1$ の場合には $L = 10, 14$ の両方で明瞭に見られる. $h_z/J = 0.1$ の場合には, $L = 10$ だとピーク構造は不明瞭であるが, $L = 14$ ではピークが見えている. $h_z/J = 0.001, 0$ の場合, つまり近可積分点と可積分点では, ピーク構造は見られない. これは, クリロフ複雑性が非可積分性の秩序変数であるという先行研究の期待と整合的である.

図 2(c)(d) はそれぞれ, 縦磁場の値が一定で, サイズ L を $L = 10, 12, 14$ と変化させた場合の $C(t)$ を示している. 図 2(c) は $h_z/J = 0.5$ の非可積分の結果を表しており, 長時間領域における $C(t)$ がサイズとともに指数関数的に増加していく様子がわかる. 図 2(d) は $h_z = 0$ の可積分点の結果である. 非可積分の場合と同様に長時間領域における $C(t)$ はサイズとともに指数関数的に増える. また, 図 2(c) と (d) を比べると, 可積分点では長時間ゆらぎが相対的に大きい.

5.3 有限サイズスケーリング

最後に, クリロフ複雑性の長時間平均 $\overline{C}$ [式 (18)] や長時間ゆらぎ $(\Delta C)^2$ [式 (21)] に関する有限サイズスケーリングの結果を示す.

図 3 は $\overline{C}$, $(\Delta C)^2$, $\Delta C/\overline{C}$ の D_K 依存性を示す. サイズ L は $L = 10, 11, 12, 13, 14$, 縦磁場は $h_z/J = 1, 0.5, 0.1, 0.001, 0$ である. 図 3(a) は $C(t)$ の長時間平均 $\overline{C}$ の D_K 依存性を示しており, $\overline{C}$ がサイズ L に対して指数関数的に増大していることがわかる. この指数関数的増大は, 非可積分系でも, 可積分・近可積分系でも見られるが, 可積分・近可積分系では増加の程度がやや小さい. 同様に, 図 3(b) は $C(t)$ の長時間ゆらぎ $(\Delta C)^2$ の D_K 依存性を示している. $\overline{C}$ とは異なり, 有限サイズ効果が大きい, 概ね指数関数的な増大をしており, サイズが無限大の極限で発散すると推測される. 図 3(c) は, $\Delta C/\overline{C}$ の D_K 依存性を示している. これは図 2 のような $C(t)$ のグラフにおいて, 長時間領域におけるゆらぎが, サイズ L を大きくすると見えなくなることを意味する.

$\overline{C}$, $(\Delta C)^2$, $\Delta C/\overline{C}$ のサイズ依存性を調べるために, $\overline{C}$ or $(\Delta C)^2 = \alpha D_K^\gamma$, $\Delta C/\overline{C} = \alpha D_K^{-\gamma}$ という関数形を仮定し, パラメタ α, γ を推定した. これらのパラメタを $\gamma_{\overline{C}}$ のように書く. 図 4 は γ の

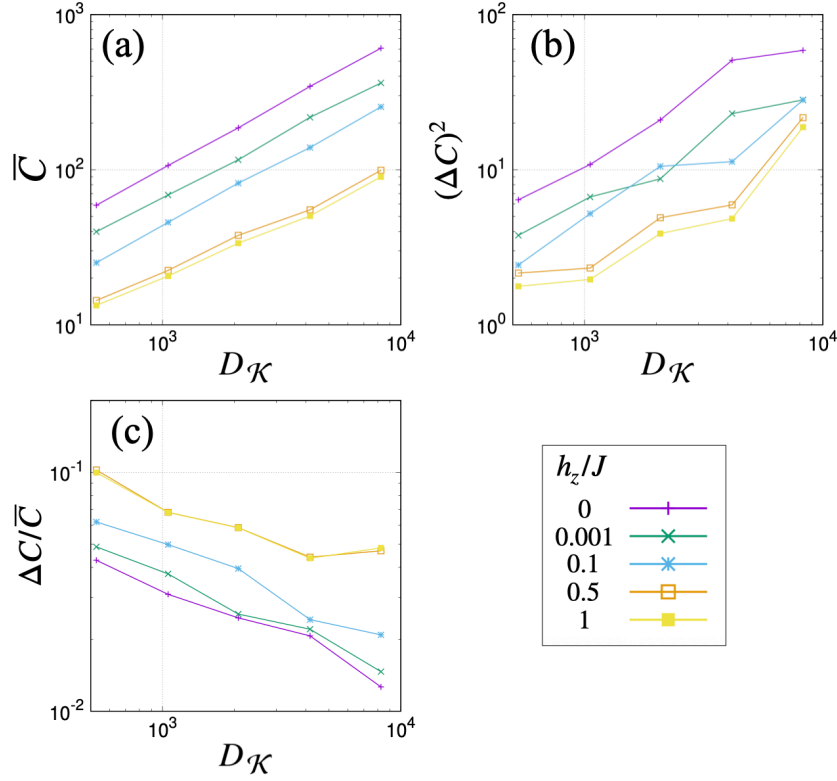


図 3 $\bar{C}, (\Delta C)^2, \Delta C/\bar{C}$ の D_K 依存性. [パラメタ: $L = 10, 11, 12, 13, 14$ ($D_K = 528, 1056, 2080, 4160, 8256$), $h_z/J = 0, 0.001, 0.1, 0.5, 1$]

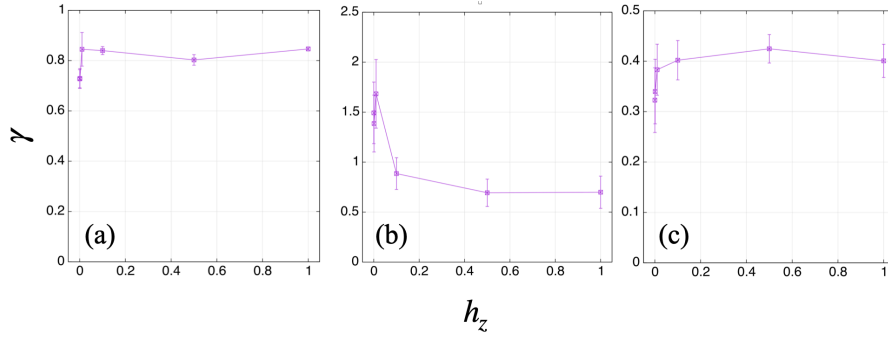


図 4 $\bar{C}, (\Delta C)^2, \Delta C/\bar{C}$ のサイズ依存性をフィッティングして得られるべき γ の h_z 依存性. パラメタ: $L = 10, 11, 12, 13, 14$. (a) $\bar{C}$, (b) $(\Delta C)^2$, (c) $\Delta C/\bar{C}$.

h_z 依存性を示す. 図 4(a)(b) が示すように, $\gamma_{\bar{C}}$ および $\gamma_{(\Delta C)^2}$ は, 非可積分の領域では h_z に大きく依存せず, 可積分点近くでやや小さい (大きい) 値を取る. $\gamma_{\Delta C/\bar{C}}$ の振る舞いは $\gamma_{\bar{C}}$ と似ており, 非可積分の領域では h_z に大きく依存せず, 可積分点近くでやや小さい値を取る [図 4(c)]. 式 (25) によると $\gamma_{(\Delta C)^2} = 2 - \alpha$ が成り立つはずだが, 図 4(b) に示すように, $\gamma_{(\Delta C)^2}$ は概ね 1 以下の値を取る. 図 5(a) は $|X+\rangle$ に対する D_{eff} の D_K 依存性を表している. ここから α をフィッティングで推定すると, $h_z = 0, 0.5, 1$ に対して $\alpha \simeq 0.2$ となる. そのため, $2 - \alpha \simeq 1.8 > \gamma_{(\Delta C)^2}$ が成り立ち, これは式 (25) の不等式が非常に緩いことを示唆する.

この不等式の緩さの原因について考えるために, 不等式 (22) に立ち返る. この不等式は, $O_{ij} := \langle E_i | O | E_j \rangle$ とすると

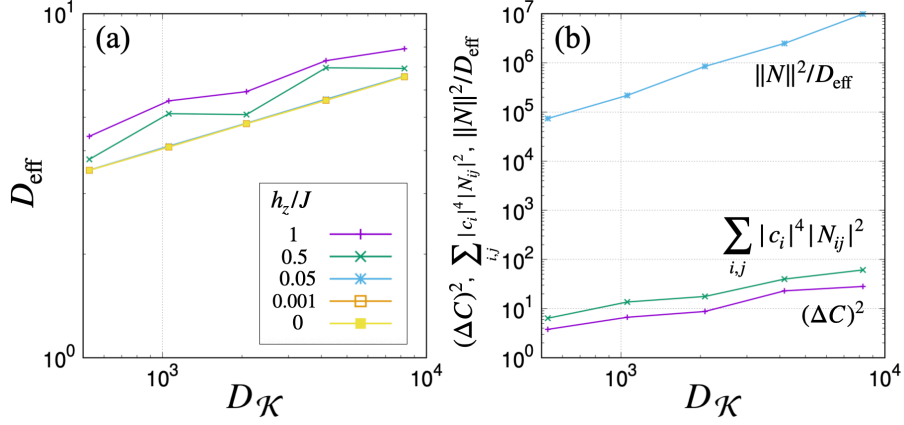


図 5 (a) 有効次元 D_{eff} の D_K 依存性 (b) $(\Delta C)^2$, $\sum_{i,j} |c_i|^4 |N_{ij}|^2$, $\|N\|^2/D_{\text{eff}}$ の D_K 依存性 [パラメタ: $L = 10, 11, 12, 13, 14$ ($D_K = 528, 1056, 2080, 4160, 8256$)]

$$(\Delta O)^2 = \sum_{i \neq j} |c_i|^2 |c_j|^2 |O_{ij}|^2 \quad (30)$$

$$\leq \sum_{i,j} |c_i|^4 |O_{ij}|^2 \quad (31)$$

$$\leq \frac{\|O\|^2}{D_{\text{eff}}} \quad (32)$$

のように示すことが出来る。ここで $O = \mathcal{N}$ として、式 (31) の右辺を評価し、 $(\Delta C)^2$, $\|C\|^2/D_{\text{eff}}$ と比較した結果を図 5(b) に示す。不等式 $(\Delta C)^2 \leq \sum_{i,j} |c_i|^4 |N_{ij}|^2$ は、 $\sum_{i,j} |c_i|^4 |N_{ij}|^2 \leq \|N\|^2/D_{\text{eff}}$ と比べると非常にタイトであることがわかる。これは、クリロフ基底における N_{ij} のばらつきが大きいことを意味する。また、この結果は、クリロフ基底の数演算子の緩和の議論では、有効次元 D_{eff} による議論では不十分であることも示唆している。

最後に、ピーク構造の高さについてコメントする。ピーク構造の高さを $\delta C_{\text{peak}} := C(t_{\text{peak}}) - \overline{C}$ と定義する。ここで t_{peak} は $C(t)$ がピークをとる時間である。図 2 のような $C(t)$ の t 依存性のグラフでピークが時間ゆらぎに埋もれずに見えるためには、 $\delta C_{\text{peak}} \gg \Delta C$ が必要である。そのため、 $\delta C_{\text{peak}} = \mathcal{O}(D_K^{\gamma_{\text{peak}}})$ と置くと、 $\gamma_{\text{peak}} > \gamma_{(\Delta C)^2}/2$ が必要である。図 4(b) の結果より、非可積分のパラメタでは $1/2 > \gamma_{(\Delta C)^2}/2$ が成り立つと期待される。すると、 $\gamma_{\text{peak}} > 1/2$ が有限系でピーク構造が見えるためには必要であると考えられる。

付録 A では、初期状態がネール状態 (29) の場合の数値計算結果を示すが、定性的には本節で議論したのと同じ結果である。

6 まとめと展望

本研究では長時間領域におけるクリロフ複雑性に注目し、そのサイズ依存性を数値的に求めた。特に、クリロフ複雑性の長時間平均 $\overline{C}$ と長時間ゆらぎ $(\Delta C)^2$ や、 $\Delta C/\overline{C}$ の熱力学極限における振る舞いを数値的に推測することが重要な目的である。数値計算の結果によると、 $\overline{C}$ と $(\Delta C)^2$ はいずれもクリロフ部分空間の次元に対してべき的増大（サイズに対して指数増大）を示すが、 $\Delta C/\overline{C}$ はクリロフ部分空間の次元に対してべき的減衰（サイズに対して指数減衰）を示す。そのため、長時間領域における時間ゆらぎはサイズが無限大の熱力学極限で相対的に無視できる。物理量の長時間ゆらぎは、有効次元を用いた不等式で上から抑えられることが多いが [式 (22)], 式 (31) のような不等式で抑えることがよ

り適切であることがわかった。これは、クリロフ複雑性を期待値として与える数演算子 [式 (12)] のエネルギー固有状態に対する行列要素が散らばっていることが原因だと考えられる。また、非可積分性の秩序変数として提案されているクリロフ複雑性のピーク構造の高さは、長時間ゆらぎよりも大きくなる必要があるが、本研究の数値計算結果は、ピーク構造のサイズ依存性に対して制限を与えることがわかる。

今後の展望について述べる。まず、クリロフ複雑性のピーク構造やピークの位置についての系統的な数値計算は重要な課題である。クリロフ複雑性のピーク構造の有無は（非）可積分性と関係しているため量子カオスの指標と言えるが、既存の指標であるエネルギー準位統計や固有状態熱化仮説などとの共通点や違いについて明らかにすることが期待される。ただし、ピーク構造が見えるためには十分大きなサイズで計算を行う必要があり、特に有限サイズ効果が大きくなる可積分点に近づくほど要求されるサイズが大きくなる。特に、本研究では、可積分点の計算が十分に出来ておらず、クリロフ次元 D_K が期待される値になっていないため、可積分性を活かした計算をすることは今後の課題である。また、初期状態やハミルトニアンについてのより一層の系統的な数値計算が必要だと考えられる。特に量子多体傷跡状態が生じる PXP 模型などの模型では高々弱い ETH [24–26] しか成り立たず [27, 28]、初期状態の選択が重要になるため、クリロフ複雑性の初期状態依存性を調べるのに適した模型であると考えられる。

付録 A 数値計算の補足

図 A・1 は初期状態がネール状態 (29) の場合の $C(t)$ の時間依存性と $\Delta C/\bar{C}$ の D_K 依存性である。初期状態が $|X+\rangle$ [式 (28)] の場合と定性的に同じ振る舞いをしている。

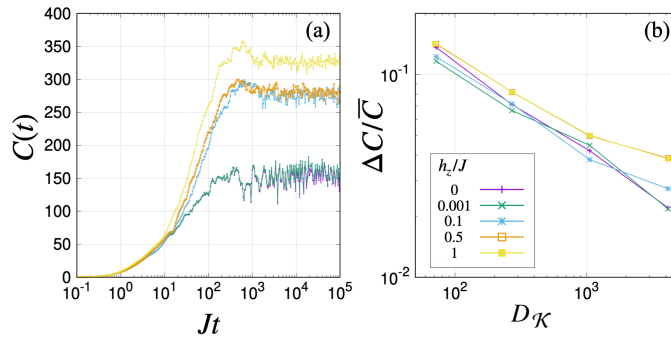


図 A・1 (a) $C(t)$ の時間依存性。サイズは $L = 13$ で $h_z/J = 0, 0.001, 0.1, 0.5, 1$ (bottom to top). (b) $\Delta C/\bar{C}$ の D_K 依存性 ($L = 7, 9, 11, 13$).

参考文献

- [1] C. Gogolin, and J. Eisert, *Equilibration, thermalisation, and the emergence of statistical mechanics in closed quantum systems*, Rep. Prog. Phys. **79**, (2016) 056001.
- [2] L. D'Alessio, Y. Kafri, A. Polkovnikov, and M. Rigol, *From quantum chaos and eigenstate thermalization to statistical mechanics and thermodynamics*, Adv. Phys. **65**, (2016) 239.
- [3] T. Mori, T. N. Ikeda, E. Kaminishi, and M. Ueda, *Thermalization and Prethermalization in Isolated Quantum Systems: A Theoretical Overview*, J. Phys. B **51**, (2018) 112001.
- [4] M. Gring et al., *Relaxation and Pre-thermalization in an Isolated Quantum System*, Science **337**, (2012) 1318.
- [5] S. Trotzky, Y. Chen, A. Fleisch, I. P. McCulloch, U. Schollwöck, J. Eisert, I. Bloch, *Probing the*

- relaxation towards equilibrium in an isolated strongly correlated one-dimensional Bose gas*, Nature Physics **8**, (2012) 325.
- [6] C. Neill et al., *Ergodic dynamics and thermalization in an isolated quantum system*, Nature Physics **12**, (2016) 1037.
 - [7] G. Clos, D. Porras, U. Warring, and T. Schaetz, *Time-Resolved Observation of Thermalization in an Isolated Quantum System*, Phys. Rev. Lett. **117**, (2016) 170401.
 - [8] P. Reimann, *Foundation of Statistical Mechanics under Experimentally Realistic Conditions*, Phys. Rev. Lett. **101**, (2008) 190403.
 - [9] H.-J. Stöckmann, *Quantum Chaos — an introduction*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
 - [10] Y. Y. Atas, E. Bogomolny, O. Giraud, and G. Roux, *Distribution of the Ratio of Consecutive Level Spacings in Random Matrix Ensembles*, Phys. Rev. Lett. **110**, (2013) 084101.
 - [11] M. Rigol, V. Dunjko, and M. Olshanii, *Thermalization and its mechanism for generic isolated quantum systems*, Nature **452**, (2008) 854.
 - [12] W. Beugeling, R. Moessner, and M. Haque, *Finite-Size Scaling of Eigenstate Thermalization*, Phys. Rev. E **89**, (2014) 042112.
 - [13] H. Kim, T. N. Ikeda, and D. A. Huse, *Testing whether all eigenstates obey the eigenstate thermalization hypothesis*, Phys. Rev. E **90**, (2014) 052105.
 - [14] T. Yoshizawa, E. Iyoda, and T. Sagawa, *Numerical Large Deviation Analysis of the Eigenstate Thermalization Hypothesis*, Phys. Rev. Lett. **120** (2018) 200604.
 - [15] S. Sugimoto, R. Hamazaki, and M. Ueda, *Test of the Eigenstate Thermalization Hypothesis Based on Local Random Matrix Theory*, Phys. Rev. Lett. **126**, (2021) 120602.
 - [16] J. Li, R. Fan, H. Wang, B. Ye, B. Zeng, H. Zhai, X. Peng, and J. Du, *Measuring Out-of-Time-Order Correlators on a Nuclear Magnetic Resonance Quantum Simulator*, Phys. Rev. X **7**, (2017) 031011.
 - [17] A. M. Green, A. Elben, C. H. Alderete, L. K. Joshi, N. H. Nguyen, T. V. Zache, Y. Zhu, B. Sundar, and N. M. Linke, *Experimental Measurement of Out-of-Time-Ordered Correlators at Finite Temperature*, Phys. Rev. Lett. **128**, (2022) 140601.
 - [18] R. Islam, R. Ma, P. M. Preiss, M. E. Tai, A. Lukin, M. Rispoli, and M. Greiner, *Measuring entanglement entropy in a quantum many-body system*, Nature **528**, (2015) 77.
 - [19] A. M. Kaufman, M. E. Tai, A. Lukin, M. Rispoli, R. Schittko, P. M. Preiss, and M. Greiner, *Quantum thermalization through entanglement in an isolated many-body system*, Science **353**, (2016) 794.
 - [20] D. E. Parker, X. Cao, A. Avdoshkin, T. Scaffidi, and E. Altman, *A Universal Operator Growth Hypothesis*, Phys. Rev. X **9**, (2019) 041017.
 - [21] M. Baggioli, K.-B. Huh, H.-S. Jeong, K.-Y. Kim, and J. F. Pedraza, *Krylov complexity as an order parameter for quantum chaotic-integrable transitions*, Phys. Rev. Research **7**, (2025) 023028.
 - [22] V. Balasubramanian, P. Caputa, J. M. Magan, and Q. Wu, *Quantum chaos and the complexity of spread of states*, Phys. Rev. D **106**, (2022) 046007.
 - [23] M. Alishahiha, S. Banerjee, and M. J. Vasli, *Krylov complexity as a probe for chaos*, Eur. Phys. J. C **85**, (2025) 749.
 - [24] G. Biroli, C. Kollath, and A. M. Läuchli, *Effect of Rare Fluctuations on the Thermalization of Isolated Quantum Systems*, Phys. Rev. Lett. **105**, (2010) 250401.
 - [25] T. Mori, *Weak eigenstate thermalization with large deviation bound*, arXiv: 1609.09776.
 - [26] E. Iyoda, K. Kaneko, and T. Sagawa, *Fluctuation Theorem for Many-Body Pure Quantum States*, Phys. Rev. Lett. **119**, (2017) 100601.
 - [27] M. Serbyn, D. A. Abanin, and Z. Papic, *Quantum many-body scars and weak breaking of ergodicity*, Nature Physics **17**, (2021) 675.
 - [28] S. Moudgalya, B. A. Bernevig and N. Regnault, *Quantum many-body scars and Hilbert space fragmentation: a review of exact results*, Rep. Prog. Phys. **85**, (2022) 086501.