Proc. Sch. Sci. TOKAI UNIV.
61 (2026) 16–31
DOI: 10.18995/24352640.61.16

4次del Pezzo曲面上の空間曲線のtrisecant lineの本数について

山田明*

東海大学 理学研究科数理科学専攻
〒259–1292 平塚市北金目 4–1–1
（2025年10月8日受付；2025年12月5日受理）

On the Number of Trisecant Lines of Space Curves Lying on a Quartic Del Pezzo Surface

by

Akira YAMADA*

Course of Mathematics and Mathematical Sciences, Graduate School of Science, Tokai University
4–1–1 Kitakaname, Hiratsuka-shi, Kanagawa, 259–1292, Japan
*Corresponding author: E-mail: 4CSFM006@tokai.ac.jp, ayamda00000@gmail.com
(Received on Oct. 8, 2025; accepted on Dec. 5, 2025)

Abstract

We compute the number of trisecant lines of curves in the projective 4-space $\mathbb{P}^4$, when the curves are contained in a smooth del Pezzo surface of degree four. Given a curve in $\mathbb{P}^4$, its trisecant line means a straight line in $\mathbb{P}^4$ that intersects it exactly at three points (counting with multiplicities). By its divisor class, every curve on that surface corresponds to a six-tuple of integers in $\mathbb{Z}^6$ (satisfying some numerical conditions) and the tuple is called its *standard coordinate*. In this paper, for every integer k at least six, we classify the classes of curves having k trisecant lines by using their standard coordinates.

Keywords: trisecant line; space curve; del Pezzo surface

1 序 章

一般に，射影空間に埋め込まれた代数多様体に対して，重複度を含めて3点以上で交わる直線をtrisecant lineと呼ぶ．代数多様体のtrisecant lineに関しては，さまざまな先行研究が存在する．古典的な結果としてはtrisecant lemmaが知られており，一般のsecant lineがtrisecant lineであるような

空間曲線は平面に含まれることが主張されている（[1]）．一方，$\mathbb{P}^4$ 内の曲線の trisecant line の本数に関しては，1895 年に Berzolari によって次の事実が証明された：$C \subset \mathbb{P}^4$ を種数 g，次数 d の非特異曲線とするとき，C が有限個の trisecant line を持つならば，その本数は重複度を含めて

$$\frac{(d-2)(d-3)(d-4)}{6} - g(d-4)$$

に等しい（Ballico-Cossidente [2] 参照）．Berzolari の結果は，$\mathbb{P}^4$ 内の直線をパラメータづける Grassmann 多様体 Gr(2,5) 上での交点数の計算から導かれるため，trisecant line の本数は重複度こみでの数え上げの結果となっている．さらに，trisecant line は曲線と丁度 3 点で交わる直線とは限らないことに注意する．また，曲面の trisecant line を扱った研究としては，Russo-Staglianò [3] や Bauer [4] などが知られている．

本論文においては，空間曲線 $C \subset \mathbb{P}^4$ に対して，重複度を含めてちょうど 3 点で交わるような直線を曲線 C の**狭義の** *trisecant line* と定義し，4 次元射影空間内の del Pezzo 曲面上の空間曲線の狭義の trisecant line の本数について調べる．上で述べた Berzolari による trisecant line の数え上げ公式は，trisecant line の定義が異なるため，（与えられた曲線とちょうど 3 点で交わるような）狭義の trisecant line の本数には一般に一致しない．また重複度を含めた数え上げであることから，（通常の広義の）trisecant line の実際の本数とも乖離が見られる．そこで本論文では上記の曲線に対し，狭義の trisecant line の実際の本数について計算する．del Pezzo 曲面は 2 次元の Fano 多様体としてよく知られた重要なクラスの曲面であり，曲面上の空間曲線に関する性質について調べるために便利である．補題 2.1 より，4 次 del Pezzo 曲面上の曲線の狭義の trisecant line は，曲面上の 16 本の直線のみに限られるため都合がよい．さらに，4 次 del Pezzo 曲面上の曲線は標準座標を用いることにより，組み合わせ論的に trisecane line の本数を求めることができる．

非特異射影曲面 S の反標準因子 $-K_S$ が豊富であるとき，S は *del Pezzo* **曲面**と呼ばれる．$-K_S$ の自己交点数 $(-K_S)^2$ を del Pezzo 曲面の**次数**と呼ぶ．任意の 4 次 del Pezzo 曲面 S_4 は（いずれの 3 点も同一直線上に存在しない）一般の 5 点における $\mathbb{P}^2$ のブローアップと同型であり，反標準因子 $-K_{S_4}$ によって $\mathbb{P}^4$ に埋め込むことができる．$\mathbb{P}^2$ の直線の引き戻しの因子類 $\mathbf{l}$ と 5 個の例外曲線の因子類 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_5$ は，S_4 のピカール群 $\operatorname{Pic} S_4$ の自由基底をなし，$\operatorname{Pic} S_4 \simeq \mathbb{Z}^6$ となる．

定義 1.1（[5]） 4 次 del Pezzo 曲面 S_4 上の任意の因子 D は $D \sim a\mathbf{l} - \sum_{i=1}^5 b_i\mathbf{e}_i$ $(a, b_i \in \mathbb{Z})$ と表される．このとき，6 つの整数の組 $(a; b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ を D の**座標**と呼び，$D \sim (a; b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ と表す．また，任意の D に対し，その座標が

$$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq b_4 \geq b_5 \text{ かつ } a \geq b_1 + b_2 + b_3 \tag{1.1}$$

を満たすような適当な $\mathbb{P}^2$ のブローアップ $\pi : S_4 \to \mathbb{P}^2$ が存在し，その基底 $\{\mathbf{l}, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_5\}$ に関する座標を D の**標準座標**という．

因子類 $\mathbf{l}, \mathbf{e}_i$ $(1 \leq i \leq 5)$ は次の交点数をもつ：

$$\mathbf{l}^2 = 1, \quad \mathbf{e}_i^2 = -1, \quad \mathbf{l}.\mathbf{e}_i = 0, \quad \mathbf{e}_i.\mathbf{e}_j = 0 \ (i \neq j).$$

特に，因子 $D \sim a\mathbf{l} - \sum_{i=1}^5 b_i\mathbf{e}_i$ $(a, b_i \in \mathbb{Z})$ の自己交点数は，$D^2 = a^2 - \sum_{i=1}^5 b_i^2$ である．

反標準因子 $-K_S$ との交点数が 1 となる有理曲線を del Pezzo 曲面上の直線と定義する．del Pezzo 曲面上の直線は $\mathbb{P}^4$ 内の直線となり，曲面上の (-1)-曲線となる．[6] の Proposition IV.12 より，4 次 del Pezzo 曲面上の直線のクラスは，$\mathbf{e}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$，$\mathbf{l} - \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j$ $(1 \leq i < j \leq 5)$，$2\mathbf{l} - \sum_{i=1}^5 \mathbf{e}_i$ と表される．これらの直線を便宜上それぞれ [I] 型，[II] 型，[III] 型の直線と定めると，その本数は表 1

のようになる．4 次 del Pezzo 曲面上の曲線 C に対して，[I] 型の直線のうち x 本，[II] 型の直線のうち y 本，[III] 型の直線のうち z 本が C の trisecant line になるとき，C を (x,y,z) **型の曲線**と呼ぶことにする．以下では曲面 S_4 上の直線と直線の属するクラスを同一視する．

表 1　直線の種類とその本数

型	直線のクラス	直線の本数
[I]	$\mathbf{e}_i (i=1,2,3,4,5)$	5
[II]	$\mathbf{l}-\mathbf{e}_i-\mathbf{e}_j (1\le i<j\le 5)$	10
[III]	$2\mathbf{l}-\sum_{i=1}^{5}\mathbf{e}_i$	1

以下の定理 1.2 が本論文の主結果であり，trisecant line の本数が大きいとき，曲線の標準座標に対称性が現れることを主張する．以下，曲線又は空間曲線といえば，（4 次 del Pezzo 曲面上の）非特異既約曲線とし，空間曲線の trisecant line といえば，曲線と丁度 3 点で交わる $\mathbb{P}^4$ 内の直線（曲線の狭義の trisecant line）を意味する．

定理 1.2　4 次 del Pezzo 曲面上の空間曲線 C のクラスの標準座標を $(a;b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)$ とするとき，trisecant line が 6 本以上であれば，次のいずれかが成立する．

(1)　trisecant line が 16 本となる曲線のクラスは，$(5,10,1)$ 型の $(9;3,3,3,3,3)$ である．
(2)　trisecant line が 10 本となる曲線のクラスは，次のいずれかである．
　(i)　$(0,10,0)$ 型の $(2\alpha+3;\alpha,\alpha,\alpha,\alpha,\alpha)$　$(\alpha=0,1,2)$
　(ii)　$(4,6,0)$ 型の $(9;3,3,3,3,\beta)$　$(\beta=0,1,2)$
(3)　trisecant line が 8 本となる曲線のクラスは，次のいずれかである．
　(i)　$(1,6,1)$ 型の $(2\beta+3;3,\beta,\beta,\beta,\beta)$　$(\beta=1,2)$
　(ii)　$(2,6,0)$ 型の $(\beta+6;3,3,\beta,\beta,\beta)$　$(\beta=0,1,2)$
　(iii)　$(4,4,0)$ 型の $(\alpha+6;\alpha,3,3,3,3)$　$(\alpha\ge 4)$
(4)　trisecant line が 6 本となる曲線のクラスは，次のいずれかである．
　(i)　$(0,6,0)$ 型の $(2\alpha+3;\alpha,\alpha,\alpha,\alpha,\beta)$　$((\alpha,\beta)=(2,1),(2,0),(1,0))$
　(ii)　$(0,6,0)$ 型の $(2\beta+3;\alpha,\beta,\beta,\beta,\beta)$　$((\alpha,\beta)=(2,1),(2,0),(1,0))$
　(iii)　$(0,6,0)$ 型の $(\alpha+\beta+3;\alpha,\alpha,\alpha,\beta,\beta)$　$((\alpha,\beta)=(2,1),(1,0))$
　(iv)　$(0,6,0)$ 型の $(\alpha+\beta+3;\alpha,\alpha,\beta,\beta,\beta)$　$((\alpha,\beta)=(2,1),(2,0),(1,0))$
　(v)　$(2,4,0)$ 型の $(\beta+6;3,3,\beta,\beta,\gamma)$　$((\beta,\gamma)=(2,1),(2,0),(1,0))$
　(vi)　$(3,3,0)$ 型の $(\alpha+6;\alpha,3,3,3,\beta)$　$(\alpha\ge 4,\ 0\le\beta\le 2)$
　(vii)　$(3,3,0)$ 型の $(9;3,3,3,\alpha,\beta)$　$(2\ge\alpha\ge\beta\ge 0)$

特に，trisecant line の本数が $7,9,11,12,13,14,15$ 本となる曲線は存在しない．

定理 1.2 のクラスに属す曲線が存在することは，標準座標に関する条件 (1.1) に加えて $b_5\ge 0$ と $a>b_1$ を満たすことから導かれる．またそれらの曲線が定理 1.2 で与えられた本数の trisecant line を実際に有すことも，補題 2.3 からわかる．著者の知る限り（平面曲線をのぞく）空間曲線に対し，その trisecant line の実際の本数を計算した先行研究は少なく，定理は Berzolari の結果などの先行研究を補う結果であるように思われる．論文全体において，基礎体は代数閉かつ標数 0 の体であると仮定する．

2　[II] 型の trisecant line と曲線の標準座標

本節では，主結果の証明のための準備を行う．まず，4 次 del Pezzo 曲面 S_4 上の曲線の trisecant

line は，（4 次 del Pezzo）曲面上の 16 本の直線に限ることの証明を行う．

補題 2.1　4 次 del Pezzo 曲面 S_4 上の曲線の trisecant line は，（4 次 del Pezzo）曲面上の直線に限る．

証明　S_4 上のある曲線 C の trisecant line を l とすると，C と l の 3 つの交点は，直線 l を含むような任意の平面 P に含まれる．S_4 を含む任意の 2 次超曲面 Q と P の共通部分 $P \cap Q$ は 2 次曲線になるが，平面 P 上で 2 次曲線 $P \cap Q$ と l は 3 点で交わることになり，ベズーの定理により，$l \subset P \cap Q$ となる．よって，l は S_4 を含む任意の 2 次超曲面 Q に含まれるので，$l \subset S_4$ となる．　□

定理 1.2 の証明をする上では，[II] 型の trisecant line の本数に着目することが重要である．以下では，[II] 型の trisecant line の本数が多い場合の曲線のクラスの分類を行う．[II] 型の直線が S_4 上の曲線の trisecant line になるとき，曲線の標準座標や trisecant line の本数は以下のような制約を受ける．

補題 2.2　4 次 del Pezzo 曲面上の空間曲線 C のクラスの標準座標を $(a; b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ とするとき，次が成り立つ．

(1)　1 以上 5 以下の相異なる整数 i, j, k に対し，直線 $\mathbf{l} - \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j$ と $\mathbf{l} - \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_k$ が共に C の trisecant line となるならば，$b_j = b_k$ が成り立つ．

(2)　曲線 C の [II] 型の trisecant line が存在すれば，その本数 n は $n \leq 10$ であり，かつ，$n \neq 5, 7, 8, 9$ を満たす．

証明　以下，trisecant line は，C の trisecant line とする．(1) を示す．直線 $\mathbf{l} - \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j$ と $\mathbf{l} - \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_k$ が共に曲線 $C \sim (a; b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ の trisecant line ならば，

$$a - b_i - b_j = C.(\mathbf{l} - \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j) = 3 = C.(\mathbf{l} - \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_k) = a - b_i - b_k$$

より，$b_j = b_k$ が成り立つ．

(2) を示す．7 本以上の [II] 型の trisecant line が存在すると仮定する．[II] 型の trisecant line が 7 本あるとすると，

$$3 = C.(\mathbf{l} - \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j) = a - b_i - b_j \text{ かつ } i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ かつ } i < j \qquad (2.1)$$

となる (i, j) の組が 7 個あるので，$b_1, \ldots, b_5$ という 5 種類の数が計 14 回現れる．このとき，鳩の巣原理より，この式 (2.1) の中に 3 回以上現れる b_{k_1} $(k_1 \in \{1, 2, 3, 4, 5\})$ が少なくとも 1 つ存在することになる．このことより，

$$\begin{aligned} 3 &= a - b_{k_1} - b_{k_2} \\ &= a - b_{k_1} - b_{k_3} \\ &= a - b_{k_1} - b_{k_4} \quad (k_2, k_3, k_4 \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{k_1\},\ k_2 < k_3 < k_4) \end{aligned}$$

と表すことができ，(1) より，$b_{k_2} = b_{k_3} = b_{k_4}$ が成り立つ．このとき，$\mathbf{l} - \mathbf{e}_{k_1} - \mathbf{e}_{k_2}, \mathbf{l} - \mathbf{e}_{k_1} - \mathbf{e}_{k_4}, \mathbf{l} - \mathbf{e}_{k_1} - \mathbf{e}_{k_4}$ の 3 本は，[II] 型の trisecant line である．また，$k_5 \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{k_1, k_2, k_3, k_4\}$ とすると，$\{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ となる．

(i)　$\mathbf{l} - \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j$ が [II] 型の trisecant line であるような $i, j \in \{k_2, k_3, k_4\}$ $(i < j)$ が少なくとも 1 組存在するとき，$\mathbf{l} - \mathbf{e}_{k_1} - \mathbf{e}_i$ も trisecant line なので，(1) より，$b_{k_1} = b_i$ $(= b_{k_2} = b_{k_3} = b_{k_4})$ となる．ゆえに，$a - b_i - b_j = 3$ $(i, j \in \{k_1, k_2, k_3, k_4\},\ i < j)$ となるので，計 6 本の $\mathbf{l} - \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j$ $(i, j \in \{k_1, k_2, k_3, k_4\},\ i < j)$ が [II] 型の trisecant line となる．7 本以上の [II]

型の trisecant line が存在すると仮定しているので，少なくとも他に 1 本の [II] 型の trisecant line が存在するが，それは $\mathbf{l}-\mathbf{e}_m-\mathbf{e}_{k_5}$ $(m\in\{k_1,k_2,k_3,k_4\})$ と表される．よって，$a-b_m-b_{k_5}=3=a-b_m-b_{m'}(m'\in\{k_1,k_2,k_3,k_4\}\setminus\{m\})$ より，$b_{k_5}=b_{m'}$ $(=b_{k_1}=b_{k_2}=b_{k_3}=b_{k_4})$ となるので，任意の $i,j\in\{1,2,3,4,5\}$, $(i<j)$ に対して，$a-b_i-b_j=3$ となり，[II] 型の trisecant line は 10 本となる．

図 1 は，直線が曲線の trisecant line になっていく状況を視覚化したものであり，証明の流れを理解するために役立つかもしれない．直線 $\mathbf{l}-\mathbf{e}_{k_i}-\mathbf{e}_{k_j}(i<j)$ が trisecant line となるとき，表の k_i 行 k_j 列目に 2 つの記号○と◌を記入して，証明の流れを表している．矢印は証明のステップに対応し，○は前のステップで trisecant line であることが確定した直線に対応し，◌は次のステップで新たに trisecant line であることがわかる直線に対応する．以降の証明においても同様の図を用いる．

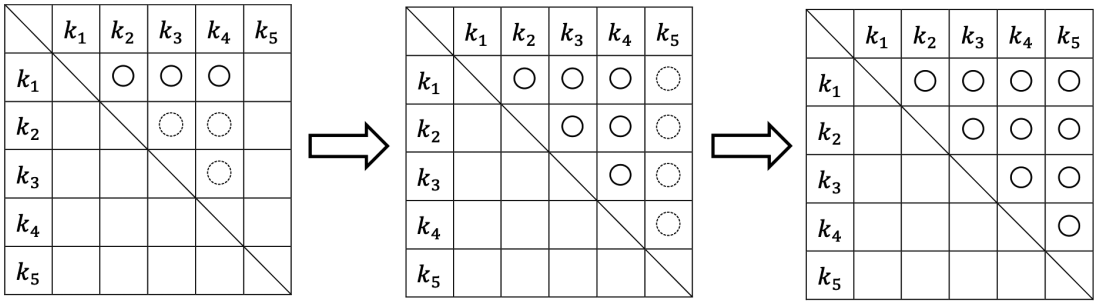


図 1　(i) の場合

(ii)　$\mathbf{l}-\mathbf{e}_i-\mathbf{e}_j$ が [II] 型の trisecant line であるような $i,j\in\{k_2,k_3,k_4\}$ $(i<j)$ が存在しないとすると，残りの 4 本の [II] 型の trisecant line は，$\mathbf{l}-\mathbf{e}_m-\mathbf{e}_{k_5}$ $(m\in\{k_1,k_2,k_3,k_4\})$ と表される．よって，$a-b_{k_1}-b_{k_5}=3=a-b_{k_2}-b_{k_5}$ より，$b_{k_1}=b_{k_2}$ である．また，$a-b_{k_1}-b_{k_2}=3=a-b_{k_1}-b_{k_5}$ より，$b_{k_2}=b_{k_5}$ であるので，$b_{k_1}=b_{k_2}=b_{k_3}=b_{k_4}=b_{k_5}$ となる．ゆえに，任意の $i,j\in\{1,2,3,4,5\}$, $(i<j)$ に対して，$a-b_i-b_j=3$ となり，[II] 型の trisecant line は 10 本となる．（図 2 参照）

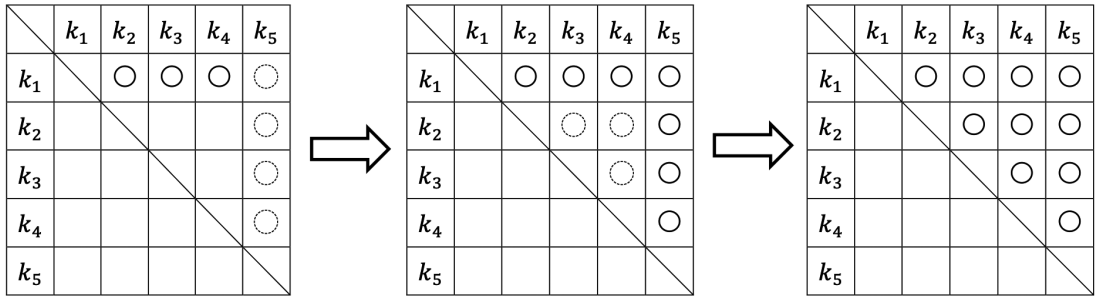


図 2　(ii) の場合

したがって，(i), (ii) より，7 本以上の [II] 型の trisecant line が存在するとき，[II] 型の trisecant line は 10 本となる．

少なくとも 5 本の [II] 型の trisecant line が存在すると仮定する．[II] 型の trisecant line が 5 本あるとすると，条件 (2.1) を満たす (b_i,b_j) の組が 5 個ある．このとき，$b_1,\ldots,b_5$ という 5 種類の数が計

10 回現れることになるが，鳩の巣原理より，全ての $b_1,\dots,b_5$ が 2 回ずつ現れるか，3 回以上現れる b_{k_1} $(k_1 \in \{1,2,3,4,5\})$ が少なくとも 1 つ存在するかのいずれかとなる．

(iii) 全ての $b_1,\dots,b_5$ が 2 回ずつ現れるとき，$a-b_{i_1}-b_{i_2} = a-b_{i_2}-b_{i_3} = a-b_{i_3}-b_{i_4} = a-b_{i_4}-b_{i_5} = a-b_{i_5}-b_{i_1} = 3$ $(\{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5\} = \{1,2,3,4,5\})$ となり，(1) より，$b_{i_1} = b_{i_2} = b_{i_3} = b_{i_4} = b_{i_5}$ すなわち，$b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5$ となるので，任意の $i,j \in \{1,2,3,4,5\}$，$(i<j)$ に対して，$a-b_i-b_j = 3$ となり，[II] 型の trisecant line は 10 本となる．

(iv) 3 回以上現れる b_{k_1} $(k_1 \in \{1,2,3,4,5\})$ が少なくとも 1 つ存在するとき，

$$3 = a-b_{k_1}-b_{k_2} = a-b_{k_1}-b_{k_3} = a-b_{k_1}-b_{k_4}$$

が成り立つような $k_2,k_3,k_4 \in \{1,2,3,4,5\}\setminus\{k_1\}$ $(k_2<k_3<k_4)$ が存在する．(1) より，$b_{k_2} = b_{k_3} = b_{k_4}$ が成り立つ．さらに，$k_5 \in \{1,2,3,4,5\}\setminus\{k_1,k_2,k_3,k_4\}$ とすると，$\{k_1,k_2,k_3,k_4,k_5\} = \{1,2,3,4,5\}$ となる．残り 2 本以上の [II] 型の trisecant line のうち，少なくとも 1 本は，$\mathbf{l}-\mathbf{e}_i-\mathbf{e}_j$ $(i,j \in \{k_2,k_3,k_4\}\ i<j)$ と表されるか $\mathbf{l}-\mathbf{e}_m-\mathbf{e}_{k_5}$ $(m \in \{k_2,k_3,k_4\})$ と表されるかのいずれかである．（仮に，trisecant line が残り 2 本で，2 本のうちの 1 本が $\mathbf{l}-\mathbf{e}_{k_1}-\mathbf{e}_{k_5}$ であったとしてももう 1 本は上記のいずれかになる．）

(a) $\mathbf{l}-\mathbf{e}_i-\mathbf{e}_j$ $(i,j \in \{k_2,k_3,k_4\}\ i<j)$ と表される [II] 型の trisecant line が少なくとも 1 本存在するとき，$a-b_i-b_j = 3 = a-b_{k_1}-b_j$ より，$b_{k_1} = b_i$ $(= b_{k_2} = b_{k_3} = b_{k_4})$ となり，任意の $i,j \in \{k_1,k_2,k_3,k_4\}$ $(i<j)$ に対して，$a-b_i-b_j = 3$ となり，少なくとも 6 本の [II] 型の trisecant line が存在する．（図 3 参照）

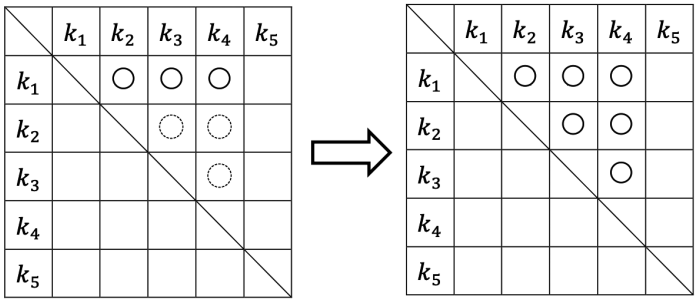


図 3 (iv) (a) の場合

(b) $\mathbf{l}-\mathbf{e}_m-\mathbf{e}_{k_5}$ $(m \in \{k_2,k_3,k_4\})$ と表される [II] 型の trisecant line が少なくとも 1 本存在するとき，$a-b_m-b_{k_5} = 3 = a-b_{k_1}-b_m$ より，$b_{k_1} = b_{k_5}$ となるので，全ての $m \in \{k_2,k_3,k_4\}$ に対して，$a-b_m-b_{k_5} = 3$ となる．よって，任意の $i \in \{k_1,k_5\}, j \in \{k_2,k_3,k_4\}$ に対して，$a-b_i-b_j = 3$ となり，少なくとも計 6 本の [II] 型の trisecant line が存在する．（図 4 参照）

したがって，(iii), (iv) より，少なくとも 5 本の [II] 型の trisecant line が存在するとき，6 本以上の [II] 型の trisecant line が存在する．以上のことより，4 次 del Pezzo 曲面 S_4 上の曲線 C の [II] 型の trisecant line の本数 n は $0 \le n \le 4$ または $n = 6, n = 10$ を満たす． □

4 次 del Pezzo 曲面上の空間曲線 C と重複度を含めて丁度 n 点 $(n \ge 0)$ で交わる直線を **n-secant line** と呼ぶ．すなわち，trisecant line は 3-secant line である．C のクラスの標準座標を $(a;b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)$ の (b_1,b_2,b_3,b_4,b_5) の部分を 5 の分割 $(5),(4,1),(3,2),(3,1,1),(2,2,1),(2,1,1,1),(1,1,1,1,1)$ とその順序を交換した場合に対応させることにより，それぞれ [II] 型の n-secant line の本数は以下のように与えられる．

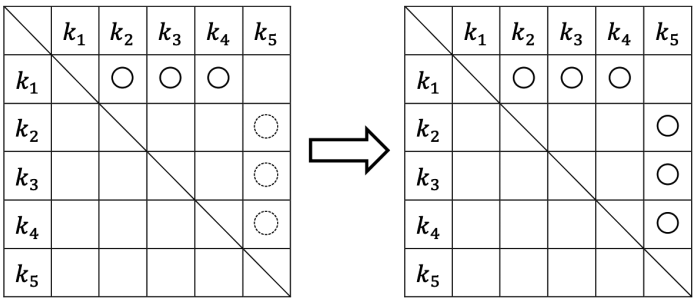


図 4　(iv) (b) の場合

補題 2.3　4 次 del Pezzo 曲面上の空間曲線 C のクラスの標準座標を $(a; b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ とするとき，以下のように，計 10 本の [II] 型の n-secant line をそれぞれ持つことがわかる．

(1)　曲線 $(a; \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \alpha)$ $(\alpha \geq 0)$ は，[II] 型の $(a - 2\alpha)$-secant line を 10 本持つ．

(2)　曲線 $(a; \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \beta)$ $(\alpha > \beta \geq 0)$ は，[II] 型の $(a-2\alpha)$-secant line を 6 本，$(a-\alpha-\beta)$-secant line を 4 本持つ．

(3)　曲線 $(a; \alpha, \beta, \beta, \beta, \beta)$ $(\alpha > \beta \geq 0)$ は，[II] 型の $(a-2\beta)$-secant line を 6 本，$(a-\alpha-\beta)$-secant line を 4 本持つ．

(4)　曲線 $(a; \alpha, \alpha, \alpha, \beta, \beta)$ $(\alpha > \beta \geq 0)$ は，[II] 型の $(a-2\alpha)$-secant line を 3 本，$(a-\alpha-\beta)$-secant line を 6 本，$(a-2\beta)$-secant line を 1 本持つ．

(5)　曲線 $(a; \alpha, \alpha, \beta, \beta, \beta)$ $(\alpha > \beta \geq 0)$ は，[II] 型の $(a-2\alpha)$-secant line を 1 本，$(a-\alpha-\beta)$-secant line を 6 本，$(a-2\beta)$-secant line を 3 本持つ．

(6)　曲線 $(a; \alpha, \alpha, \alpha, \beta, \gamma)$ $(\alpha > \beta > \gamma \geq 0)$ は，[II] 型の $(a-2\alpha)$-secant line を 3 本，$(a-\alpha-\beta)$-secant line を 3 本，$(a-\alpha-\gamma)$-secant line を 3 本，$(a-\beta-\gamma)$-secant line を 1 本持つ．

(7)　曲線 $(a; \alpha, \beta, \beta, \beta, \gamma)$ $(\alpha > \beta > \gamma \geq 0)$ は，[II] 型の $(a-2\beta)$-secant line を 3 本，$(a-\alpha-\beta)$-secant line を 3 本，$(a-\alpha-\gamma)$-secant line を 1 本，$(a-\beta-\gamma)$-secant line を 3 本持つ．

(8)　曲線 $(a; \alpha, \beta, \gamma, \gamma, \gamma)$ $(\alpha > \beta > \gamma \geq 0)$ は，[II] 型の $(a-2\gamma)$-secant line を 3 本，$(a-\alpha-\beta)$-secant line を 1 本，$(a-\alpha-\gamma)$-secant line を 3 本，$(a-\beta-\gamma)$-secant line を 3 本持つ．

(9)　曲線 $(a; \alpha, \alpha, \beta, \beta, \gamma)$ $(\alpha > \beta > \gamma \geq 0)$ は，[II] 型の $(a-2\alpha)$-secant line を 1 本，$(a-2\beta)$-secant line を 1 本，$(a-\alpha-\beta)$-secant line を 4 本，$(a-\alpha-\gamma)$-secant line を 2 本，$(a-\beta-\gamma)$-secant line を 2 本持つ．

(10)　曲線 $(a; \alpha, \alpha, \beta, \gamma, \gamma)$ $(\alpha > \beta > \gamma \geq 0)$ は，[II] 型の $(a-2\alpha)$-secant line を 1 本，$(a-2\gamma)$-secant line を 1 本，$(a-\alpha-\beta)$-secant line を 2 本，$(a-\alpha-\gamma)$-secant line を 4 本，$(a-\beta-\gamma)$-secant line を 2 本持つ．

(11)　曲線 $(a; \alpha, \beta, \beta, \gamma, \gamma)$ $(\alpha > \beta > \gamma \geq 0)$ は，[II] 型の $(a-2\beta)$-secant line を 1 本，$(a-2\gamma)$-secant line を 1 本，$(a-\alpha-\beta)$-secant line を 2 本，$(a-\alpha-\gamma)$-secant line を 2 本，$(a-\beta-\gamma)$-secant line を 4 本持つ．

(12)　曲線 $(a; \alpha, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ $(\alpha > \beta > \gamma > \delta \geq 0)$ は，[II] 型の $(a-2\alpha)$-secant line を 1 本，$(a-\alpha-\beta)$-secant line を 2 本，$(a-\alpha-\gamma)$-secant line を 2 本，$(a-\alpha-\delta)$-secant line を 2 本，$(a-\beta-\gamma)$-secant line を 1 本，$(a-\beta-\delta)$-secant line を 1 本，$(a-\gamma-\delta)$-secant line を 1 本持つ．

(13)　曲線 $(a; \alpha, \beta, \beta, \gamma, \delta)$ $(\alpha > \beta > \gamma > \delta \geq 0)$ は，[II] 型の $(a-2\beta)$-secant line を 1 本，$(a-\alpha-\beta)$-secant line を 2 本，$(a-\beta-\gamma)$-secant line を 2 本，$(a-\beta-\delta)$-secant line を 2 本，$(a-\alpha-\gamma)$-secant line を 1 本，$(a-\alpha-\delta)$-secant line を 1 本，$(a-\gamma-\delta)$-secant line を 1 本持つ．

(14) 曲線 $(a;\alpha,\beta,\gamma,\gamma,\delta)$ $(\alpha>\beta>\gamma>\delta\geq 0)$ は，[II] 型の $(a-2\gamma)$-secant line を 1 本，$(a-\alpha-\gamma)$-secant line を 2 本，$(a-\beta-\gamma)$-secant line を 2 本，$(a-\gamma-\delta)$-secant line を 2 本，$(a-\alpha-\beta)$-secant line を 1 本，$(a-\alpha-\delta)$-secant line を 1 本，$(a-\beta-\delta)$-secant line を 1 本持つ．

(15) 曲線 $(a;\alpha,\beta,\gamma,\delta,\delta)$ $(\alpha>\beta>\gamma>\delta\geq 0)$ は，[II] 型の $(a-2\delta)$-secant line を 1 本，$(a-\alpha-\delta)$-secant line を 2 本，$(a-\beta-\delta)$-secant line を 2 本，$(a-\gamma-\delta)$-secant line を 2 本，$(a-\alpha-\beta)$-secant line を 1 本，$(a-\alpha-\gamma)$-secant line を 1 本，$(a-\beta-\gamma)$-secant line を 1 本持つ．

(16) 曲線 $(a;\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon)$ $(\alpha>\beta>\gamma>\delta>\epsilon\geq 0)$ は，[II] 型の $(a-\alpha-\beta)$-secant line を 1 本，$(a-\alpha-\gamma)$-secant line を 1 本，$(a-\alpha-\delta)$-secant line を 1 本，$(a-\alpha-\epsilon)$-secant line を 1 本，$(a-\beta-\gamma)$-secant line を 1 本，$(a-\beta-\delta)$-secant line を 1 本，$(a-\beta-\epsilon)$-secant line を 1 本，$(a-\gamma-\delta)$-secant line を 1 本，$(a-\gamma-\epsilon)$-secant line を 1 本，$(a-\delta-\epsilon)$-secant line を 1 本持つ．

証明 標準座標の条件 $a\geq b_1+b_2+b_3$ より，$a-b_1-b_2\geq b_3\geq 0$ であるので，任意の $i,j\in\{1,2,3,4,5\}$ に対して，$a-b_i-b_j\geq 0$ である．標準座標 $(a;b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)$ をもつ曲線は，任意の $i,j\in\{1,2,3,4,5\}$ $(i\neq j)$ に対して，[II] 型の直線 $\mathbf{l}-\mathbf{e}_i-\mathbf{e}_j$ と $(a-b_i-b_j)$ 点で交わる．よって，(1) の標準座標 $(a;\alpha,\alpha,\alpha,\alpha,\alpha)$ $(\alpha\geq 0)$ を持つ曲線は，$(a-2\alpha)$-secant line を ${}_5C_2=10$ 本持つ．(2) の標準座標 $(a;\alpha,\alpha,\alpha,\alpha,\beta)$ $(\alpha>\beta\geq 0)$ を持つ曲線は，$(a-2\alpha)$-secant line を ${}_4C_2=6$ 本，$(a-\alpha-\beta)$-secant line を ${}_4C_1\cdot{}_1C_1=4$ 本持つ．以下同様にして上記の結果が導かれる． □

補題 2.3 の (1) から (16) のうち，[II] 型の trisecant line の本数が丁度 6 本となる場合を考える．この場合，曲線の標準座標 $(a;b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)$ において b_1,b_2,b_3,b_4,b_5 の 5 つの値の取り方は，次の補題 2.4 より，4 つの同じ値が現れるか，3 つの同じ値と 2 つの同じ値が現れるかのいずれかである．これらの標準座標（又は曲線のクラス）をポーカーの役に見立てて，それぞれ**フォーカード型**，**フルハウス型**と呼ぶ．

補題 2.4 4 次 del Pezzo 曲面上の空間曲線 C が，[II] 型の trisecant line を丁度 6 本もつとき，C の標準座標は，

$$(2\alpha+3;\alpha,\alpha,\alpha,\alpha,\beta),\ (2\beta+3;\alpha,\beta,\beta,\beta,\beta),$$
$$(\alpha+\beta+3;\alpha,\alpha,\alpha,\beta,\beta),\ (\alpha+\beta+3;\alpha,\alpha,\beta,\beta,\beta)\quad(\alpha>\beta\geq 0)$$

のいずれかに等しい．

証明 補題 2.3(2),(3),(4),(5) より，標準座標

$$(2\alpha+3;\alpha,\alpha,\alpha,\alpha,\beta),\ (2\beta+3;\alpha,\beta,\beta,\beta,\beta),$$
$$(\alpha+\beta+3;\alpha,\alpha,\alpha,\beta,\beta),\ (\alpha+\beta+3;\alpha,\alpha,\beta,\beta,\beta)\quad(\alpha>\beta\geq 0)$$

を持つ曲線は，6 本の [II] 型の trisecant line を持つ．また，逆に 6 本の [II] 型の trisecant line を持つ曲線は他に存在しない．例えば，(6) の場合が 6 本の [II] 型の trisecant line を持つとすると，$a-2\alpha=a-\alpha-\beta$ 又は $a-2\alpha=a-\alpha-\gamma$ 又は $a-\alpha-\beta=a-\alpha-\gamma$ となるが，これは $\alpha>\beta>\gamma$ に矛盾する．他の場合も同様に $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon$ の大小関係に矛盾する． □

注意 2.5 補題 2.4 により，[II] 型の trisecant line の本数が丁度 6 本になるならば，(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5) は，フォーカード型かフルハウス型であるが，逆は正しくない．実際，標準座標 $(10;1,1,1,1,0)$，$(10;1,1,1,0,0)$ はフォーカード型やフルハウス型であるが，[II] 型の trisecant line は存在しない．

補題 2.3 の (1) から (16) のうち，[II] 型の trisecant line の本数が丁度 4 本となる場合を考える．[II] 型の trisecant line の本数が丁度 6 本となる場合と同じように議論をすることができて，曲線の標準座標は次の補題 2.6 のようにフォーカード型，**ツーペア型**，**スリーカード型**となる．

補題 2.6 4 次 del Pezzo 曲面上の空間曲線 C が，[II] 型の trisecant line を丁度 4 本もつとき，C の標準座標は，

$$(\alpha+\beta+3;\alpha,\alpha,\alpha,\alpha,\beta),\ (\alpha+\beta+3;\alpha,\beta,\beta,\beta,\beta)\quad(\alpha>\beta\geq 0),$$
$$(\alpha+\beta+3;\alpha,\alpha,\beta,\beta,\gamma),\ (\alpha+\gamma+3;\alpha,\alpha,\beta,\gamma,\gamma),\ (\beta+\gamma+3;\alpha,\beta,\beta,\gamma,\gamma)\quad(\alpha>\beta>\gamma\geq 0),$$
$$(2\beta+3;\alpha,\beta,\beta,\beta,\gamma)\quad(\alpha>\beta>\gamma\geq 0\text{ かつ }2\beta=\alpha+\gamma)$$

のいずれかに等しい．

証明 補題 2.6 で与えられた 6 個の標準座標のうち，最後の標準座標を除き，補題 2.3(2),(3),(9),(10),(11) より，曲線が 4 本の [II] 型の trisecant line を持つことは明らかである．最後の標準座標を持つ曲線は，補題 2.3(7) と $a-2\beta=a-\alpha-\gamma=3$ より，4 本の [II] 型の trisecant line を持つ．

逆に，曲線が 4 本の [II] 型の trisecant line を持つと仮定する．補題 2.3 の (1) から (16) のそれぞれの場合において，[II] 型の trisecant line が合わせて 4 本となる場合について考えると，補題 2.6 の 6 つの場合以外の標準座標の曲線は，$\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon$ の大小関係と補題 2.2(1) より，丁度 4 本の [II] 型の trisecant line を持たない．例えば，(6) の場合が丁度 4 本の [II] 型の trisecant line を持つと仮定すると，

$$a-2\alpha=a-\beta-\gamma=3\text{ 又は }a-\alpha-\beta=a-\beta-\gamma=3\text{ 又は }a-\alpha-\gamma=a-\beta-\gamma=3$$

が成り立つが，$\alpha>\beta>\gamma$ に矛盾する． □

3 主結果の証明

本節では，定理 1.2 を証明する．

証明 以下，[II] 型の trisecant line の本数により，場合分けによって証明する．まず，[II] 型の直線 10 本すべてが trisecant line となる場合を考える．このとき，補題 2.2 より，任意の $1\leq i<j\leq 5$ に対して，$b_i=b_j$ であり，$C.(\mathbf{l}-\mathbf{e}_i-\mathbf{e}_j)=a-2b_i=3$ である．よって $b_i=\alpha$ とおくと，その曲線のクラスの標準座標は，$(2\alpha+3;\alpha,\alpha,\alpha,\alpha,\alpha)$ となる．また，標準座標の条件 $a\geq b_1+b_2+b_3$ より，$3\geq\alpha$ である．

$\alpha=3$ のとき，$a=2\alpha+3=9$ となり，その曲線の標準座標は $(9;3,3,3,3,3)$ である．よって，任意の $1\leq i<j\leq 5$ に対して，$C.\mathbf{e}_i=3$ なので，[I] 型の trisecant line は 5 本あり，$2a-\sum_{i=1}^5 b_i=C.(2\mathbf{l}-\sum_{i=1}^5\mathbf{e}_i)=3$ が成り立つので，[III] 型の直線 $2\mathbf{l}-\sum_{i=1}^5\mathbf{e}_i$ も trisecant line になる．ゆえに，標準座標 $(9;3,3,3,3,3)$ をもつ曲線は，$(5,10,1)$ 型となり，曲面上の全ての直線が trisecant line となる．（定理 1.2(1) の場合である．）

$\alpha\leq 2$ のとき，標準座標は $(2\alpha+3;\alpha,\alpha,\alpha,\alpha,\alpha)$ $(\alpha=0,1,2)$ であるが，$C.\mathbf{e}_i=b_i=\alpha\neq 3$ なので，[I] 型の trisecant line は 0 本となる．[III] 型の直線に関しては，$\alpha\neq 3$ より，$C.(2\mathbf{l}-\sum_{i=1}^5\mathbf{e}_i)=2a-5b_i=2(2\alpha+3)-5\alpha=6-\alpha\neq 3$ となるので，[III] 型の trisecant line は 0 本となる．よって，標準座標 $(2\alpha+3;\alpha,\alpha,\alpha,\alpha,\alpha)$ $(\alpha=0,1,2)$ をもつ曲線は，$(0,10,0)$ 型の曲線である．（定理 1.2(2)(i)

の場合である.）

次に，[II] 型の trisecant line が 6 本となる場合を考える．補題 2.4 より，その曲線の標準座標は，フォーカード型 $(2\alpha+3;\alpha,\alpha,\alpha,\alpha,\beta)$, $(2\beta+3;\alpha,\beta,\beta,\beta,\beta)$ $(\alpha>\beta\geq 0)$，もしくはフルハウス型 $(\alpha+\beta+3;\alpha,\alpha,\alpha,\beta,\beta)$, $(\alpha+\beta+3;\alpha,\alpha,\beta,\beta,\beta)$ $(\alpha>\beta\geq 0)$ のいずれかである．標準座標の (b_1,b_2,b_3,b_4,b_5) の部分に注目して，これらの標準座標をそれぞれ $[4,1]$ 型，$[1,4]$ 型，$[3,2]$ 型，$[2,3]$ 型と呼ぶことにする.

$[4,1]$ 型：標準座標 $(2\alpha+3;\alpha,\alpha,\alpha,\alpha,\beta)$ をもつ曲線のクラスについて考える．標準座標の条件 $a\geq b_1+b_2+b_3$ より，$2\alpha+3\geq 3\alpha$ なので，$\alpha\leq 3$ となる.

$\alpha=3$ のとき，標準座標は $(9;3,3,3,3,\beta)$ $(\beta<3)$ であるが，このとき，[I] 型の trisecant line は 4 本で，$\beta\neq 3$ より，$2a-\sum_{i=1}^{5}b_i=6-\beta\neq 3$ なので [III] 型の trisecant line は 0 本となる．ゆえに，標準座標 $(9;3,3,3,3,\beta)$ $(\beta<3)$ をもつ曲線は $(4,6,0)$ 型の曲線である．（定理 1.2(2) の (ii) の場合である.）

$\alpha\leq 2$ のとき，標準座標は $(2\alpha+3;\alpha,\alpha,\alpha,\alpha,\beta)$ であるが，$3>\alpha>\beta$ より，[I] 型の trisecant line は 0 本で，$C.(2\mathbf{l}-\sum_{i=1}^{5}\mathbf{e}_i)=2(2\alpha+3)-4\alpha-\beta=6-\beta\neq 3$ より，[III] 型の trisecant line は 0 本であるので，標準座標 $(2\alpha+3;\alpha,\alpha,\alpha,\alpha,\beta)$ $(2\geq\alpha>\beta)$ をもつ曲線は $(0,6,0)$ 型の曲線である．（定理 1.2(4) の (i) の場合である.）

$[1,4]$ 型：標準座標 $(2\beta+3;\alpha,\beta,\beta,\beta,\beta)$ をもつ曲線のクラスについて考える．標準座標の条件 $a\geq b_1+b_2+b_3$ より，$2\beta+3\geq\alpha+2\beta$ なので，$\alpha\leq 3$ となる.

$\alpha=3$ のとき，標準座標は $(2\beta+3;3,\beta,\beta,\beta,\beta)$ であり，$3=\alpha>\beta$ より，[I] 型の trisecant line は 1 本で，$C.(2\mathbf{l}-\sum_{i=1}^{5}\mathbf{e}_i)=2(2\beta+3)-3-4\beta=3$ より，[III] 型の trisecant line は 1 本である．しかし，$\beta=0$ のときは 3 つの 2 次曲線 $(\sim(1;1,0,0,0,0))$ の非交叉和のクラスとなるので，既約曲線のクラスでない．よって，$\beta\neq 0$ なので，標準座標 $(2\beta+3;3,\beta,\beta,\beta,\beta)$ $(\beta=1,2)$ をもつ $(1,6,1)$ 型の曲線である．（定理 1.2(3) の (i) の場合である.）

$\alpha\leq 2$ のとき，標準座標は $(2\beta+3;\alpha,\beta,\beta,\beta,\beta)$ であり，$3>\alpha>\beta$ より，[I] 型の trisecant line は 0 本で，$C.(2\mathbf{l}-\sum_{i=1}^{5}\mathbf{e}_i)=2(2\beta+3)-\alpha-4\beta=6-\alpha\neq 3$ より，[III] 型の trisecant line は 0 本である．よって，標準座標 $(2\beta+3;\alpha,\beta,\beta,\beta,\beta)$ $(2\geq\alpha>\beta)$ をもつ曲線は，$(0,6,0)$ 型の曲線である．（定理 1.2(4) の (ii) の場合である.）

$[3,2]$ 型：標準座標 $(\alpha+\beta+3;\alpha,\alpha,\alpha,\beta,\beta)$ をもつ曲線のクラスについて考える．標準座標の条件 $a\geq b_1+b_2+b_3$ より，$\alpha+\beta+3\geq 3\alpha$ で，$2\alpha\leq\beta+3<\alpha+3$ が成り立つ．従って，$3>\alpha$ を得る．同じ不等式から $(\alpha,\beta)=(2,1)$，又は $(\alpha,\beta)=(1,0)$ が成り立つ．標準座標は $(\alpha+\beta+3;\alpha,\alpha,\alpha,\beta,\beta)$ であり，$3>\alpha>\beta$ より，[I] 型の trisecant line は 0 本で，$C.(2\mathbf{l}-\sum_{i=1}^{5}\mathbf{e}_i)=2(\alpha+\beta+3)-3\alpha-2\beta=6-\alpha\neq 3$ より，[III] 型の trisecant line は 0 本である．よって，標準座標 $(\alpha+\beta+3;\alpha,\alpha,\alpha,\beta,\beta)$ $((\alpha,\beta)=(2,1),(1,0))$ をもつ曲線は，$(0,6,0)$ 型の曲線である．（定理 1.2(4) の (iii) の場合である.）

$[2,3]$ 型：標準座標 $(\alpha+\beta+3;\alpha,\alpha,\beta,\beta,\beta)$ をもつ曲線のクラスについて考える．標準座標の条件 $a\geq b_1+b_2+b_3$ より，$\alpha+\beta+3\geq 2\alpha+\beta$ で，$\alpha\leq 3$ となる.

$\alpha=3$ のとき，標準座標は $(\beta+6;3,3,\beta,\beta,\beta)$ であり，$3=\alpha>\beta$ より，[I] 型の trisecant line は 2 本で，$C.(2\mathbf{l}-\sum_{i=1}^{5}\mathbf{e}_i)=2(\beta+6)-6-3\beta=6-\beta\neq 3$ より，[III] 型の trisecant line は 0 本である．よって，標準座標 $(\beta+6;3,3,\beta,\beta,\beta)$ $(\beta\leq 2)$ をもつ曲線は，$(2,6,0)$ 型の曲線である．（定理 1.2(3) の (ii) の場合である.）

$\alpha\leq 2$ のとき，標準座標は $(\alpha+\beta+3;\alpha,\alpha,\beta,\beta,\beta)$ であり，$3>\alpha>\beta$ より，[I] 型の trisecant

line は 0 本で，$C.(2\mathbf{l}-\sum_{i=1}^{5}\mathbf{e}_i)=2(\alpha+\beta+3)-2\alpha-3\beta=6-\beta\neq 3$ より，[III] 型の trisecant line は 0 本である．よって，標準座標 $(\alpha+\beta+3;\alpha,\alpha,\beta,\beta,\beta)\,(2\geq\alpha>\beta)$ をもつ曲線は，$(0,6,0)$ 型の曲線である．（定理 1.2(4) の (iv) の場合である．）

次に，[II] 型の直線 4 本が trisecant line となる場合を考える．補題 2.6 より，そのような曲線の標準座標は，フォーカード型の

$$(\alpha+\beta+3;\alpha,\alpha,\alpha,\alpha,\beta),\ (\alpha+\beta+3;\alpha,\beta,\beta,\beta,\beta)\quad(\alpha>\beta>0)$$

又は，ツーペア型の

$$(\alpha+\beta+3;\alpha,\alpha,\beta,\beta,\gamma),\ (\alpha+\gamma+3;\alpha,\alpha,\beta,\gamma,\gamma),\ (\beta+\gamma+3;\alpha,\beta,\beta,\gamma,\gamma)\quad(\alpha>\beta>\gamma\geq 0)$$

又は，スリーカード型の

$$(2\beta+3;\alpha,\beta,\beta,\beta,\gamma)\quad(\alpha>\beta>\gamma\geq 0\text{ かつ }2\beta=\alpha+\gamma)$$

のいずれかである．これらの標準座標をそれぞれ $[4,1]'$ 型，$[1,4]'$ 型，$[2,2,1]$ 型，$[2,1,2]$ 型，$[1,2,2]$ 型，$[1,3,1]$ 型と呼ぶ．[II] 型の trisecant line が 4 本なので，trisecant line が 6 本以上となるためには，少なくとも [I] 型の trisecant line が 1 本以上なければならない．すなわち，フォーカード型のとき $\alpha=3$ 又は $\beta=3$ が成り立ち，ツーペア型又はスリーカード型のとき $\alpha=3$ 又は $\beta=3$ 又は $\gamma=3$ が成り立つ．

(a) $[4,1]'$ 型の標準座標 $(\alpha+\beta+3;\alpha,\alpha,\alpha,\alpha,\beta)$ をもつ曲線について考える．標準座標の条件 $a\geq b_1+b_2+b_3$ より，$\alpha+\beta+3\geq 3\alpha$ で $2\alpha\leq\beta+3<\alpha+3$ となり，$3>\alpha$ となるので，条件に反する．

(b) $[1,4]'$ 型の標準座標 $(\alpha+\beta+3;\alpha,\beta,\beta,\beta,\beta)$ をもつ曲線について考える．
$\beta=3$ のとき，標準座標は，$(\alpha+6;\alpha,3,3,3,3)\,(\alpha>3)$ となるので，[I] 型の trisecant line は 4 本であり，$C.(2\mathbf{l}-\sum_{i=1}^{5}\mathbf{e}_i)=2(\alpha+6)-\alpha-12=\alpha\neq 3$ より，[III] 型の trisecant line は 0 本となるので，標準座標 $(\alpha+6;\alpha,3,3,3,3)\,(\alpha>3)$ をもつ曲線は，$(4,4,0)$ 型の曲線である．（定理 1.2(3) の (iii) の場合である．）
$\alpha=3$ のとき，標準座標は，$(\beta+6;3,\beta,\beta,\beta,\beta)\,(\beta<3)$ となるので，[I] 型の trisecant line は 1 本であり，$C.(2\mathbf{l}-\sum_{i=1}^{5}\mathbf{e}_i)=2(\beta+6)-4\beta-3=9-2\beta\neq 3$ より，[III] 型の trisecant line は 0 本となるので，標準座標 $(\beta+6;3,\beta,\beta,\beta,\beta)\,(\beta<3)$ をもつ曲線は $(1,4,0)$ 型であり，trisecant line が 5 本となり，条件に反する．

(c) $[2,2,1]$ 型の標準座標 $(\alpha+\beta+3;\alpha,\alpha,\beta,\beta,\gamma)$ をもつ曲線について考える．標準座標の条件 $a\geq b_1+b_2+b_3$ より，$\alpha+\beta+3\geq 2\alpha+\beta$ で $3\geq\alpha$ となる．
$\alpha=3$ となり，標準座標は，$(\beta+6;3,3,\beta,\beta,\gamma)$ となるので，[I] 型の trisecant line は 2 本であり，$C.(2\mathbf{l}-\sum_{i=1}^{5}\mathbf{e}_i)=2(\beta+6)-6-2\beta-\gamma=6-\gamma\neq 3$ より，[III] 型の trisecant line は 0 本となるので，標準座標 $(\beta+6;3,3,\beta,\beta,\gamma)\,(3>\beta>\gamma)$ をもつ曲線は，$(2,4,0)$ 型の曲線である．（定理 1.2(4) の (v) の場合である．）

(d) $[2,1,2]$ 型の標準座標 $(\alpha+\gamma+3;\alpha,\alpha,\beta,\gamma,\gamma)\,(\alpha>\beta>\gamma)$ をもつ曲線について考える．標準座標の条件 $a\geq b_1+b_2+b_3$ より，$\alpha+\gamma+3\geq 2\alpha+\beta$ で $\gamma+3\geq\alpha+\beta>\alpha+\gamma$ が導かれるので，条件に反する．
同様に，$[1,2,2]$ 型の標準座標 $(\beta+\gamma+3;\alpha,\beta,\beta,\gamma,\gamma)\,(\alpha>\beta>\gamma)$ をもつ曲線について，標準座標の条件から $3>\alpha$ が導かれるので，条件に反する．

(e) $[1,3,1]$ 型の標準座標

$$(2\beta+3;\alpha,\beta,\beta,\beta,\gamma)\ (2\beta=\alpha+\gamma \text{ かつ } \alpha>\beta>\gamma\geq 0)$$

をもつ曲線について考える．このとき，標準座標の条件 $a\geq b_1+b_2+b_3$ より，$2\beta+3\geq\alpha+2\beta$ で，$3\geq\alpha$ となり，$\alpha=3$ が従う．[I] 型の trisecant line は 1 本で，[III] 型の trisecant line は $2(2\beta+3)-\alpha-3\beta-(2\beta-\alpha)=6-\beta>3$ より 0 本なので，$(1,4,0)$ 型となり条件に反する．

最後に，[II] 型の trisecant line が 3 本以下となる曲線について考える．このとき [I] 型の trisecant line が 2 本以上存在する．

[I] 型の trisecant line が 5 本となる曲線の標準座標は $(a,3,3,3,3,3)$ だが，$a\neq 9$ より，[II] 型と [III] 型の trisecant line は共に 0 本であり，6 本以上の trisecant line が存在しない．

[I] 型の trisecant line が 4 本となる曲線は，[II] 型の trisecant line が 0 本となり，trisecant line の本数の合計が 6 本以上とならない．

[I] 型の trisecant line が 3 本となる曲線で，trisecant line の合計が 6 本以上になるのは，[II] 型 trisecant line が 2 本又は 3 本ある場合なので，補題 2.3(4)(5)(6)(7)(8) より，標準座標が，

$$(\alpha+6;3,3,3,\alpha,\beta),\ (\beta+6;3,3,3,\alpha,\beta),\ (9;3,3,3,\alpha,\beta),\ (\alpha+6;\alpha,\beta,3,3,3),\ (\beta+6;\alpha,\beta,3,3,3),$$
$$(9;\alpha,\beta,3,3,3),\ (\alpha+6;\alpha,3,3,3,\beta),\ (\beta+6;\alpha,3,3,3,\beta),\ (9;\alpha,3,3,3,\beta)\quad(\alpha\geq\beta\geq 0)$$

となる場合だが，これらの中で標準座標の条件 $a\geq b_1+b_2+b_3$ かつ $b_1\geq b_2\geq b_3\geq b_4\geq b_5$ を満たすのは，$(\alpha+6;\alpha,3,3,3,\beta)$，$(9;3,3,3,\alpha,\beta)$ の 2 通りのみである．

標準座標 $(\alpha+6;\alpha,3,3,3,\beta)\,(\alpha\geq 4,\beta\leq 2)$ は，$C.(2\mathbf{l}-\sum_{i=1}^{5}\mathbf{e}_i)=2(\alpha+6)-\alpha-\beta-9=3+\alpha-\beta\geq 7-\beta>3$ より，$(3,3,0)$ 型の曲線となる．（定理 1.2(4) の (vi) の場合である．）

標準座標 $(9;3,3,3,\alpha,\beta)\,(3>\alpha\geq\beta)$ は，$C.(2\mathbf{l}-\sum_{i=1}^{5}\mathbf{e}_i)=9-\alpha-\beta>3$ より，$(3,3,0)$ 型の曲線となる．（定理 1.2(4) の (vii) の場合である．）

[I] 型の trisecant line が 2 本となる曲線で，[II] 型 trisecant line が 3 本以下で trisecant line の合計が 6 本以上になる可能性があるのは，$(2,3,1)$ 型のみであり，その標準座標は，フルハウス型，ツーペア型，ワンペア型のみなので，補題 2.3 より，フルハウス型，ツーペア型の

$$(2\alpha+3;\alpha,\alpha,\alpha,3,3),\ (2\beta+3;3,3,\beta,\beta,\beta),\ (9;\alpha,\alpha,3,3,\gamma),$$
$$(2\beta+3;3,3,\beta,\beta,\gamma),\ (\alpha+\beta+3;\alpha,\alpha,\beta,3,3),$$
$$(2\gamma+3;3,3,\beta,\gamma,\gamma),\ (2\beta+3;\alpha,\beta,\beta,3,3),\ (9;\alpha,3,3,\gamma,\gamma)\quad(\alpha>\beta>\gamma\geq 0)$$

のいずれかかワンペア型の

$$(a;\alpha,\alpha,\beta,\gamma,\delta),\ (a;\alpha,\beta,\beta,\gamma,\delta),\ (a;\alpha,\beta,\gamma,\gamma,\delta),\ (a;\alpha,\beta,\gamma,\delta,\delta)\quad(\alpha>\beta>\gamma>\delta\geq 0)$$

のいずれかになるが，フルハウス型，ツーペア型の 8 個はいずれも標準座標の条件を満たさない．ワンペア型の 4 つの座標において，[II] 型 trisecant line が 3 本であるためには，$a-\alpha-\beta<a-\gamma-\delta$ かつ $a-\alpha-\gamma<a-\beta-\delta$ より，$a-\alpha-\delta=a-\beta-\gamma=3$ とならなければならない．また，[I] 型 trisecant line が 2 本であるので，標準座標の中で 2 度出てくる $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ のいずれか 1 つが 3 とならなければならない．しかし，いずれの場合も標準座標の条件 $a\geq b_1+b_2+b_3$ を満たさず，上記のような曲線のクラスは存在しない．以上によって trisecant line が 6 本以上になる曲線の分類が完了し，trisecant line が $7,9,11,12,13,14,15$ 本となる曲線は存在せず，上で示した標準座標以外の曲線の trisecant line の本数は 5 本以下となる．□

注意 3.1　定理 1.2 では，4 次 del Pezzo 曲面上の空間曲線の trisecant line の本数の分類を標準座標を用いて与えた．標準座標の条件 (1.1) を考慮せずに単に因子の座標としてみれば，定理 1.2 の分類結果を単純化することができる．$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ の像を基点とする $\mathbb{P}^2$ 上の Cremona 変換を 4 次 del Pezzo 曲面上に引き戻した $\operatorname{Pic} S_4$ の座標変換を τ とすれば，4 次 del Pezzo 曲面上の因子 $\mathbf{l}, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_5$ は，τ により以下のように写される．

$$\begin{cases} \tau(\mathbf{l}) = 2\mathbf{l} - \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \\ \tau(\mathbf{e}_1) = \mathbf{l} - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \qquad \tau(\mathbf{e}_4) = \mathbf{e}_4, \\ \tau(\mathbf{e}_2) = \mathbf{l} - \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3, \qquad \tau(\mathbf{e}_5) = \mathbf{e}_5, \\ \tau(\mathbf{e}_3) = \mathbf{l} - \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \end{cases} \tag{3.1}$$

τ に加えて，例外曲線 $\mathbf{e}_i\,(1 \leq i \leq 5)$ の互換を用いると，主結果の定理 1.2 の (1) から (4) までの trisecant line の本数に基づいた曲線のクラスの分類は以下のように表される：

(1)　trisecant line が 16 本となる曲線のクラスは，$(9; 3, 3, 3, 3, 3)$ である．

(2)　trisecant line が 10 本となる曲線のクラスは，$(9; 3, 3, 3, 3, \beta)$ $(\beta = 0, 1, 2, 4, 5, 6)$ である．

(3)　trisecant line が 8 本となる曲線のクラスは，次のいずれかである．

(a)　$(\alpha + 6; \alpha, 3, 3, 3, 3)$　$(\alpha \geq 1$ かつ $\alpha \neq 3)$

(b)　$(\beta + 6; 3, 3, \beta, \beta, \beta)$　$(\beta = 0, 1, 2, 4, 5, 6)$

(4)　trisecant line が 6 本となる曲線のクラスは，次のいずれかである．

(a)　$(\alpha + 6; \alpha, 3, 3, 3, \beta)$　$(\alpha \geq 0$ かつ $0 \leq \beta \leq 2$ かつ $3 \neq \alpha \neq \beta)$

(b)　$(9; 3, 3, 3, \alpha, \beta)$　$((\alpha, \beta) = (4, 0), (4, 1), (4, 4), (5, 0), (5, 2), (5, 4), (6, 1), (6, 2)$ または $2 \geq \alpha \geq \beta \geq 0)$

ここで，4 次 del Pezzo 曲面上の空間曲線 C のクラスの座標を $(a; b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ と表すが，この座標は標準座標の条件を必ずしも満たさない．

例 3.2　注意 3.1 で表されている曲線のクラスは標準座標とは限らない．例えば，定理 1.2(2)(i) で $\alpha = 1$ としたときの曲線のクラス $(5; 1, 1, 1, 1, 1)$ は，注意 3.1 では trisecant line が 10 本のクラス $(9; 3, 3, 3, 3, \beta)$ $(\beta = 0, 1, 2, 4, 5, 6)$ に含まれていないようにみえるが，Cremona 変換が誘導する座標変換 τ と互換の積によって

$$\begin{aligned} (5; 1, 1, 1, 1, 1) &\to (7; 3, 3, 3, 1, 1) \quad (\tau \text{ を施す}) \\ &\to (7; 3, 1, 1, 3, 3) \quad (\text{互換の積を施す}) \\ &\to (9; 5, 3, 3, 3, 3) \quad (\tau \text{ を施す}) \\ &\to (9; 3, 3, 3, 3, 5) \quad (\text{互換の積を施す}) \end{aligned}$$

となることにより，$(5; 1, 1, 1, 1, 1)$ は標準座標の条件を満たさない座標 $(9, 3, 3, 3, 3, 5)$ にうつり，注意 3.1(2) の曲線のクラスに含まれる．

最後に表 2 において，4 次 del Pezzo 曲面に含まれる次数が 3 以上かつ 12 以下の空間曲線の各クラスに対し，曲線の次数 d と種数 g，標準座標 $(a; b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$，そのクラスに属す曲線がもつ trisecant line の本数を示す．

表 2　標準座標ごとの trisecant line の本数

(d,g)	$(a;b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)$	(x,y,z)	trisecant line の本数
$(3,0)$	$(1;0,0,0,0,0)$	$(0,0,0)$	0
$(4,0)$	$(2;1,1,0,0,0)$	$(0,0,0)$	0
$(4,1)$	$(3;1,1,1,1,1)$	$(0,0,0)$	0
$(5,0)$	$(2;1,0,0,0,0)$	$(0,0,1)$	1
$(5,1)$	$(3;1,1,1,1,0)$	$(0,0,0)$	0
$(6,0)$	$(2;0,0,0,0,0)$	$(0,0,0)$	0
$(6,0)$	$(3;2,1,0,0,0)$	$(0,3,1)$	4
$(6,1)$	$(3;1,1,1,0,0)$	$(0,1,1)$	2
$(6,2)$	$(4;2,1,1,1,1)$	$(0,0,0)$	0
$(7,0)$	$(3;2,0,0,0,0)$	$(0,6,0)$	6
$(7,1)$	$(3;1,1,0,0,0)$	$(0,3,0)$	3
$(7,2)$	$(4;2,1,1,1,0)$	$(0,3,1)$	4
$(7,3)$	$(4;1,1,1,1,1)$	$(0,0,1)$	1
$(8,0)$	$(4;3,1,0,0,0)$	$(1,3,0)$	4
$(8,1)$	$(3;1,0,0,0,0)$	$(0,6,0)$	6
$(8,1)$	$(4;2,2,0,0,0)$	$(0,0,0)$	0
$(8,2)$	$(4;2,1,1,0,0)$	$(0,4,0)$	4
$(8,3)$	$(4;1,1,1,1,0)$	$(0,4,0)$	4
$(8,3)$	$(5;3,1,1,1,1)$	$(1,6,1)$	8
$(8,4)$	$(5;2,2,1,1,1)$	$(0,3,1)$	4
$(8,5)$	$(6;2,2,2,2,2)$	$(0,0,0)$	0
$(9,0)$	$(4;3,0,0,0,0)$	$(1,0,0)$	1
$(9,1)$	$(3;0,0,0,0,0)$	$(0,10,0)$	10
$(9,2)$	$(4;2,1,0,0,0)$	$(0,3,0)$	3
$(9,3)$	$(4;1,1,1,0,0)$	$(0,6,0)$	6
$(9,3)$	$(5;3,1,1,1,0)$	$(1,3,0)$	4
$(9,4)$	$(5;2,2,1,1,0)$	$(0,3,0)$	3
$(9,5)$	$(5;2,1,1,1,1)$	$(0,6,0)$	6
$(9,6)$	$(6;2,2,2,2,1)$	$(0,4,1)$	5
$(10,0)$	$(5;4,1,0,0,0)$	$(0,0,0)$	0
$(10,2)$	$(4;2,0,0,0,0)$	$(0,0,0)$	0
$(10,2)$	$(5;3,2,0,0,0)$	$(1,3,0)$	4
$(10,3)$	$(4;1,1,0,0,0)$	$(0,6,0)$	6
$(10,3)$	$(5;3,1,1,0,0)$	$(1,1,0)$	2
$(10,4)$	$(5;2,2,1,0,0)$	$(0,4,0)$	4
$(10,4)$	$(6;4,1,1,1,1)$	$(0,0,0)$	0
$(10,5)$	$(5;2,1,1,1,0)$	$(0,4,0)$	4
$(10,6)$	$(5;1,1,1,1,1)$	$(0,10,0)$	10

(d,g)	$(a;b_1,\ldots,b_5)$	(x,y,z)	trisecant line の本数
$(10,6)$	$(6;3,2,1,1,1)$	$(1,3,0)$	4
$(10,6)$	$(6;2,2,2,2,0)$	$(0,0,0)$	0
$(10,7)$	$(6;2,2,2,1,1)$	$(0,6,0)$	6
$(10,8)$	$(7;3,2,2,2,2)$	$(1,6,1)$	8
$(11,0)$	$(5;4,0,0,0,0)$	$(0,0,0)$	0
$(11,3)$	$(4;1,0,0,0,0)$	$(0,4,0)$	4
$(11,3)$	$(5;3,1,0,0,0)$	$(1,0,0)$	1
$(11,4)$	$(5;2,2,0,0,0)$	$(0,6,0)$	6
$(11,4)$	$(6;4,1,1,1,0)$	$(0,0,0)$	0
$(11,5)$	$(5;2,1,1,0,0)$	$(0,3,0)$	3
$(11,6)$	$(5;1,1,1,1,0)$	$(0,6,0)$	6
$(11,6)$	$(6;3,2,1,1,0)$	$(1,3,0)$	4
$(11,7)$	$(6;3,1,1,1,1)$	$(1,0,0)$	1
$(11,7)$	$(6;2,2,2,1,0)$	$(0,3,0)$	3
$(11,8)$	$(6;2,2,1,1,1)$	$(0,6,0)$	6
$(11,9)$	$(7;3,2,2,2,1)$	$(1,4,0)$	5
$(11,10)$	$(7;2,2,2,2,2)$	$(0,10,0)$	10
$(12,0)$	$(6;5,1,0,0,0)$	$(0,0,0)$	0
$(12,3)$	$(4;0,0,0,0,0)$	$(0,0,0)$	0
$(12,3)$	$(5;3,0,0,0,0)$	$(1,0,0)$	1
$(12,3)$	$(6;4,2,0,0,0)$	$(0,0,0)$	0
$(12,4)$	$(6;4,1,1,0,0)$	$(0,0,0)$	0
$(12,4)$	$(6;3,3,0,0,0)$	$(2,6,0)$	8
$(12,5)$	$(5;2,1,0,0,0)$	$(0,3,0)$	3
$(12,5)$	$(7;5,1,1,1,1)$	$(0,0,0)$	0
$(12,6)$	$(5;1,1,1,0,0)$	$(0,3,0)$	3
$(12,6)$	$(6;3,2,1,0,0)$	$(1,3,0)$	4
$(12,7)$	$(6;3,1,1,1,0)$	$(1,1,0)$	2
$(12,7)$	$(6;2,2,2,0,0)$	$(0,0,0)$	0
$(12,8)$	$(6;2,2,1,1,0)$	$(0,4,0)$	4
$(12,8)$	$(7;4,2,1,1,1)$	$(0,0,0)$	0
$(12,9)$	$(6;2,1,1,1,1)$	$(0,4,0)$	4
$(12,9)$	$(7;3,3,1,1,1)$	$(2,6,0)$	8
$(12,9)$	$(7;3,2,2,2,0)$	$(1,3,0)$	4
$(12,10)$	$(7;3,2,2,1,1)$	$(1,3,0)$	4
$(12,11)$	$(7;2,2,2,2,1)$	$(0,6,0)$	6
$(12,11)$	$(8;4,2,2,2,2)$	$(0,0,0)$	0
$(12,12)$	$(8;3,3,2,2,2)$	$(2,6,0)$	8
$(12,13)$	$(9;3,3,3,3,3)$	$(5,10,1)$	16

謝辞　本論文の執筆にあたり，多くの助言をしていただいた東海大学理学部情報数理学科の那須弘和教授に心から感謝の意を表します．主結果の価値と論文の質を高めるために有益なご指摘をいただいた査読者の方に感謝申し上げます．

参考文献

[1] O. A. Laudal, A generalized trisecant lemma. In *Algebraic geometry (Proc. Sympos., Univ. Tromsø, Tromsø, 1977)*, volume **687** of *Lecture Notes in Math.*, 112–149. Springer, Berlin, 1978.

[2] E. Ballico and A. Cossidente, Surfaces in $\mathbf{P}^5$ which do not admit trisecants, *Rocky Mountain Journal of Mathematics* **29**(1) (1999) 77–91.

[3] F. Russo and G. Staglianò, Trisecant flops, their associated K3 surfaces and the rationality of some cubic fourfolds, *J. Eur. Math. Soc.* **25** (2023), no. 6, 2435–2482.

[4] I. Bauer, The classification of surfaces in $\mathbb{P}^5$ having few trisecant lines, *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino* **56** (1998), 1–20.

[5] H. Nasu, Obstructions to deforming space curves lying on a del pezzo surface, arXiv:2501.15788.

[6] A. Beauville, *Complex algebraic surfaces*, volume **34** of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1996.