

マジックテクスチャーに基づいたニュートリノの質量階層および 2-3 混合角の octant に関する研究

長尾瑛斗^{*1}, 兵藤悠太^{2,3}, 北林照幸⁴

¹〒259-1292 神奈川県平塚市北金目 4-1-1

東海大学大学院 理学研究科 物理学専攻

²〒259-1292 神奈川県平塚市北金目 4-1-1

東海大学大学院 総合理工学研究科 総合理工学専攻 物理・数理科学コース

³〒259-1292 神奈川県平塚市北金目 4-1-1

東海大学マイクロ・ナノ研究開発センター

⁴〒259-1292 神奈川県平塚市北金目 4-1-1

東海大学 理学部 物理学科

(2023 年 10 月 10 日受付；2023 年 12 月 8 日受理)

Study of Neutrino Mass Hierarchy and Octant of 2-3 Mixing Angle Based on Magic Texture

by

Eito NAGAO^{*1}, Yuta HYODO^{2,3} and Teruyuki KITABAYASHI⁴

¹*Course of Physics, Graduate School of Science, Tokai University,*

4-1-1 Kitakaname, Hiratsuka, Kanagawa, 259-1292, Japan

²*Physical and Mathematical Science Course, Graduate School of Science and Technology,*

Tokai University, 4-1-1 Kitakaname, Hiratsuka, Kanagawa, 259-1292, Japan

³*Micro/Nano Technology Center, Tokai University,*

4-1-1 Kitakaname, Hiratsuka, Kanagawa, 259-1292, Japan

⁴*Department of Physics, School of Science, Tokai University,*

4-1-1 Kitakaname, Hiratsuka, Kanagawa, 259-1292, Japan

^{*}Corresponding author: E-mail: 3csnm013@mail.u-tokai.ac.jp

(Received on Oct. 10, 2023; accepted on Dec. 8, 2023)

Abstract

The mass hierarchy problem and the octant problem are long-standing problems in neutrino physics. On the other hand, independent of these problems, it is known that the TM1 neutrino mass matrix is consistent with observation. Furthermore, it has been suggested that the neutrino mass matrix may satisfy some of the properties of the magic square. In this study, we show that the normal mass hierarchy and the lower octant are favorable when the TM1 neutrino mass matrix approximately obeys the nature of a magic square.

Keywords: Neutrinos mass hierarchy, Octant of neutrino mixing angle, Magic texture

1 序 論

数学分野での不思議な数の並びが, 我々がすむ自然界の現象に顔を出すこともある. 例えば, 次のフィボナッチ数 [1]

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots \quad (1)$$

が花びらの数や葉序と関係を持っている [2]. また, 次の 1 と自分以外の約数を持たない素数

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots \quad (2)$$

が素数ゼミの一生のサイクルと関係していることなどが知られている [3].

ニュートリノ物理学の世界でも, 特殊な数の組み合わせである「魔方陣」とニュートリノの質量行列との関連性が指摘されている. 魔方陣とは縦の成分の和と横の成分の和, 斜めの成分の和が全て等しくなるという性質を満たした方陣である. 例えば, 魔方陣の例を行列で表すと

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix} \quad (3)$$

となる. 縦に並んだ数の和は全て 15 であり, 横に並んだ数の和, 斜めに並んだ数の和もやはり 15 である.

2003 年, Harrison と Scott は, 次のニュートリノ質量行列形を仮定すると*, 理論的に求めたニュートリノ混合角が当時のニュートリノ実験結果と一致することを発見した [4].

$$M_{\text{TBM}} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a+c & b-c \\ b & b-c & a+c \end{pmatrix} \quad (4)$$

この行列は魔方陣の一部の性質を満たしている. すなわち, 縦に並んだ成分の和は全て $a+2b$ であり, 横に並んだ成分の和も $a+2b$ である. このことから, Harrison と Scott が発見したニュートリノの質量行列の形はマジックテクスチャー (テクスチャーとは行列の形を示す言葉) とよばれて研究されてきた [5–10].

式 (4) は次の混合行列から導かれる.

$$U_{\text{TBM}} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} & 0 \\ -\sqrt{\frac{1}{6}} & \sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{1}{2}} \\ -\sqrt{\frac{1}{6}} & \sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \quad (5)$$

下付き添え字の TBM は Tribimaximal の略語である. Tribimaximal 混合行列は Trimaximal 混合

* ニュートリノとは電氣的に中性で質量が非常に小さく, 他の素粒子との相互作用が極めて小さい素粒子である. 現在, 3 種類のニュートリノが発見されている. これら 3 種類のニュートリノは量子力学的に混合していて, その質量は 3×3 の行列 (ニュートリノ質量行列) で表される. ニュートリノ質量行列を実験で完全に決定するためには, ニュートリノの質量と混合角を精密に測定する必要がある. だが Harrison と Scott の時代だけでなく現在でも, ニュートリノの質量の精密測定には成功していない (ニュートリノと他の素粒子との相互作用が極めて弱いことが, 質量の測定を極めて困難にしている). このため, まずニュートリノの質量行列の形を仮定し, そこから導かれる理論的な帰結を実験結果と比較することで, ニュートリノ質量行列形の決定が試みられている.

行列と Bimaximal 混合行列を合わせたものである。Trimaximal 混合行列では電子ニュートリノとミューニュートリノの混合状態を表す $\sin^2 \theta_{12}$ が $\frac{1}{3}$ となる。Bimaximal 混合行列では $\sin^2 \theta_{23} = \frac{1}{2}$ となり、ミューニュートリノとタウニュートリノが最大に混合している。Tribimaximal 混合行列では $\sin^2 \theta_{12} = \frac{1}{3}$, $\sin^2 \theta_{23} = \frac{1}{2}$ の二つの条件が同時に満たされている。

式 (5) の混合モデルでは、ニュートリノの混合具合を表す 13 角が 0 になる。このため、式 (4) の行列形は実験結果を再現できない [11]。

Bjorken と Harrison と Scott が 2006 年に、Xing と Zhou が 2007 年にそれぞれ次に示す新たなタイプの 2 つのニュートリノ質量行列を提案した [12, 13]。

$$M_{\text{TM1}} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & a + \frac{3b}{2} - \frac{c}{2} - d \\ c & a + \frac{3b}{2} - \frac{c}{2} - d & -2b + 2c + d \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$M_{\text{TM2}} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & a + c - d \\ c & a + c - d & b - c + d \end{pmatrix} \quad (7)$$

以後、 M_{TM1} を M_{TM1} テクスチャー、 M_{TM2} を M_{TM2} テクスチャーとよぶ。これら二つのテクスチャーは式 (4) を改良して生まれたテクスチャーである。 M_{TM1} テクスチャーと M_{TM2} テクスチャーを導く混合行列 U_{TM1} および U_{TM2} は式 (5) に複素回転行列 R_{23} 、もしくは R_{13} をかけることによって得られる [12–15]。

$$U_{\text{TM1}} = U_{\text{TBM}} R_{23} \quad (8)$$

$$U_{\text{TM2}} = U_{\text{TBM}} R_{13} \quad (9)$$

具体的に書くと

$$U_{\text{TM1}} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{\cos \theta}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\cos \theta}{\sqrt{3}} - \frac{e^{i\phi} \sin \theta}{\sqrt{2}} & \frac{\sin \theta}{\sqrt{3}} + \frac{e^{i\phi} \cos \theta}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\cos \theta}{\sqrt{3}} + \frac{e^{i\phi} \sin \theta}{\sqrt{2}} & \frac{\sin \theta}{\sqrt{3}} - \frac{e^{i\phi} \cos \theta}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$U_{\text{TM2}} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} \cos \theta & \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \sin \theta \\ -\frac{\cos \theta}{\sqrt{6}} + \frac{e^{-i\phi} \sin \theta}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{\sin \theta}{\sqrt{6}} - \frac{e^{-i\phi} \cos \theta}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\cos \theta}{\sqrt{6}} - \frac{e^{-i\phi} \sin \theta}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{\sin \theta}{\sqrt{6}} + \frac{e^{-i\phi} \cos \theta}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (11)$$

となる。 M_{TM1} テクスチャーと M_{TM2} テクスチャーは同じ質量行列形をもとにしたテクスチャーである。

M_{TM1} テクスチャーがマジックテキストチャーとなるのは $b = c$ のときであり、そのとき以下のような形になる。

$$M_{\text{magic}} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & d & a + b - d \\ b & a + b - d & d \end{pmatrix}. \quad (12)$$

この場合は実験結果と一致しない [16].

式 (12) は $d \rightarrow a + c$ と置き換えると式 (4) の形に戻るように思える. しかし, $b = c$ も仮定しているため, (2,3),(3,2) 成分が 0 になる式 (4) の特別な形になる.

$$M_{\text{TBM}_{b=c}} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a+b & 0 \\ b & 0 & a+b \end{pmatrix} \quad (13)$$

M_{TM2} テクスチャーは, M_{TM1} テクスチャーとは違い, $b = c$ などの特殊な仮定や置き換えなどせずに縦に並んだ成分の和は全て $a + b + c$ であり, 横に並んだ成分の和も全て $a + b + c$ であるため, 魔方陣の性質の一部を自然に満たしている.

マジックテクスチャーを満たす M_{TM2} テクスチャーが正しいニュートリノ質量行列なのだろうか?

式 (7) のニュートリノ質量行列形をもとに理論的に導かれたニュートリノ混合角は最新の実験結果と矛盾はしない [17]. ただし, 12 角とよばれているニュートリノ混合角の一部の再現性が悪く, 実験結果を 3σ の許容範囲でギリギリ満たすことしかできない. これは, 現時点では実験結果を再現できているが, 近い将来に更に高精度での 12 角の測定結果が得られた場合に, 式 (7) の行列形は実験から排除される可能性が極めて高いことを意味している.

それでは, 式 (4), (6), (7) で表されるニュートリノ質量行列は間違っているのだろうか? 実際に式 (4), (7) は実験結果の再現性が悪い. しかし, 式 (6) で示されている M_{TM1} テクスチャーから導かれるニュートリノ混合角の再現性は M_{TM2} テクスチャーよりもはるかに高い. それならば, M_{TM1} テクスチャーをニュートリノ質量行列としたときに基準行列としてマジックテクスチャーを選ぶことはできるのだろうか?

M_{TM2} テクスチャーや式 (4) は自然とマジックテクスチャーとなるのにも関わらず M_{TM1} テクスチャーだけが $b = c$ という特殊な条件下でしかマジックテクスチャーとはならない. M_{TM1} テクスチャーと M_{TM2} テクスチャーの違いといえば式 (5) にどの複素回転行列をかけたかという差でしかない.

M_{TM1} テクスチャーが完全なマジックテクスチャーではない場合でも, 実はマジックテクスチャーと背後でつながっているのではないだろうか? 魔方陣という不思議な数の並びとニュートリノ質量行列形が本当に関係しているならば, これは大きな出来事となる. もしそうならば, 数学分野で明らかになった魔方陣が持つ様々な性質を使って, ニュートリノを調べることが可能になる. また逆に, ニュートリノの研究成果を数学に生かせるかもしれない.

本研究では M_{TM1} テクスチャーも本質的にはマジックテクスチャーであるが, ニュートリノがもつ何らかの性質が原因で, M_{TM1} テクスチャーがマジックテクスチャーからずれてしまっていると考え. この場合, 限りなく M_{TM1} テクスチャーがマジックテクスチャーに近い状態, 言い換えればマジックテクスチャーとのずれが小さい状態を自然界は好むであろう. この推論をもとに, 我々は次に示す 2 つのニュートリノ物理学の未解決問題について言及する [18].

- 質量階層問題: 3 つのニュートリノ質量固有状態 (m_1, m_2, m_3) の間に, いわゆる順質量順序 (Normal Ordering: NO) $m_1 < m_2 < m_3$ が成り立っているのか, それとも逆質量順序 (Inverted Ordering: IO) $m_3 < m_1 < m_2$ が成り立っているのかという問題.
- Octant 問題: ニュートリノの混合状態を表すパラメータの 1 つである 23 角が 45° よりも大きいのか (upper-octant), それとも小さいのか (lower-octant) という問題.

本論の構成は以下のとおりである. 2 節では, M_{TM1} テクスチャーとマジックテクスチャーとのずれ

マジックテキストチャーに基づいたニュートリノの質量階層および 2-3 混合角の octant に関する研究を数学的に評価する方法を提案する。3 節ではニュートリノ実験結果で得られているニュートリノパラメータの許容範囲を紹介する。4 節では数値計算の結果をもとに質量階層問題と 23 角の octant 問題に言及する。5 節では本研究をまとめる。

2 M_{TM1} テクスチャーとマジックテキストチャーとのずれ

本節では、 M_{TM1} がマジックテキストチャーからどの程度ずれているのかを評価する指標を導入する。また、ニュートリノ実験から求められるニュートリノパラメータの表式についても言及する。

まず、 M_{TM1} テクスチャーがマジックテキストチャーとなる $b = c$ の特別な場合には式 (12) となり、マジックテキストチャーになることに注目しよう。実際、式 (12) の行列は、縦に並んだ成分の和は全て $a + 2b$ であり横に並んだ成分の和も全て $a + 2b$ であるので、マジックテキストチャーとしての条件を満たしている。この事実を利用して、 M_{TM1} テクスチャーを、式 (12) に示したマジックテキストチャー M_{magic} とマジックテキストチャーとのずれを生み出す行列 ΔM との和で、次のように分解する

$$M_{\text{TM1}} = M_{\text{magic}} + \Delta M \quad (14)$$

ここで

$$\Delta M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -(b-c) \\ 0 & 0 & \frac{b-c}{2} \\ -(b-c) & \frac{b-c}{2} & -2(b-c) \end{pmatrix} \quad (15)$$

である。

ΔM の全ての要素が 0 に近いほど、 M_{TM1} テクスチャーは近似的にマジックテキストチャーとなる。このため、 ΔM の全ての要素がどれだけ 0 に近いかを評価する指標が必要である。本研究では、 $b - c$ の実部を ϵ_{Re} 、虚部を ϵ_{Im} として

$$\begin{aligned} \epsilon_{\text{Re}} &= \text{Re}(b - c), \quad \epsilon_{\text{Im}} = \text{Im}(b - c) \\ \epsilon^2 &= \epsilon_{\text{Re}}^2 + \epsilon_{\text{Im}}^2 \end{aligned} \quad (16)$$

を指標として用いる。 ϵ_{Re} と ϵ_{Im} が 0 のときに $b = c$ となり、 M_{TM1} テクスチャーは完全なマジックテキストチャーとなる。また、 $\epsilon_{\text{Re}} \ll 1$ かつ $\epsilon_{\text{Im}} \ll 1$ の場合には、 M_{TM1} テクスチャーは近似的にマジックテキストチャーであるとみなせる。このとき、 ϵ^2 が同じ値になる M_{TM1} テクスチャーでは、同じ程度で近似的にマジックテキストチャーが成り立っているとする。

実際にニュートリノ実験から得られる物理量を用いてずれの大きさを数値的に評価するためには、 M_{TM1} テクスチャーをニュートリノパラメータで書き直しておく必要がある。ニュートリノパラメータとは、ニュートリノ実験から求められる 3 つのニュートリノの質量 (m_1, m_2, m_3)、3 つのニュートリノの混合角 ($\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$)、ディラック CP 位相 δ 、および 2 つのマヨラナ CP 位相 (α, β) の 9 つのパラメータのことをいう。

M_{TM1} テクスチャーなどのニュートリノ質量行列は、その質量行列を生み出すニュートリノ混合行列を用いてニュートリノパラメータと関連づけることができる [14]*。 M_{TM1} テクスチャーは式 (10) を用いて

* より正確には、ニュートリノ質量行列は荷電レプトンの混合行列からの影響も受ける。荷電レプトンの混合が実験で見つかっていないことから、本研究では荷電レプトン混合行列は実対角行列とする。この場合には本論で述べているように、ニュートリノ質量行列はニュートリノの質量とニュートリノ混合行列のみで構築することができる。

$$M_{\text{TM1}} = U_{\text{TM1}}^* \text{diag}(m_1, m_2 e^{2i\alpha}, m_3 e^{2i\beta}) U_{\text{TM1}}^\dagger \quad (17)$$

と表すことができる。

ここで, θ は回転角, ϕ は位相パラメータである (後述するとおり, この2つはニュートリノパラメータから導くことができる)。この関係を用いると, マジックテクスチャーからのずれを評価するための指標である式 (16) の中にある $b - c$ を, 回転角 θ , 位相パラメータ ϕ , ニュートリノの質量固有値 m_1, m_2, m_3 およびマヨラナ CP 位相 α, β を使って

$$b - c = \frac{-e^{2i\alpha} m_2 + e^{2i\beta} m_3}{\sqrt{6}} e^{-i\phi} \sin 2\theta \quad (18)$$

と書き表せる。

あとは回転角 θ と位相パラメータ ϕ をニュートリノ実験から得られるニュートリノパラメータから導ければ, ずれの量が計算できる。このためには, ニュートリノ混合状態が一般的に次のポンテコルボ-牧-中川-坂田 (PMNS) 混合行列 [19–22]

$$U = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu 1} & U_{\mu 2} & U_{\mu 3} \\ U_{\tau 1} & U_{\tau 2} & U_{\tau 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (19)$$

で表されることを利用する。ここで, $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$, $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$) である。

また, 式 (19) を用いることによって式 (17) と同様に, 一般のニュートリノ質量行列を次のように表すことができる。

$$M = U^* \text{diag}(m_1, m_2 e^{2i\alpha}, m_3 e^{2i\beta}) U^\dagger \quad (20)$$

さらに, 混合行列をニュートリノパラメータで表すと以下の関係式を得ることができる。

$$\begin{aligned} s_{12}^2 &= \frac{|U_{e2}|^2}{1 - |U_{e3}|^2}, & s_{23}^2 &= \frac{|U_{\mu 3}|^2}{1 - |U_{e3}|^2}, & s_{13}^2 &= |U_{e3}|^2, \\ c_{12}^2 &= \frac{|U_{e1}|^2}{1 - |U_{e3}|^2}, & c_{23}^2 &= \frac{|U_{\tau 3}|^2}{1 - |U_{e3}|^2}. \end{aligned} \quad (21)$$

また, CP の破れの尺度であるヤルスコグ不変量 [23],

$$J = \text{Im}(U_{e1}U_{e2}^*U_{\mu 1}^*U_{\mu 2}) = s_{12}s_{23}s_{13}c_{12}c_{23}c_{13}^2 \sin \delta \quad (22)$$

も得られる。

式 (10) と (19) を比較するとディラック CP 位相 δ は 0 のように見えるかもしれない。だが, 複素位相の取り方には任意性があり, ヤルスコグ不変量を用いることで, 質量行列の中に含まれることが許される δ を評価することができる。

式 (10), (21), (22) より混合角 s_{ij}^2 とディラック CP 位相 δ は

$$s_{12}^2 = 1 - \frac{2}{3 - \sin^2 \theta}, \quad (23)$$

$$s_{23}^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{6} \sin 2\theta \cos \phi}{3 - \sin^2 \theta} \right), \quad (24)$$

$$s_{13}^2 = \frac{1}{3} \sin^2 \theta, \quad (25)$$

$$\tan \delta = \frac{5 + \cos 2\theta}{1 + 5 \cos 2\theta} \tan \phi, \quad (26)$$

と書ける。また s_{13}^2 を用いて

$$s_{12}^2 = \frac{1 - 3s_{13}^2}{3(1 - s_{13}^2)}, \quad (27)$$

$$s_{23}^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{6\sqrt{2s_{13}^2(1 - s_{13}^2)} \cos \phi}{3(1 - s_{13}^2)} \right), \quad (28)$$

$$\tan \delta = \frac{1 - s_{13}^2}{1 - 5s_{13}^2} \tan \phi, \quad (29)$$

と書き直せる。これらの関係式を用いて、回転角 θ と位相パラメータ ϕ をニュートリノ実験から得られるニュートリノパラメータから算出できる。

3 実験で得られているニュートリノパラメータの許容範囲

本節では、実験から得られているニュートリノパラメータの許容範囲をまとめる。

ニュートリノの質量階層として NO を仮定した場合にニュートリノ振動実験から導かれた質量 2 乗差 $\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$ と混合角は

$$\begin{aligned} s_{12}^2 &= 0.303_{-0.012}^{+0.012} \quad (0.270 \sim 0.341), \\ s_{23}^2 &= 0.451_{-0.016}^{+0.019} \quad (0.408 \sim 0.603), \\ s_{13}^2 &= 0.02225_{-0.00059}^{+0.00056} \quad (0.02052 \sim 0.02398), \\ \delta/^\circ &= 232_{-26}^{+36} \quad (144 \sim 350), \\ \frac{\Delta m_{21}^2}{10^{-5} \text{eV}^2} &= 7.41_{-0.20}^{+0.21} \quad (6.82 \sim 8.03), \\ \frac{\Delta m_{31}^2}{10^{-3} \text{eV}^2} &= +2.507_{-0.027}^{+0.026} \quad (+2.427 \sim +2.590), \end{aligned} \quad (30)$$

である [17]。ここで、 $\pm$ は 1σ での許容範囲の値を示しており、括弧の中は 3σ での許容範囲の値を示している。同様にニュートリノの質量階層として IO を仮定した場合は

$$\begin{aligned} s_{12}^2 &= 0.303_{-0.012}^{+0.012} \quad (0.270 \sim 0.341), \\ s_{23}^2 &= 0.569_{-0.021}^{+0.016} \quad (0.412 \sim 0.613), \\ s_{13}^2 &= 0.02223_{-0.00058}^{+0.00058} \quad (0.02048 \sim 0.02416), \\ \delta/^\circ &= 276_{-29}^{+22} \quad (194 \sim 344), \\ \frac{\Delta m_{21}^2}{10^{-5} \text{eV}^2} &= 7.41_{-0.20}^{+0.21} \quad (6.82 \sim 8.03), \\ \frac{\Delta m_{32}^2}{10^{-3} \text{eV}^2} &= -2.486_{-0.028}^{+0.025} \quad (-2.570 \sim -2.406), \end{aligned} \quad (31)$$

となる [17]。

この他に、宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) [24, 25] の観測から、ニュートリノ質量和に対して

$$\Sigma m_i < 0.12 - 0.69 \text{ eV} \quad (32)$$

という制限が得られている。

また、ニュートリノレス二重 β 崩壊の探索実験から、ニュートリノ質量行列の 1 行 1 列成分 (ニュー

トリノレス二重 β 崩壊の有効ニュートリノ質量とよばれており, M_{ee} と表記される) の大きさに対して, 次の制限が得られている [26].

$$|M_{ee}| < 0.036 - 0.156 \text{ eV} \quad (33)$$

4 質量階層問題と octant 問題

本節では, M_{TMI} テクスチャーがマジックテクスチャーと最も近くなる時, すなわち, ϵ^2 が最も小さくなる時のニュートリノパラメータの値を数値計算で求める. また, 求めた結果から質量階層問題と octant 問題について考察する.

数値計算で用いる回転角 θ の範囲は, 式 (25) を用いて s_{13} の 3σ の許容領域に満たすように決定した. また, 位相パラメータ ϕ の範囲は, 式 (28) を用いて s_{23}^2 の 3σ の領域を満たすように決定した.

ニュートリノ質量和は $\Sigma m_i < 0.12 \text{ eV}$ とした. プランクグループによれば最も厳しい条件で CMB データを絶対処理したときに得られるニュートリノ質量和の上限が 0.12 eV だからである [25].

最も軽いニュートリノの質量 (NO の場合は m_1 , IO の場合は m_3) の範囲は, CMB の観測結果にしたがい $0 - 0.1 \text{ eV}$ とした. その他のニュートリノの質量範囲は, 質量 2 乗差の観測値の 3σ の許容領域を満たすよう決定した.

上記した範囲でパラメータの値を変化させて 10^6 通りで数値計算を行った結果, M_{TMI} テクスチャーが最もマジックテクスチャーに近づいたときの ϵ^2 の値 (ϵ^2 の最小値) は

$$(\epsilon^2, \epsilon_{\text{Re}}, \epsilon_{\text{Im}})_{\text{min}} = \begin{cases} (0.00002716 \text{ eV}^2, -0.0019 \text{ eV}, -0.0048 \text{ eV}) & \text{(NO)} \\ (0.00004765 \text{ eV}^2, 0.0036 \text{ eV}, 0.0059 \text{ eV}) & \text{(IO)} \end{cases} \quad (34)$$

であった. このときのニュートリノ質量, ニュートリノ混合角, CP 位相, 有効ニュートリノ質量は

$$(m_1, m_2, m_3) = \begin{cases} (0.0302 \text{ eV}, 0.0314 \text{ eV}, 0.0578 \text{ eV}) & \text{(NO)} \\ (0.0512 \text{ eV}, 0.0519 \text{ eV}, 0.0168 \text{ eV}) & \text{(IO)} \end{cases} \quad (35)$$

$$(s_{12}^2, s_{13}^2, s_{23}^2) = \begin{cases} (0.319, 0.02066, 0.445) & \text{(NO)} \\ (0.319, 0.02052, 0.501) & \text{(IO)} \end{cases} \quad (36)$$

$$(\delta, \alpha, \beta) = \begin{cases} (284.5^\circ, 178.19^\circ, 182.20^\circ) & \text{(NO)} \\ (89.7^\circ, 344.35^\circ, 195.44^\circ) & \text{(IO)} \end{cases} \quad (37)$$

$$|M_{ee}| = \begin{cases} 0.031 \text{ eV} & \text{(NO)} \\ 0.049 \text{ eV} & \text{(IO)} \end{cases} \quad (38)$$

であった.

また, 式 (35) からニュートリノ質量の 2 乗の平均 $\Sigma m_i^2/3$ を計算すると

$$\frac{\Sigma m_i^2}{3} = \begin{cases} 0.00174628 \text{ eV}^2 & \text{(NO)} \\ 0.00186576 \text{ eV}^2 & \text{(IO)} \end{cases} \quad (39)$$

となる。式 (34) と式 (35) を見比べると $\epsilon_{\text{Re}}, \epsilon_{\text{Im}}$ は m_1, m_2, m_3 の 10% ほどの大きさであることがわかる。さらに式 (34) と式 (39) を比較すると ϵ^2 はニュートリノ質量の 2 乗の平均値の 1% ほどの大きさであることがわかる。このことから ϵ^2 はニュートリノ質量と比較して小さい値を取る。

式 (38) より、有効ニュートリノ質量は NO と IO のどちらの場合も実験で得られている制限をクリアしていることがわかる。また、質量階層と octant に関して次の結論が得られる。

- 質量階層問題：式 (34) より、ニュートリノの質量階層が NO であるときの方が IO であるときよりも ϵ^2 の最小値が小さい。よって、ニュートリノの質量階層は NO になることが自然だと考えられる。
- Octant 問題：式 (36) より、ニュートリノの質量階層が NO のときの s_{23}^2 は 0.5 より小さく、IO のときは 0.5 より大きい。すなわち、NO の場合は 23 角が lower-octant になり、IO の場合は upper-octant になる。

これらの 2 つの結論を総合すると、ニュートリノが魔方陣と関係している場合にはニュートリノ質量階層は NO であり、23 角は lower-octant であると考えられる。

なお、残念ながらここで得られた結論は極めて不安定である。ここで使った不安定という言葉の意味を明確にするために、図 1 (図 2) に NO(IO) の場合のニュートリノパラメータと ϵ^2 の依存性を示した。

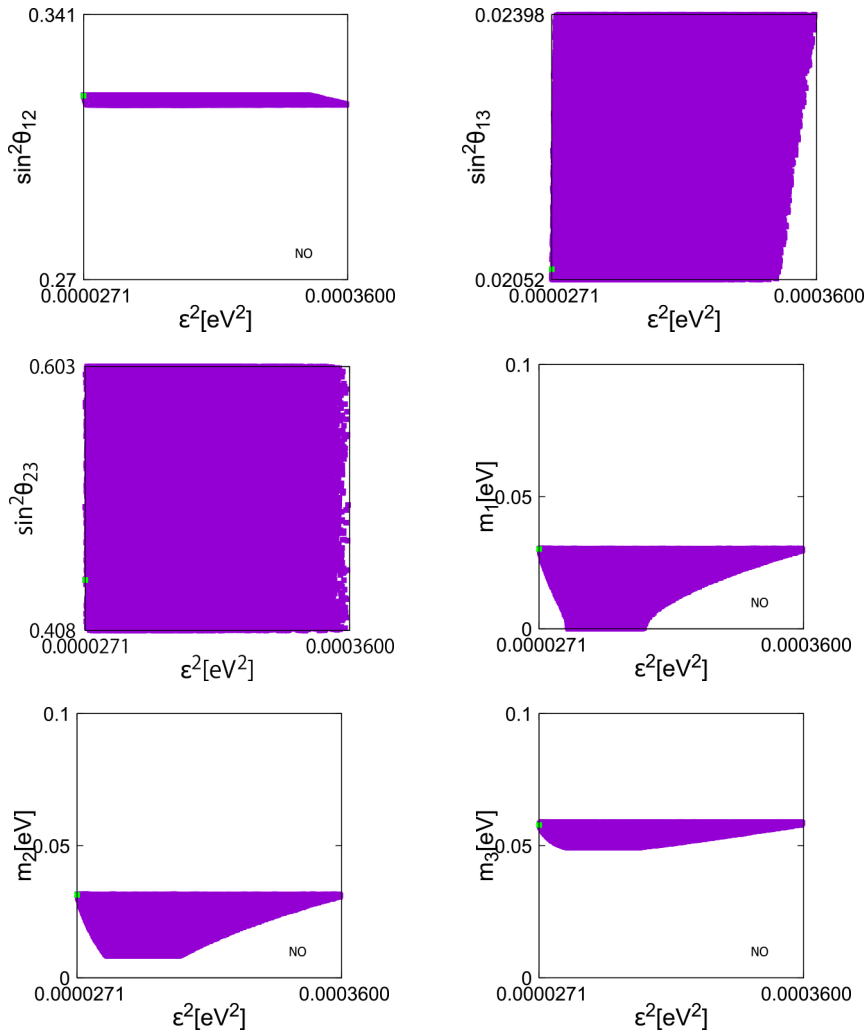


図 1 質量階層が NO のときのニュートリノパラメータと ϵ^2 依存性。

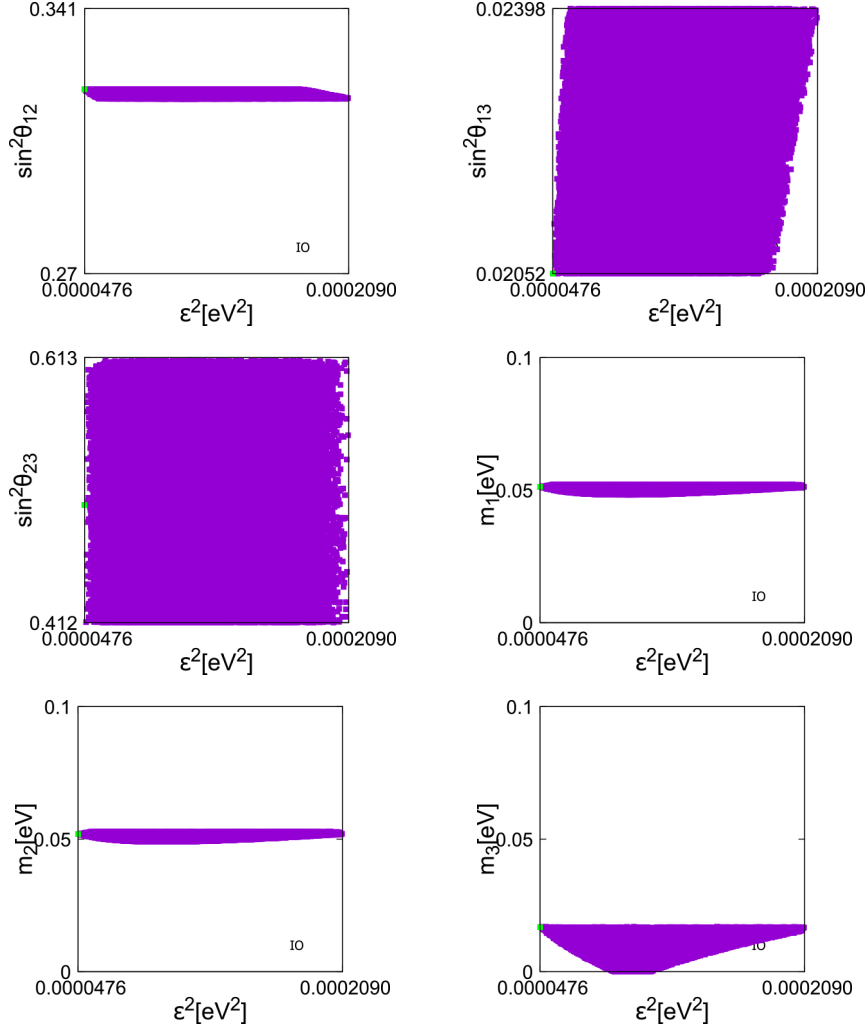


図 2 質量階層が IO のときのニュートリノパラメータと ϵ^2 依存性.

図 1, 2 の横軸はそれぞれ ϵ^2 の最大値と最小値の値を範囲とした. また, 縦軸の範囲は s_{ij}^2 の 3σ の範囲でとっている. さらに縦軸が m_i のときは数値計算範囲である $0 - 0.1 \text{ eV}$ でとっている. 各図の緑色の点は ϵ^2 が最小値のときの点である.

図 1, 2 より, ニュートリノパラメータと ϵ^2 との相関がほぼないことがわかる.

すなわち図 1, 2 の左端, つまり ϵ^2 が最小値をとるような値の付近でもプロットに大きな幅がでている. このことから, ϵ^2 の最小値付近でも各ニュートリノパラメータが様々な値を取ることがわかる. このため, ϵ^2 が最小値から僅かにずれただけで, モデルから予言されるニュートリノパラメータの値が大きく変化してしまう. このことを不安定と表現した. この不安定性の存在はマジック型はニュートリノ質量行列の基準行列として考えにくいことを示している.

だが我々は, ϵ^2 のファインチューニングによって得られた結論であっても, ニュートリノ物理学の未解決問題である質量階層問題と octant 問題に言及できたことには意味があると考えている.

5 まとめ

Harrison と Scott によってニュートリノ質量行列がマジックテクスチャーと関連している可能性が指摘されている. 本研究では, 実験結果の再現性がよい M_{TM1} テクスチャーがマジックテクスチャー

マジックテキストチャーに基づいたニュートリノの質量階層および 2-3 混合角の octant に関する研究

に最も近くなる時のニュートリノパラメータを求めた。その結果、式 (34) より M_{TM1} テクスチャーが最もマジックテキストチャーに近づくのは質量階層が NO のときでそのときの 23 角は lower-octant であることがわかった。また、図 (1),(2) より M_{TM1} テクスチャーがマジックテキストチャーに最も近くなる時、つまり ϵ^2 が最小値をとるときにはファインチューニングが必要であることも示した。

最後に M_{TM1} テクスチャーが持つ対称性についてコメントしておきたい。 M_{TM1} テクスチャーは以下のように Z_2 変換のもとで不変である

$$S_1^T M_{\text{TM1}} S_1 = M_{\text{TM1}} \quad (40)$$

ここで、

$$S_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (41)$$

$$S_1^2 = \text{diag}(1, 1, 1) \quad (42)$$

である。本研究では $M_{\text{TM1}} = M_{\text{magic}} + \Delta M$ という分解を行ったが、この分解の元でも

$$\begin{aligned} S_1^T M_{\text{TM1}} S_1 &= S_1^T (M_{\text{magic}} + \Delta M) S_1 \\ &= S_1^T M_{\text{magic}} S_1 + S_1^T \Delta M S_1 \\ &= M_{\text{magic}} + \Delta M \\ &= M_{\text{TM1}} \end{aligned} \quad (43)$$

が成立している。このため、 M_{magic} と ΔM は M_{TM1} と同様に Z_2 対称性をもつ行列である。 Z_2 対称性は離散的対称性の中で最も単純な対称性である [27]。さらに Z_2 対称性とニュートリノの質量生成メカニズムについても研究がされている [28]。 M_{TM1} テクスチャーはマジックテキストチャーからは、ずれてはいるが、極めてシンプルな Z_2 対称性を満足するようなずれしか許されない。本研究ではニュートリノの質量行列がマジックテキストチャーからずれる理由は問わなかった。我々はこの Z_2 対称性に着目することで、ずれる理由を明らかにできるのではないかと考えている。

参考文献

- [1] N. Chair, *Grassmannian Cohomolgy Rings and Fusion Rings from Algebraic Equations*, (1997) arXiv:9704138.
- [2] T. Okabe, *Biophysical optimality of the golden angle in phyllotaxis*, Scientific Reports **5**, (2015) 15358.
- [3] T. Sota, S. Yamamoto, J. R. Cooley, *Independent divergence of 13- and 17-y life cycles among three periodical cicada lineages*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America **110**, (2013) 6919–6924.
- [4] P. F. Harrison, W. G. Scott, *Permutation Symmetry, Tri-Bimaximal Neutrino Mixing and the S_3 Group Characters*, Phys. Lett. B **557**, (2003) 76.
- [5] Y. Hyodo, T. Kitabayashi, *Magic square and Dirac flavor neutrino mass matrix*, Int. J. Mod. Phys. A **35**, (2020) 2050183.
- [6] Y. Hyodo, T. Kitabayashi, *New magic textures of Majorana neutrinos and the baryon asymmetry of the Universe*, Prog. Theor. Exp. Phys. **2021**, (2021) 123B08.
- [7] P. F. Harrison, W. G. Scott, *The Simplest Neutrino Mass Matrix*, Phys. Lett. B **594**, (2004) 324.
- [8] C. S. Lam, *Magic Neutrino Mass Matrix and the Bjorken-Harrison-Scott Parameterization*, Phys. Lett. B **640**, (2006) 260.

- [9] Y. Hyodo, T. Kitabayashi, *Is the magic texture of Majorana neutrinos immanent in Dirac nature?*, Chin. Phys. C **47**, (2023) 043103.
- [10] R. R. Gautam, S. Kumar, *Zeros in the magic neutrino mass matrix*, Phys. Rev. D **100**, (2019) 039902.
- [11] K. Abe, et al., *Indication of Electron Neutrino Appearance from an Accelerator-Produced Off-Axis Muon Neutrino Beam*, PRL **107**, (2011) 041801.
- [12] Z. Z. Xing, S. Zhou, *Tri-bimaximal Neutrino Mixing and Flavor-dependent Resonant Leptogenesis*, Phys. Lett. B **653**, (2007) 278.
- [13] J. D. Bjorken, P. F. Harrison, W. G. Scott, *Simplified unitarity triangles for the lepton sector*, Phys. Rev. D **74**, (2006) 073012.
- [14] C. H. Albright, W. Rodejohann, *Comparing trimaximal mixing and its variants with deviations from tri-bimaximal mixing*, Eur. Phys. J. C **62**, (2009) 599.
- [15] C. H. Albright, A. Dueck, W. Rodejohann, *Possible alternatives to tri-bimaximal mixing*, Eur. Phys. J. C **70**, (2010) 1099.
- [16] S. Dev, D. Raj, *Phenomenology of Trimaximal Mixing with One Texture Equality*, Advances in High Energy Physics. **2022**, (2022) 4952562.
- [17] I. Esteban, M. C. Gonzalez-Garcia, M. Maltoni, T. Schwetz, A. Zhou, *The fate of hints: updated global analysis of three-flavor neutrino oscillations*, J. High Energy Phys. **09**, (2020) 178. See also, NuFIT 5.2 (2022), <http://www.nu-fit.org>.
- [18] P. Deka, K. Bora, *Sensitivity of octant of θ_{23} , CP violation and mass hierarchy in NOvA with multinucleon and detector effects*, (2023) arXiv:2308.03702.
- [19] B. Pontecorvo, *Mesonium and Antimesonium*, Sov. Phys. JETP **6** (1957) 429.
- [20] B. Pontecorvo, *Inverse beta processes and nonconservation of lepton charge*, Sov. Phys. JETP **7** (1958) 172.
- [21] Z. Maki, M. Nakagawa, S. Sakata, *Remarks on the Unified Model of Elementary Particles*, Prog. Theor. Phys. **28**, (1962) 870.
- [22] P. A. Zyla, et al., (Particle Data Group), *Review of Particle Physics*, Prog. Theor. Exp. Phys. **2020**, (2020) 083C01.
- [23] C. Jarlskog, *Commutator of the Quark Mass Matrices in the Standard Electroweak Model and a Measure of Maximal CP Nonconservation*, Phys. Rev. Lett. **55**, (1985) 1039.
- [24] S. Vagnozzi, E. Giusarma, O. Mena, K. Freese, M. Gerbino, S. Ho, M. Lattanzi, *Unveiling ν secrets with cosmological data: Neutrino masses and mass hierarchy*, Phys. Rev. D **96**, (2017) 123503.
- [25] N. Aghanim, et al. (Planck Collaboration), *Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters*, Astron. Astrophys. **641**, (2020) A6.
- [26] S. Abe, et al. (KamLAND-Zen Collaboration), *Search for the Majorana Nature of Neutrinos in the Inverted Mass Ordering Region with KamLAND-Zen*, Phys. Rev. Lett. **130**, (2023) 051801.
- [27] G. Altarelli, F. Feruglio, *Discrete flavor symmetries and models of neutrino mixing*, Rev. Mod. Phys. **82**, (2010) 2701.
- [28] M. J. S. Yang, *Conditions of general Z_2 symmetry and $TM_{1,2}$ mixing for the minimal type-I seesaw mechanism in an arbitrary basis*, Nucl. Phys. B **982**, (2022) 115893.