

正規圧密粘土の塑性ポテンシャルとひずみの比

今井 誉人^{*1} 飯沼 孝一^{*2} 赤石 勝^{*3} 杉山 太宏^{*4}

Plastic Potential and the Ratio of Strain Components of Normally Consolidated Clays

by

Yoshihito IMAI^{*1}, Koichi IINUMA^{*2}, Masaru AKAISHI^{*3} and Motohiro SUGIYAMA^{*4}

(Received on May 27, 2022 and accepted on July 7, 2022)

Abstract

The relationship between the ratio of strain components and the plastic potential Q of the elasto-plastic constitutive model used for finite element analysis is investigated. The following results were obtained. 1) Reproduction of the K_0 stress deformation state depends on the assumed plastic potential. 2) The adoption of the associated flow rule is a constraint on the rational elasto-plastic deformation analysis for soft grounds; it is necessary to adopt the non-associated flow rule. 3) If a plastic potential that can reproduce the K_0 value is adopted, the stress-strain relationship at the stress ratio near the K_0 value is more useful for practical prediction.

Keywords: Clay, Strain, Flow rule, Plastic potential

1. 緒言

地盤の弾塑性有限要素解析では、載荷前の地盤内の応力状態変化が予測精度に影響する。載荷前の平坦地盤内の応力状態、すなわち、静止土圧状態からの地盤内応力変化に対応したひずみが計算される場合、初期応力を決める静止土圧係数は、計算上必要不可欠な定数の一つである。代表的な弾塑性構成式の一つカムクレイモデルの塑性ポテンシャルでは、実際の測定値よりかなり大きな静止土圧係数 K_0 値を与えることが知られている^{1),2)}。載荷前の地盤内初期応力を再現できない弾塑性構成式では、盛土や構造物載荷後の地盤変形や地盤内応力計算値の信頼度は低いものとなる。また、実務では塑性指数やせん断抵抗角から推定した K_0 値を用いることがあるが、その K_0 値の信頼性も高くない。

粘土を対象とした弾塑性モデルの K_0 値には、弾性ひずみ成分はポアソン比、塑性ひずみ成分は塑性ポテンシャルが関係する³⁾。両ひずみ成分によって K_0 値を再現できれば、静止土圧状態に近い異方応力状態で発生するひずみ成分をより正確に予測できる可能性があると考えられる。この論文では、応力比一定の三軸異方圧密試験で発生する軸ひずみと体積ひずみの関係を検討した。具体的には、 K_0 条件の応力増分を加えた三軸圧密試験で軸ひずみと体積ひずみの大きさが等しく、側方ひずみゼロが計算される塑性ポテンシャルを提案した。これを用いた弾塑性応力ひずみ関係の計算結果と実験結果を比較するこ

とで、提案する塑性ポテンシャルが K_0 値付近の応力比で圧縮された粘土の軸ひずみと体積ひずみ関係の予測に適用可能なことを示す。

2. ひずみ関係と塑性ポテンシャル Q

粘土要素に生じる全ひずみ速度 $\dot{\epsilon}$ は、弾性ひずみ速度成分 $\dot{\epsilon}_e$ と塑性ひずみ速度成分 $\dot{\epsilon}_p$ の和として式(1)で表し、弾性ひずみ速度成分はフックの法則、塑性ひずみ速度成分は粘塑性流動則の式(2)を用いて計算する。粘塑性流動則を用いても、定常状態であれば弾塑性解析となる⁴⁾。

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_e + \dot{\epsilon}_p \quad (1), \quad \dot{\epsilon}_p = \langle F \rangle \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \quad (2)$$

ここに、 F は降伏関数、 Q は塑性ポテンシャル、 σ は応力成分である。 $F \leq 0$ ならば $\langle \rangle$ 内の値はゼロとし、 $F > 0$ ならば通常の括弧として扱う。また、“ $\cdot$ ” は時間についての微分を示し、この論文では時間増分で発生するひずみ増分の計算には前進差分法を用いる。

式(2)から明らかなように、 F はゼロか正かが塑性ひずみ増分の計算に影響する。また、塑性ひずみ成分は塑性ポテンシャル Q の応力勾配に比例するので、一次元圧縮において計算される水平有効応力、すなわち静止土圧係数は塑性ポテンシャル Q に影響される。その塑性ひずみ成分に対する Q の影響を比較検討するため、代表的弾塑性構成式として知られている式(3)のオリジナルカムクレイ、式(4)の修正カムクレイモデルと、提案する式(5)の塑性ポテンシャルを用いる^{5),6)}。

*1 小野田ケミコ株式会社 技術設計部

*2 株式会社 オオバ

*3 東海大学名誉教授

*4 工学部土木工学科教授

$$Q_0(=F_0) = q - Mp \ln(p_0/p) \quad (3)$$

$$Q_M(=F_M) = q^2 + M^2(p^2 - pp_0) \quad (4)$$

$$Q_P(=F_P) = q^2 - 2\gamma_p pq + \gamma_p^2 pp_0 + M^2(p^2 - pp_0) \quad (5)$$

ここに、 q は偏差応力、 p は平均有効応力、 p_0 はそれぞれ塑性ポテンシャルのサイズパラメーター、 M は限界状態線 CSL の勾配、 $\gamma_p (= \eta_0^2 + 3\eta_0 - M^2)/3$ 、 $\eta_0 = q_0/p_0$ は K_0 圧密時の応力比 η_0 と M から決定する定数である²⁾。式(5)において $\gamma_p = 0$ とした Q_p は、修正カムクレイモデルのそれと一致する。なお、式(3)～(5)のカッコ内 F_0 、 F_M 、 F_P は降伏関数で、いずれの式も関連流動則を意味する。

Fig. 1 は、式(3)～(5)の各降伏関数 ($F=0$) を p - q 空間に示したもので、◎印の応力で K_0 圧密されたカムクレイモデルの降伏面は破線がオリジナル、一点鎖線が修正カムクレイモデルである。カムクレイモデルは周知のとおり関連流動則 ($F=Q$) であり、Fig. 1 の降伏関数から塑性ポテンシャル Q による塑性ひずみ増分ベクトルの方向が推測できる。これらの F や Q を用いることで、三軸供試体の弾塑性応力ひずみ関係が式(6)で求められる⁷⁾。

$$\begin{bmatrix} dv \\ d\varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dv_e + dv_p \\ d\varepsilon_e + d\varepsilon_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} dp \\ dq \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{1}{H} \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{1}{K} & C_{12} &= \frac{1}{H} \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial Q}{\partial p} \\ C_{21} &= \frac{1}{H} \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial Q}{\partial q} & C_{22} &= \frac{1}{H} \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial Q}{\partial q} + \frac{1}{3G} \\ H &= -\frac{\partial F}{\partial v_p} \frac{\partial Q}{\partial p} \end{aligned}$$

ここに、体積ひずみ $v (= \varepsilon_a + 2\varepsilon_r)$ 、 ε_a : 軸方向ひずみ、 ε_r : 軸方向ひずみ、偏差ひずみ $\varepsilon (= 2(\varepsilon_a - 2\varepsilon_r)/3)$ 、平均有効応力 $p (= (\sigma_a + 2\sigma_r)/3)$ 、 $q (= \sigma_a - \sigma_r)$ は偏差応力、下付き添え字の a と r は軸方向と半径方向を、 e と p は弾性ならびに塑性ひずみ成分をそれぞれ表す。 K は体積弾性係数、 G はせん断弾性係数である。

応力比一定三軸圧密試験における偏差ひずみのせん断弾性係数 G の影響を無視して式(3)、式(5)をそれぞれ式(6)に代入すれば、偏差塑性ひずみ増分 $d\varepsilon_p$ が式(7)、式(8)として求められる。両式の体積ひずみ増分は共通で式(9)である。

$$d\varepsilon_p = -\frac{(\lambda - \kappa)}{f_0} \frac{1}{(M - \eta)} \frac{dp}{p} \quad (7)$$

$$d\varepsilon_p = \frac{(\lambda - \kappa)}{f_0} \frac{2(\eta - \gamma_p)}{(M^2 - \eta^2)} \frac{dp}{p} \quad (8)$$

$$dv = \frac{\lambda}{f_0} \frac{dp}{p} \quad (9)$$

ここに、 f_0 は体積比、 λ は圧縮指数、 κ は膨張指数、 $\eta (= q/p)$ は応力比である。式(8)では、 $\gamma_p = 0$ とすれば修正カムクレイの偏差ひずみ増分となる。

これらの関係式を用いた式(6)の数値積分で三軸圧密

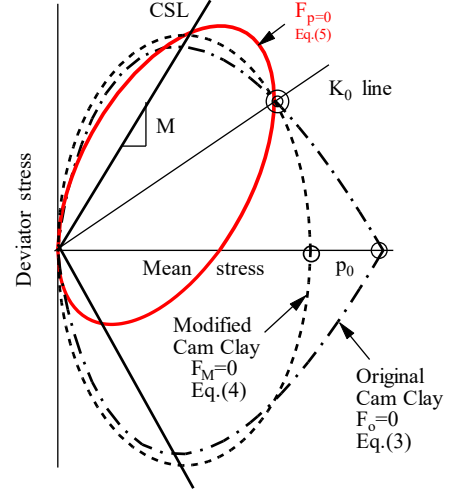


Fig. 1 Yield surface $F=0$.

試験の軸ひずみと体積ひずみの関係が計算可能である。弾性せん断ひずみ増分 $d\varepsilon_e = 0$ 、すなわち $d\varepsilon = d\varepsilon_p$ と仮定すれば、応力比一定三軸圧密試験の体積ひずみ増分と軸ひずみの比がオリジナルカムクレイは式(10)、提案式は式(11)となって、応力比 η に依存する値となる。

$$dv/d\varepsilon_p = \frac{3(M - \eta)}{3\Lambda + M - \eta} \quad (10)$$

$$dv/d\varepsilon_p = \frac{3(M^2 - \eta^2)}{3\Lambda(\eta - \gamma_p) + M^2 - \eta^2} \quad (11)$$

ここに、 $\Lambda = 1 - \kappa/\lambda$ である。

Table 1 Physical properties of soils.

Sample	Gs	ω_L (%)	Ip (%)	Grading (%)		
				Clay	Silt	Sand
H	2.660	121	69	18	72	10
K	2.642	112	51	47	38	15
M	2.648	67	31	34	55	11
Y	2.652	73	41	30	38	32
I	2.183	172	84	---	---	---

3. 試料および実験方法

Table 1 に示した物性を示す 5 種類の粘性土試料を液性限界以上の含水比で練り返した後、一次元圧密容器に投入して所定の圧密圧力で予圧密を行い、三軸圧密試験用粘土塊を作成した。直径 5 cm、高さ 12 cm の供試体を成形し、圧密を促進するため円柱供試体の上下周囲に濾紙を巻き三軸室にセットした。予圧密圧力に等しい圧密圧力で 1 日間 K_0 圧密後、次の試験を実施した。

K_0 圧密ならびに非排水せん断試験：非排水状態で等方応力増分を載荷、 B 値 (≈ 1) を確認後 K_0 圧密試験を実施した。圧密開始後、軸ひずみと体積ひずみの大きさが等しい K_0 条件となるよう水平応力増分を制御した。

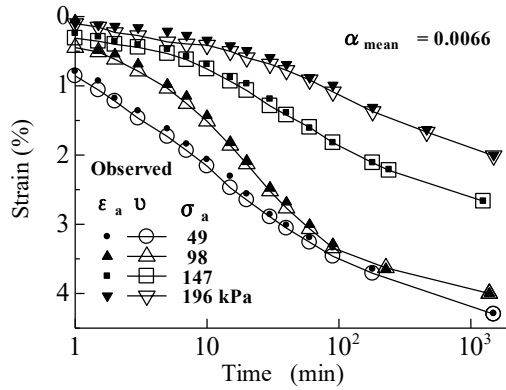
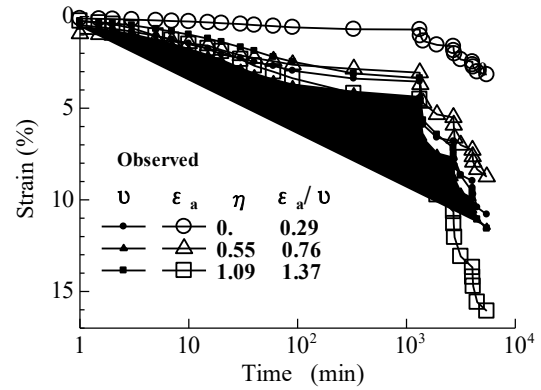

 Fig. 2 K_0 consolidation test ; Sample Y.


Fig. 4 Anisotropic Consolidation test ; Sample Y.

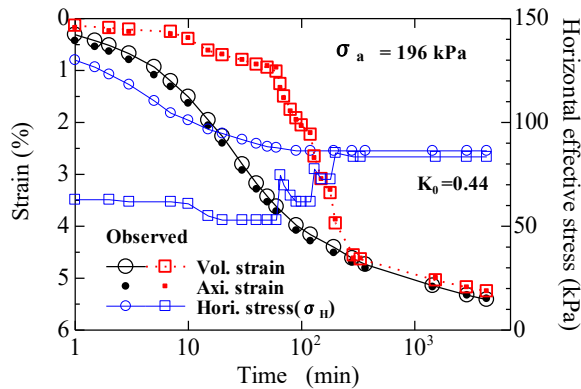
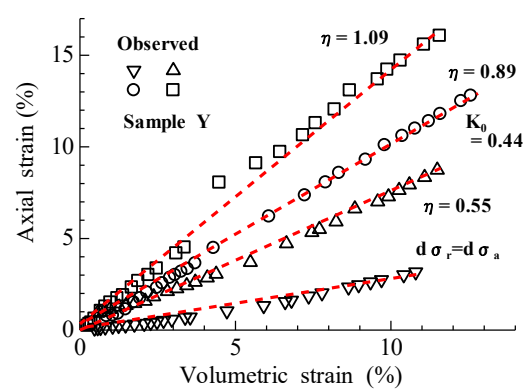

 Fig. 3 K_0 consolidation test ; Sample H.


Fig. 5 Relation of axial and volumetric strain ; Sample Y.

K_0 圧密後ひずみ制御の非排水せん断試験を行い、応力ひずみ関係の計算に必要なせん断抵抗角を求めた。
応力比一定三軸異方圧密試験:鉛直応力 $\sigma_{a0}=98$ kPaで K_0 圧密後、鉛直応力増分 $d\sigma_a=98$ kPaを4等分し、1日間隔で載荷・圧密した。所定の応力比で応力比増分がゼロとなるよう水平応力増分 $d\sigma_r$ を設定したので、応力比一定試験と言っても最初の載荷段階の応力比は一定ではない。2から4段階の載荷が所定の応力比となる試験の体積ひずみ v と軸ひずみ ε_a の経時変化を測定した。圧密せん断過程では、98 kPaのバックプレッシャーを載荷した。

4. 実験ならびに計算結果と考察

試料 Y と H の K_0 圧密試験における体積ひずみ v と軸ひずみ ε_a の経時変化が、それぞれ Fig. 2 と Fig. 3 である。Fig. 2 は試料 Y に対して鉛直応力 σ_a を4段階(49, 98, 147, 196 kPa)で載荷した時の各両ひずみ、Fig. 3 は瞬間載荷(黒印)と段階載荷(赤印)で得られた両ひずみに加え K_0 条件のために制御した水平応力 σ_r の経時変化も青印の記号で併せて示している。試料や荷重載荷方法によらず $v=\varepsilon_a$ となり、水平方向ひずみゼロの K_0 状態が確認できる。また、両粘土とも顕著な二次圧密挙動が観察されるが、二次圧密の継続中、水平有効応力は一定値に収束し両試料の K_0 値は同じ 0.44 (応力比 $\eta=0.894$)となった。

Fig. 4 は、応力比 η を変えた等方圧密($\eta=0$)を含む異方圧密試験(試料 K)の軸ひずみ ε_a と体積ひずみ v の経時

変化である。1 日間隔の段階載荷ではあるが載荷増分が大きいので、載荷直後に軸ひずみ ε_a は急増し、応力比 η の増加に伴い軸ひずみ量は増加する。3 段階の載荷により生じた各試験の両ひずみの関係を示したのが Fig. 5 である。各載荷段階の応力比 η が変わらなければ、 ε_a と v の比は破線で示すようにほぼ一定となることがわかる。Fig. 5 と同様に試料 H の $\varepsilon_a \sim v$ 関係を示したのが Fig. 6 で、両者には赤破線のとおり直線関係が認められる。

試験を行った 4 試料の応力比 η と軸ひずみと体積ひずみの比 ε_a/v の関係を調べた Fig. 7 によれば、 η と ε_a/v には比例関係が認められる。この関係を利用すれば、 η 一定で行う異方圧密試験の結果から K_0 値を推測できる可能性がある。

Fig. 8 は、試料 H の η と ε_a/v 関係の実測値と弾性せん断ひずみをゼロと仮定した近似式(10), (11)による計算結果の比較である。式(10)のオリジナルカムクレイモデルでは軸ひずみを2倍以上過大に評価するのに対し、提案式(11)では非関連流動則を採用し、式(5)の Q_p 決定に必要な定数 γ_p 値を実験の K_0 値と限界状態線の勾配 M から求めることで、 K_0 状態が計算できている。しかし、 η が K_0 状態から遠ざかるほど実測値との差が広がる。これは、弾性せん断ひずみの影響を無視したことと、仮定する塑性ポテンシャルの不適合のためと考えられる。

Fig. 9 は、 $\eta=0.75$ ($K=d\sigma_r/d\sigma_a=0.5$)、試料 I で実施した異方圧密試験の ε_a/v 関係の実測値で、正規圧密領域の $\varepsilon_a/v=1.15$ である。式(5)と(6)による数値積分で $\varepsilon_a/v=1.15$ となる計算結果は、 K_0 値の再現に必要な塑性ポテンシヤ

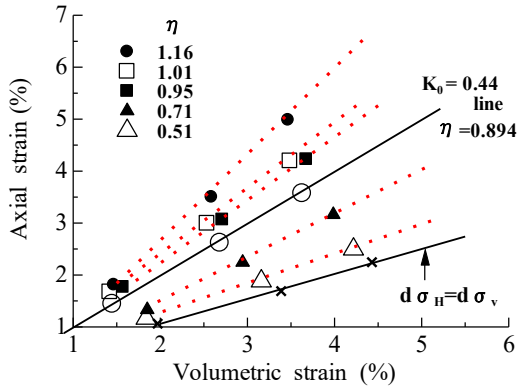


Fig. 6 Relation of v , ε_a and η ; Sample H.

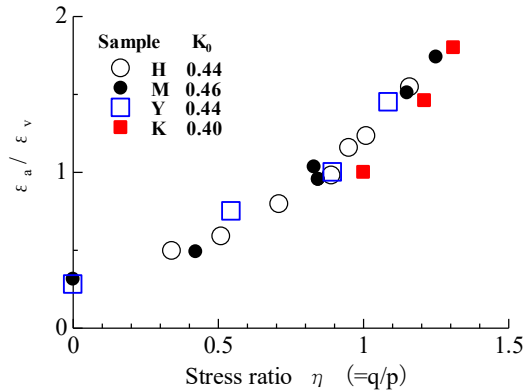


Fig. 7 Relation of v , ε_a and η ; Samples H, M, Y & K.

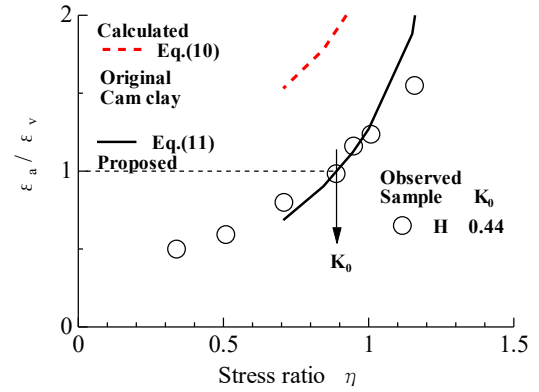


Fig. 8 Observed and Calculated relations of ε_a / v and η .

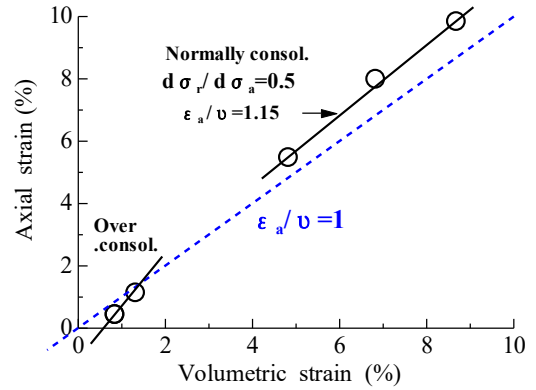


Fig. 9 Ratio of ε_a / v of η constant test; Sample I.

ルの γ_p 値(=-0.26)を設定することで得られる。弾塑性構成式による排水条件下の軟弱地盤のせん断変形予測には、仮定する塑性ポテンシャルの適用性が重要である。式(5)の Q の適用性は、今後より大きな η ($\eta > \eta_0$)の異方圧密試験により、更に検討する必要がある。

5. 結言

地盤の有限要素解析に用いる弾塑性構成式の塑性ポテンシャルと K_0 値の関係について検討した。周知のように、Cam clayモデルの流動則で採用する塑性ポテンシャルでは、 K_0 変形応力状態を再現できず、 K_0 圧密地盤に载荷する多次元圧密変形の合理的な予測はできない。提案した K_0 値を再現できる塑性ポテンシャルを利用すれば、応力比を一定とした三軸異方圧密試験で得られる軸ひずみと体積ひずみ関係の予測が可能であることを示した。

この論文の検討は、弾塑性構成式で仮定する塑性ポテンシャルを利用して計算される塑性ひずみ成分と K_0 値の関係に限られている。弾性ひずみに関係するポアソン比は K_0 値から計算しているが、異方応力条件下の圧縮におけるその前提の検討は今後の課題である。

参考文献

- 1) J. H. Atkinson: *Foundations and slopes*, McGRAW-Hill, (1981).
- 2) 飯沼孝一, 今井誉人, 赤石勝, 杉山太宏: 一次元圧密における有効応力経路と塑性ポテンシャル, 土木学会論文集 C (地圏工学), Vol.71, No.2, pp.119-124 (2015).
- 3) D. J. Naylor and G. N. Pande: *Finite element in geomechanical engineering*, Pineridge Press Ltd. (1981).
- 4) D. R. J. Owen and E. Hinton: *FINITE ELEMENTS IN PLASTICITY*, Pineridge Press Ltd. (1980).
- 5) K. H. Roscoe and J. B. Burland: On the generalized stress strain behavior of saturated clay, *Engineering Plasticity*, Cambridge Univ. Press (1968).
- 6) Y. F. Dafalias and M. Akaishi: A simple anisotropic clay plasticity model, *Mechanics Research Communications*, Vol.29, pp.241-245 (2002).
- 7) I. M. Smith: *Programing the Finite Element Method with Application to Geomechanics*, John Wiley & Sons, Inc. (1982).