

最単純ディラックニュートリノ質量行列の 魔方陣と3ゼロテクスチャーによる分解

南澤凌太^{*1}, 兵藤悠太², 北林照幸³

¹〒259-1292 神奈川県平塚市北金目 4-1-1

東海大学大学院 理学研究科 物理学専攻

²〒259-1292 神奈川県平塚市北金目 4-1-1

東海大学大学院 総合理工学研究科 総合理工学専攻 物理・数理科学コース

³〒259-1292 神奈川県平塚市北金目 4-1-1

東海大学 理学部 物理学科

(2022年10月7日受付；2022年12月9日受理)

Magic square and three-zero textures decomposition of the simplest Dirac neutrino mass matrix

by

Ryota MINAMIZAWA^{*1}, Yuta HYODO² and Teruyuki KITABAYASHI³

¹*Course of Physics, Graduate School of Science, Tokai University,*

4-1-1 Kitakaname, Hiratsuka, Kanagawa, 259-1292, Japan

²*Physical and Mathematical Science Course, Graduate School of Science and Technology,*

Tokai University,

4-1-1 Kitakaname, Hiratsuka, Kanagawa, 259-1292, Japan

³*Department of Physics, School of Science, Tokai University,*

4-1-1 Kitakaname, Hiratsuka, Kanagawa, 259-1292, Japan teruyuki@tokai-u.jp

^{*}Corresponding author: E-mail: 1csnm018@mail.u-tokai.ac.jp

(Received on Oct. 7, 2022; accepted on Dec. 9, 2022)

Abstract

Determining the texture of flavor neutrino mass matrix is the important issue in neutrino physics. We decompose a simplest Dirac flavor neutrino mass matrix as $M = M' + M^0$. We show that if M' obeys magic square, texture of M^0 becomes the three zero-texture. Although M^0 is too large to be regarded as a perturbation, the neutrino mass ordering may be normal mass ordering in the context of the magic square.

Keywords: Neutrinos mass; Three zero-textures; Magic square

1 序 論

ニュートリノ物理学においてフレーバー質量行列形 (テクスチャー) の決定は重要な課題の 1 つである. これまでに, trimaximal テクスチャー [1–4], μ - τ 対称性にもとづくテクスチャー [5–28], A_n や S_n 対称性にもとづくテクスチャー [29], そして本研究で着目するゼロテクスチャー [30–70] などが提案されている.

ニュートリノのフレーバー質量行列形の研究は, ニュートリノがマヨラナ粒子であると仮定して行われることが多い. これは, 有力視されているニュートリノ質量生成メカニズムの 1 つであるタイプ I シーソーメカニズムによれば, ニュートリノがマヨラナ粒子である可能性が高いためである. また, マヨラナニュートリノの質量行列が対称行列となるために解析が容易であることも理由の 1 つであろう. だが, ニュートリノがマヨラナ粒子であるのかディラック粒子であるのかは未解決問題である.

ニュートリノがディラック粒子であると仮定している Borgohain と Borah による先行研究では, ディラック型のニュートリノ質量行列に許されるゼロ要素の数を, ゼロが 1 つの場合 (1 ゼロテクスチャー) からゼロが 5 つの場合 (5 ゼロテクスチャー) まで系統的に調査している [71]. だがこの先行研究では, ゼロ要素を含む質量行列形がニュートリノ実験結果と矛盾しないかどうかを調査しているのみであり, 質量行列の中に含まれるゼロ要素の起源には言及していない.

本研究では, ディラック型のニュートリノフレーバ質量行列を $M = M' + M^0$ のように和で分解したとき, M' が魔方陣に従う場合には M^0 に許されるゼロ要素数が自然と 3 になる (3 ゼロテクスチャーになる) ことを示す.

魔方陣とは異なる自然数で構成された $n \times n$ の正方行列 [72–78] である. 各成分には $1, 2, \dots, n^2$ の数字が入る. さらに, 各行, 列, 対角線にある数字の合計が等しくなる. 例えば, 3 次の魔方陣は以下のような.

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 2 & 7 & 6 & \leftarrow & 15 & \\
 9 & 5 & 1 & \leftarrow & 15 & \\
 4 & 3 & 8 & \leftarrow & 15 & \\
 \nearrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \nwarrow & \\
 15 & 15 & 15 & 15 & 15 &
 \end{array} \tag{1}$$

ここで和は 15 である. Lucas 行列 [73–77] も完全魔方陣に従うことが知られている.

$$M^{\text{magic}} = \begin{pmatrix} \gamma - \beta & \gamma + \alpha + \beta & \gamma - \alpha \\ \gamma - \alpha + \beta & \gamma & \gamma + \alpha - \beta \\ \gamma + \alpha & \gamma - \alpha - \beta & \gamma + \beta \end{pmatrix}. \tag{2}$$

α, β, γ は複素数である. 本研究では, この Lucas 行列を魔方陣を実現するために用いる.

ここで, 魔方陣型のニュートリノ質量行列を考える物理的な動機を先行研究を含めて明確にする. 歴史的には, 2004 年に Harrison と Scott によってマヨラナニュートリノの質量行列が魔方陣型 (Lucas 行列) の性質を近似的に満たしていることが示された [79]. この発見を受け, ニュートリノの魔方陣型質量行列が持つ性質が多角的に調査されてきた [80–86]. この魔方陣型質量行列の特に注目すべき性質は, Z_2 離散対称性を満たしている点である [82, 84]. 例えば魔方陣型質量行列は次の Z_2 離散変換で不変になる.

$$S_2 M^{\text{magic}} S_2^T = M^{\text{magic}}. \quad (3)$$

ここで

$$S_2 = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

である。この変換行列 S_2 は

$$S_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

を満たし、確かに Z_2 対称性を満たしている。一般に、マヨラナニュートリノ質量行列形を持つ離散対称性の中で最も単純な変換性を持つものが Z_2 離散対称性であると期待されており [29]、この最も単純な Z_2 離散対称性が、古来からある数学パズルでも知られている魔方陣 (Lucas 行列) に現れることは興味深い。このように、魔方陣型はマヨラナニュートリノに関して成功している質量行列形の1つであるため、この成功を動機として本研究ではマヨラナ型ではなくディラック型のニュートリノ質量行列が魔方陣型にどこまで従うかを調査する。

次に、ディラックニュートリノの質量行列テクスチャーとして魔方陣型 (Lucas 行列) と摂動項との分解を仮定する利点について言及する。最大の利点は、マヨラナニュートリノで得られている知見をディラックニュートリノの研究に応用するきっかけが得られる可能性があることである。本論で行うように、ニュートリノ質量行列を「Lucas 型+摂動項」と分解することで、Lucas 型がニュートリノのマヨラナ性を示す部分、摂動項がマヨラナ型とディラック型の差異を表す部分とみなすことができれば、一般には複雑な形となるディラック質量行列型を、比較的単純な形であるマヨラナ質量行列を用いて解析可能になる。例えば、ニュートリノの小さな質量の源を説明するシーソーメカニズムで [87-90] ニュートリノをマヨラナ粒子だと仮定するのが一般的であるが、Lucas 型の質量行列の摂動項を考察することで、シーソーメカニズムをベースにしたディラック型のニュートリノの質量生成を調査できる可能性もあると考えられる。この可能性については本研究の範囲外としたが、将来の研究テーマとしたい。

なお、本研究ではディラックニュートリノ質量行列の一般形として、Hagedorn と Rodejohann によって提案されている最も単純な形を採用する [91]。この最も単純な質量行列形では右巻きニュートリノの混合効果が無視されているが、右巻きニュートリノは実験で発見されていないため、質量行列への影響は未知である。本研究では右巻きニュートリノの質量行列への影響は無視できるものとする。

本文の構成は以下のとおりである。2節では、ディラック型のニュートリノ質量行列の魔方陣と3ゼロテクスチャーによる分解について述べる。3節では、分解によって得られた複数パターンの3ゼロテクスチャーの中から、魔方陣と最も相性の良いパターンを実験と比較して同定する。4節では本研究をまとめる。

2 質量行列の魔方陣と3ゼロテクスチャーによる分解

ディラック型のニュートリノ質量行列

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \quad (6)$$

を Lucas 行列 M^{magic} を用いて

$$M = M^{\text{magic}} + M^0, \quad (7)$$

と分解する. ここで

$$M^0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ d_0 & e_0 & f_0 \\ g_0 & h_0 & i_0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

である. 複素行列 M の複素要素数は 9 つである. Lucas 行列 M^{magic} の複素要素数は 3 つであり, M^0 の独立な複素要素数は 6 つであるため, M^0 の 3 つの複素要素数は一般性を損なわずに 0 ととることができる. よってディラック型のフレーバー質量行列を式 (7) のように M^{magic} と M^0 で分解するとき, M^0 の最も自然な形は 3 つの 0 要素を持つ.

Lucas 行列は (2,2) 成分の γ が基準値であるため [73], $e = \gamma$ とする ($e_0 = 0$ とする)*この場合, 以下の 28 個の 3 ゼロテクスチャーが得られる.

$$M_1^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_0 \\ d_0 & 0 & f_0 \\ g_0 & h_0 & i_0 \end{pmatrix}, \quad M_2^0 = \begin{pmatrix} 0 & b_0 & 0 \\ d_0 & 0 & f_0 \\ g_0 & h_0 & i_0 \end{pmatrix}, \quad M_3^0 = \begin{pmatrix} 0 & b_0 & c_0 \\ 0 & 0 & f_0 \\ g_0 & h_0 & i_0 \end{pmatrix},$$

$$M_4^0 = \begin{pmatrix} 0 & b_0 & c_0 \\ d_0 & 0 & 0 \\ g_0 & h_0 & i_0 \end{pmatrix}, \quad M_5^0 = \begin{pmatrix} 0 & b_0 & c_0 \\ d_0 & 0 & f_0 \\ 0 & h_0 & i_0 \end{pmatrix}, \quad M_6^0 = \begin{pmatrix} 0 & b_0 & c_0 \\ d_0 & 0 & f_0 \\ g_0 & 0 & i_0 \end{pmatrix},$$

$$M_7^0 = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ d_0 & 0 & f_0 \\ g_0 & h_0 & i_0 \end{pmatrix}, \quad M_8^0 = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & c_0 \\ 0 & 0 & f_0 \\ g_0 & h_0 & i_0 \end{pmatrix}, \quad M_9^0 = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & c_0 \\ d_0 & 0 & 0 \\ g_0 & h_0 & i_0 \end{pmatrix},$$

$$M_{10}^0 = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & c_0 \\ d_0 & 0 & f_0 \\ 0 & h_0 & i_0 \end{pmatrix}, \quad M_{11}^0 = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & c_0 \\ d_0 & 0 & f_0 \\ g_0 & h_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{12}^0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & f_0 \\ g_0 & h_0 & i_0 \end{pmatrix},$$

$$M_{13}^0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 \\ d_0 & 0 & 0 \\ g_0 & h_0 & i_0 \end{pmatrix}, \quad M_{14}^0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 \\ d_0 & 0 & f_0 \\ g_0 & 0 & i_0 \end{pmatrix}, \quad M_{15}^0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 \\ d_0 & 0 & f_0 \\ g_0 & h_0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_{16}^0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ 0 & 0 & f_0 \\ 0 & h_0 & i_0 \end{pmatrix}, \quad M_{17}^0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ 0 & 0 & f_0 \\ g_0 & 0 & i_0 \end{pmatrix}, \quad M_{18}^0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ 0 & 0 & f_0 \\ g_0 & h_0 & 0 \end{pmatrix},$$

* 式 (2) に示す通り, Lucas 行列の中にある 9 つの要素の中で, (2,2) 成分のみが γ という 1 つのパラメータで記述されている. このため, ニュートリノ質量行列の (2,2) 成分の観測値を γ と一致させ, (2,2) 成分以外の要素を α, β という 2 つのパラメータと摂動項で再現すると, (パラメータの数と行列に含まれる独立要素数を比較すると摂動項の 3 つの成分をゼロにすることが可能であるので) さらに摂動項の (2,2) 成分である e_0 をゼロにとると, Lucas 型 + 摂動項と分解した質量行列の (2,2) 成分が Lucas 行列がもつ 3 つのパラメータの中の γ そのものになり最も単純な分解が実現する.

最単純ディラックニュートリノ質量行列の魔方陣と3ゼロテクスチャーによる分解

$$\begin{aligned}
M_{19}^0 &= \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ d_0 & 0 & 0 \\ 0 & h_0 & i_0 \end{pmatrix}, & M_{20}^0 &= \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ d_0 & 0 & 0 \\ g_0 & 0 & i_0 \end{pmatrix}, & M_{21}^0 &= \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ d_0 & 0 & 0 \\ g_0 & h_0 & 0 \end{pmatrix}, \\
M_{22}^0 &= \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ g_0 & 0 & f_0 \\ 0 & 0 & i_0 \end{pmatrix}, & M_{23}^0 &= \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ d_0 & 0 & f_0 \\ 0 & h_0 & 0 \end{pmatrix}, & M_{24}^0 &= \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ d_0 & 0 & f_0 \\ g_0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
M_{25}^0 &= \begin{pmatrix} 0 & b_0 & c_0 \\ d_0 & 0 & f_0 \\ g_0 & h_0 & 0 \end{pmatrix}, & M_{26}^0 &= \begin{pmatrix} a_0 & 0 & c_0 \\ d_0 & 0 & f_0 \\ g_0 & 0 & i_0 \end{pmatrix}, & M_{27}^0 &= \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 \\ d_0 & 0 & f_0 \\ 0 & h_0 & i_0 \end{pmatrix}, \\
M_{28}^0 &= \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g_0 & h_0 & i_0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{9}$$

これらの $M_1^0, M_2^0, \dots, M_{28}^0$ を M_i^0 と書くと、ディラック型のフレーバー質量行列は

$$M = M_i^{\text{magic}} + M_i^0, \quad (i = 1, 2, \dots, 24), \tag{10}$$

と書ける。ここで、 $i = 1 - 24$ の場合の M_i^{magic} と M_i^0 の要素は以下の通りである。

$$M_1^{\text{magic}} : \alpha = a + b - 2e, \quad \beta = -a + e, \quad \gamma = e, \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
M_1^0 : c_0 &= a + b + c - 3e, \quad d_0 = 2a + b + d - 4e, \quad f_0 = -2a - b + 2e + f, \\
g_0 &= -a - b + e + g, \quad h_0 = b - 2e + h, \quad i_0 = a - 2e + i,
\end{aligned}$$

$$M_2^{\text{magic}} : \alpha = -c + e, \quad \beta = -a + e, \quad \gamma = e, \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
M_2^0 : b_0 &= a + b + c - 3e, \quad d_0 = a - c + d - e, \quad f_0 = -a + c - e + f, \\
g_0 &= c - 2e + g, \quad h_0 = -a - c + e + h, \quad i_0 = a - 2e + i,
\end{aligned}$$

$$M_3^{\text{magic}} : \alpha = -a - d + 2e, \quad \beta = -a + e, \quad \gamma = e, \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
M_3^0 : b_0 &= 2a + b + d - 4e, \quad c_0 = -a + c - d + e, \quad f_0 = d - 2e + f, \\
g_0 &= a + d - 3e + g, \quad h_0 = -2a - d + 2e + h, \quad i_0 = a - 2e + i,
\end{aligned}$$

$$M_4^{\text{magic}} : \alpha = -a + f, \quad \beta = -a + e, \quad \gamma = e, \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
M_4^0 : b_0 &= 2a + b - 2e - f, \quad c_0 = -a + c - e + f, \quad d_0 = d - 2e + f, \\
g_0 &= a - e - f + g, \quad h_0 = -2a + f + h, \quad i_0 = a - 2e + i,
\end{aligned}$$

$$M_5^{\text{magic}} : \alpha = -e + g, \quad \beta = -a + e, \quad \gamma = e, \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
M_5^0 : b_0 &= a + b - e - g, \quad c_0 = c - 2e + g, \quad d_0 = a + d - 3e + g, \\
f_0 &= -a + e + f - g, \quad h_0 = -a - e + g + h, \quad i_0 = a - 2e + i,
\end{aligned}$$

$$M_6^{\text{magic}} : \alpha = a - h, \quad \beta = -a + e, \quad \gamma = e, \quad (16)$$

$$M_6^0 : b_0 = b - 2e + h, \quad c_0 = a + c - e - h, \quad d_0 = 2a + d - 2e - h, \\ f_0 = -2a + f + h, \quad g_0 = -a - e + g + h, \quad i_0 = a - 2e + i,$$

$$M_7^{\text{magic}} : \alpha = -c + e, \quad \beta = b + c - 2e, \quad \gamma = e, \quad (17)$$

$$M_7^0 : a_0 = a + b + c - 3e, \quad d_0 = -b - 2c + d + 2e, \quad f_0 = b + 2c - 4e + f, \\ g_0 = c - 2e + g, \quad h_0 = b - 2e + h, \quad i_0 = -b - c + e + i,$$

$$M_8^{\text{magic}} : \alpha = \frac{1}{2}(b - d), \quad \beta = \frac{1}{2}(b + d - 2e), \quad \gamma = e, \quad (18)$$

$$M_8^0 : a_0 = \frac{1}{2}(2a + b + d - 4e), \quad c_0 = \frac{1}{2}(b + 2c - d - 2e), \quad f_0 = d - 2e + f, \\ g_0 = \frac{1}{2}(-b + d - 2e + 2g), \quad h_0 = b - 2e + h, \quad i_0 = \frac{1}{2}(-b - d + 2i),$$

$$M_9^{\text{magic}} : \alpha = \frac{1}{2}(b - 2e + f), \quad \beta = \frac{1}{2}(b - f), \quad \gamma = e, \quad (19)$$

$$M_9^0 : a_0 = \frac{1}{2}(2a + b - 2e - f), \quad c_0 = \frac{1}{2}(b + 2c - 4e + f), \quad d_0 = d - 2e + f, \\ g_0 = \frac{1}{2}(-b - f + 2g), \quad h_0 = b - 2e + h, \quad i_0 = \frac{1}{2}(-b - 2e + f + 2i),$$

$$M_{10}^{\text{magic}} : \alpha = -e + g, \quad \beta = b - g, \quad \gamma = e, \quad (20)$$

$$M_{10}^0 : a_0 = a + b - e - g, \quad c_0 = c - 2e + g, \quad d_0 = -b + d - 2e + 2g, \\ f_0 = b + f - 2g, \quad h_0 = b - 2e + h, \quad i_0 = -b - e + g + i,$$

$$M_{11}^{\text{magic}} : \alpha = b - i, \quad \beta = -e + i, \quad \gamma = e, \quad (21)$$

$$M_{11}^0 : a_0 = a - 2e + i, \quad c_0 = b + c - e - i, \quad d_0 = b + d - 2i, \\ f_0 = -b - 2e + f + 2i, \quad g_0 = -b - e + g + i, \quad h_0 = b - 2e + h,$$

$$M_{12}^{\text{magic}} : \alpha = -c + e, \quad \beta = -c + d, \quad \gamma = e, \quad (22)$$

$$M_{12}^0 : a_0 = a - c + d - e, \quad b_0 = b + 2c - d - 2e, \quad f_0 = d - 2e + f, \\ g_0 = c - 2e + g, \quad h_0 = -2c + d + h, \quad i_0 = c - d - e + i,$$

$$M_{13}^{\text{magic}} : \alpha = -c + e, \quad \beta = -c + 2e - f, \quad \gamma = e, \quad (23)$$

$$M_{13}^0 : a_0 = a - c + e - f, \quad b_0 = b + 2c - 4e + f, \quad d_0 = d - 2e + f, \\ g_0 = c - 2e + g, \quad h_0 = -2c + 2e - f + h, \quad i_0 = c - 3e + f + i,$$

$$M_{14}^{\text{magic}} : \alpha = -c + e, \quad \beta = c - h, \quad \gamma = e, \quad (24)$$

$$M_{14}^0 : a_0 = a + c - e - h, \quad b_0 = b - 2e + h, \quad d_0 = -2c + d + h, \\ f_0 = 2c - 2e + f - h, \quad g_0 = c - 2e + g, \quad i_0 = -c - e + h + i,$$

$$M_{15}^{\text{magic}} : \alpha = -c + e, \quad \beta = -e + i, \quad \gamma = e, \quad (25)$$

最単純ディラックニュートリノ質量行列の魔方陣と3ゼロテクスチャーによる分解

$$M_{15}^0 : a_0 = a - 2e + i, \quad b_0 = b + c - e - i, \quad d_0 = -c + d + e - i, \\ f_0 = c - 3e + f + i, \quad g_0 = c - 2e + g, \quad h_0 = -c - e + h + i,$$

$$M_{16}^{\text{magic}} : \alpha = -e + g, \quad \beta = d - 2e + g, \quad \gamma = e, \quad (26)$$

$$M_{16}^0 : a_0 = a + d - 3e + g, \quad b_0 = b - d + 2e - 2g, \quad c_0 = c - 2e + g, \\ f_0 = d - 2e + f, \quad h_0 = d - 4e + 2g + h, \quad i_0 = -d + e - g + i,$$

$$M_{17}^{\text{magic}} : \alpha = \frac{1}{2}(-d + 2e - h), \quad \beta = \frac{1}{2}(d - h), \quad \gamma = e, \quad (27)$$

$$M_{17}^0 : a_0 = \frac{1}{2}(2a + d - 2e - h), \quad b_0 = b - 2e + h, \quad c_0 = \frac{1}{2}(2c - d - h), \\ f_0 = d - 2e + f, \quad g_0 = \frac{1}{2}(d - 4e + 2g + h), \quad i_0 = \frac{1}{2}(-d - 2e + h + 2i),$$

$$M_{18}^{\text{magic}} : \alpha = -d + i, \quad \beta = -e + i, \quad \gamma = e, \quad (28)$$

$$M_{18}^0 : a_0 = a - 2e + i, \quad b_0 = b + d - 2i, \quad c_0 = c - d - e + i, \\ f_0 = d - 2e + f, \quad g_0 = d - e + g - i, \quad h_0 = -d - 2e + h + 2i,$$

$$M_{19}^{\text{magic}} : \alpha = -e + g, \quad \beta = -f + g, \quad \gamma = e, \quad (29)$$

$$M_{19}^0 : a_0 = a - e - f + g, \quad b_0 = b + f - 2g, \quad c_0 = c - 2e + g, \\ d_0 = d - 2e + f, \quad h_0 = -2e - f + 2g + h, \quad i_0 = -e + f - g + i,$$

$$M_{20}^{\text{magic}} : \alpha = \frac{1}{2}(f - h), \quad \beta = \frac{1}{2}(2e - f - h), \quad \gamma = e, \quad (30)$$

$$M_{20}^0 : a_0 = \frac{1}{2}(2a - f - h), \quad b_0 = b - 2e + h, \quad c_0 = \frac{1}{2}(2c - 2e + f - h), \\ d_0 = d - 2e + f, \quad g_0 = \frac{1}{2}(-2e - f + 2g + h), \quad i_0 = \frac{1}{2}(-4e + f + h + 2i),$$

$$M_{21}^{\text{magic}} : \alpha = -2e + f + i, \quad \beta = -e + i, \quad \gamma = e, \quad (31)$$

$$M_{21}^0 : a_0 = a - 2e + i, \quad b_0 = b + 2e - f - 2i, \quad c_0 = c - 3e + f + i, \\ d_0 = d - 2e + f, \quad g_0 = e - f + g - i, \quad h_0 = -4e + f + h + 2i,$$

$$M_{22}^{\text{magic}} : \alpha = -e + g, \quad \beta = 2e - g - h, \quad \gamma = e, \quad (32)$$

$$M_{22}^0 : a_0 = a + e - g - h, \quad b_0 = b - 2e + h, \quad c_0 = c - 2e + g, \\ d_0 = d - 4e + 2g + h, \quad f_0 = 2e + f - 2g - h, \quad i_0 = -3e + g + h + i,$$

$$M_{23}^{\text{magic}} : \alpha = -e + g, \quad \beta = -e + i, \quad \gamma = e, \quad (33)$$

$$M_{23}^0 : a_0 = a - 2e + i, \quad b_0 = b + e - g - i, \quad c_0 = c - 2e + g, \\ d_0 = d - e + g - i, \quad f_0 = -e + f - g + i, \quad h_0 = -3e + g + h + i,$$

$$M_{24}^{\text{magic}} : \alpha = 2e - h - i, \quad \beta = -e + i, \quad \gamma = e, \quad (34)$$

$$M_{24}^0 : a_0 = a - 2e + i, \quad b_0 = b - 2e + h, \quad c_0 = c + e - h - i,$$

$$d_0 = d + 2e - h - 2i, \quad f_0 = -4e + f + h + 2i, \quad g_0 = -3e + g + h + i.$$

$i = 25, 26, 27, 28$ の場合の 4 つの行列 $M_{25}^0, M_{26}^0, M_{27}^0, M_{28}^0$ が持つランクでは M の要素 $\{a, b, c, \dots, i\}$ を用いて M^{magic} の要素 $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ と M^0 の要素 $\{a_0, b_0, \dots, i_0\}$ を一意に決定できない。このため、本研究では 24 通りの 3 ゼロテクスチャー ($M_1^0, M_2^0, \dots, M_{24}^0$) のみを考える。

3 実験結果との比較

24 通りの 3 ゼロテクスチャーの中で、魔方陣と最も相性がよいものはどれだろうか？ $M = M_i^{\text{magic}}$ を満たすディラック質量行列が魔方陣と最も相性が良い（魔方陣そのものである）ことを考えて、

$$\epsilon_i = \frac{1}{9} \sum_{\ell, m=1,2,3} \frac{|(M_i^{\text{magic}})_{\ell m}| - |(M_i^0)_{\ell m}|}{|(M_i^{\text{magic}})_{\ell m}| + |(M_i^0)_{\ell m}|}, \quad (35)$$

を定義しよう。ディラック質量行列が魔方陣そのものである場合は

$$\epsilon_i = \frac{1}{9} \sum_{\ell, m=1,2,3} \frac{|(M_i^{\text{magic}})_{\ell m}| - 0}{|(M_i^{\text{magic}})_{\ell m}| + 0} = 1, \quad (36)$$

となる。 ϵ_i が 1 からずれる原因は 3 ゼロテクスチャーから生じる。従って、 ϵ_i が 1 に近くなる 3 ゼロテクスチャーほど、魔方陣と相性が良いと判断する。例えば、 $\epsilon_i = 0.6$ の場合は $\epsilon_i = 0.3$ の場合よりも好ましい。

ニュートリノパラメータの観測値には幅があるため、 ϵ_i にも幅がでる。本研究では 3σ の範囲のニュートリノパラメータを用いて ϵ_i を計算し、その最大値 ϵ_i^{max} が 1 に近いほど、その ϵ_i に対応した 3 ゼロテクスチャーは魔方陣の文脈で好ましいと判断する。

最も単純なディラック型のフレーバー質量行列は 7 つのパラメータの組み合わせで求まる $\{m_1, m_2, m_3, \theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}, \delta_{\text{CP}}\}$ [91].

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{e1}m_1 & U_{e2}m_2 & U_{e3}m_3 \\ U_{\mu1}m_1 & U_{\mu2}m_2 & U_{\mu3}m_3 \\ U_{\tau1}m_1 & U_{\tau2}m_2 & U_{\tau3}m_3 \end{pmatrix}, \quad (37)$$

ここで m_1, m_2, m_3 はニュートリノ質量固有値、 $\theta_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$ は混合角、 δ_{CP} はディラック CP 位相である。また、

$$U_{e1} = c_{12}c_{13}, \quad U_{e2} = s_{12}c_{13}, \quad U_{e3} = s_{13}e^{-i\delta_{\text{CP}}}, \quad (38)$$

$$U_{\mu1} = -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{\text{CP}}},$$

$$U_{\mu2} = c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{\text{CP}}}, \quad U_{\mu3} = s_{23}c_{13},$$

$$U_{\tau1} = s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{\text{CP}}},$$

$$U_{\tau2} = -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{\text{CP}}}, \quad U_{\tau3} = c_{23}c_{13},$$

はポンテコルボ-牧-中川-坂田行列の成分である [92-95]。ここで $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ と $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$) とした。なお、本研究では荷電レプトンの質量行列が対角かつ実数であると仮定している。

ニュートリノの質量順序 [96, 97] がいわゆる正質量順序 $m_1 < m_2 < m_3$ (NO) の場合に、ニュートリノ

ノ振動実験から得られている質量2乗差 $\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$ と混合角の測定値は以下の通りである [98]:

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta m_{21}^2}{10^{-5}\text{eV}^2} &= 7.42_{-0.20}^{+0.21} \quad (6.82 \rightarrow 8.04), \\
 \frac{\Delta m_{31}^2}{10^{-3}\text{eV}^2} &= 2.510_{-0.027}^{+0.027} \quad (2.430 \rightarrow 2.593), \\
 \theta_{12}/^\circ &= 33.45_{-0.75}^{+0.77} \quad (31.27 \rightarrow 35.87), \\
 \theta_{23}/^\circ &= 42.1_{-0.9}^{+1.1} \quad (39.7 \rightarrow 50.9), \\
 \theta_{13}/^\circ &= 8.62_{-0.12}^{+0.12} \quad (8.25 \rightarrow 8.98), \\
 \delta_{\text{CP}}/^\circ &= 230_{-25}^{+36} \quad (144 \rightarrow 350).
 \end{aligned} \tag{39}$$

ここで \pm は 1σ の範囲の値であり, カッコ内は 3σ の範囲の値である. いわゆる逆質量順序 (IO) $m_3 < m_1 < m_2$ の場合は

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta m_{21}^2}{10^{-5}\text{eV}^2} &= 7.42_{-0.20}^{+0.21} \quad (6.82 \rightarrow 8.04), \\
 \frac{\Delta m_{32}^2}{10^{-3}\text{eV}^2} &= -2.490_{-0.028}^{+0.026} \quad (-2.574 \rightarrow -2.410), \\
 \theta_{12}/^\circ &= 33.45_{-0.75}^{+0.78} \quad (31.27 \rightarrow 35.87), \\
 \theta_{23}/^\circ &= 49.0_{-1.3}^{+0.9} \quad (39.8 \rightarrow 51.6), \\
 \theta_{13}/^\circ &= 8.61_{-0.12}^{+0.14} \quad (8.24 \rightarrow 9.02), \\
 \delta_{\text{CP}}/^\circ &= 278_{-30}^{+22} \quad (194 \rightarrow 345),
 \end{aligned} \tag{40}$$

である. また, 宇宙マイクロ波背景放射の観測 [99, 100] からは, ニュートリノの質量和に対して

$$\sum m_i < 0.12 \text{ eV}, \tag{41}$$

という制限が課せられる. ニュートリノの質量順序が NO だとして, 式 (39) の 3σ の範囲と式 (41) を満たすパラメータセット $\{m_1, m_2, m_3, \theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}, \delta_{\text{CP}}\}$ をランダムに 10^7 生成した. 同様に, IO の場合として, 式 (40) の 3σ の範囲と式 (41) を満たすパラメータセットをランダムに 10^7 生成した. これらのパラメータセットを用いて, ϵ_i^{max} を評価した結果を表 1 に示す.

まず, NO の場合に注目する. 表 1 に示したとおり, ϵ_i^{max} が最も 1 に近い 3 ゼロテクスチャーは次の 5 つである.

$$\begin{aligned}
 M_{12}^0 &= \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & f_0 \\ g_0 & h_0 & i_0 \end{pmatrix}, \quad M_{13}^0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 \\ d_0 & 0 & 0 \\ g_0 & h_0 & i_0 \end{pmatrix}, \quad M_{14}^0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 \\ d_0 & 0 & f_0 \\ g_0 & 0 & i_0 \end{pmatrix}, \\
 M_{17}^0 &= \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ 0 & 0 & f_0 \\ g_0 & 0 & i_0 \end{pmatrix}, \quad M_{20}^0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ d_0 & 0 & 0 \\ g_0 & 0 & i_0 \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{42}$$

ここで, $M_{12}^0, M_{13}^0, M_{14}^0, M_{17}^0, M_{20}^0$ の各要素 a_0, b_0, \dots, i_0 が摂動とみなせるかを調べるために,

$$\delta a_{0,ij} = \frac{|a_0|}{|(M_{ij}^{\text{magic}})_{11}|}, \quad \delta b_{0,ij} = \frac{|a_0|}{|(M_{ij}^{\text{magic}})_{12}|}, \quad \dots, \quad \delta i_{0,ij} = \frac{|a_0|}{|(M_{ij}^{\text{magic}})_{33}|} \tag{43}$$

を定義し, $\delta a_{0,ij}, \delta b_{0,ij}, \dots, \delta i_{0,ij}$ の数値計算結果を表 2 に示した. 表 2 より, 5 つ全ての行列で 3 つ

表 1 ϵ_i と ϵ_i^{\max} と, その時のニュートリノパラメータ.

NO/IO	M_i^0	ϵ_i^{\max}	m_1/eV	m_2/eV	m_3/eV	$\theta_{12}/^\circ$	$\theta_{23}/^\circ$	$\theta_{13}/^\circ$	$\delta_{CP}/^\circ$
NO	M_{12}^0	0.64	0.019	0.021	0.053	35.9	40.5	8.7	179.9
	M_{13}^0	0.64	0.019	0.021	0.053	35.7	41.1	8.8	179.3
	M_{14}^0	0.64	0.019	0.021	0.053	35.9	40.5	8.7	179.9
	M_{17}^0	0.64	0.019	0.021	0.053	35.9	40.5	8.7	179.9
	M_{20}^0	0.64	0.019	0.021	0.053	35.7	41.1	8.8	179.3
	M_2^0	0.59	0.015	0.017	0.052	35.3	39.8	9.0	179.7
	M_6^0	0.59	0.015	0.017	0.052	35.3	39.8	9.0	179.7
	M_4^0	0.59	0.016	0.018	0.053	35.7	39.9	8.9	178.4
	M_3^0	0.51	0.017	0.019	0.052	35.8	39.7	8.8	181.5
	M_{18}^0	0.45	0.018	0.020	0.054	35.4	39.7	8.8	178.3
	M_{21}^0	0.45	0.018	0.020	0.053	35.0	39.9	8.9	180.0
	M_7^0	0.43	0.030	0.031	0.058	35.8	50.7	8.4	282.4
	M_{22}^0	0.42	0.018	0.020	0.054	35.7	50.9	8.9	348.9
	M_{23}^0	0.42	0.018	0.020	0.054	35.7	50.9	8.9	348.9
	M_{24}^0	0.41	0.018	0.020	0.054	35.1	50.7	8.9	349.9
	M_{16}^0	0.41	0.030	0.031	0.058	31.3	49.6	8.9	348.9
	M_{19}^0	0.41	0.030	0.031	0.058	31.3	49.6	8.9	348.9
	M_8^0	0.40	0.030	0.032	0.058	31.6	50.6	8.3	282.3
	M_9^0	0.40	0.030	0.032	0.058	31.4	50.3	8.4	283.0
	M_1^0	0.38	0.030	0.031	0.058	35.4	50.9	8.9	294.3
M_{15}^0	0.38	0.019	0.021	0.053	35.8	50.8	8.9	348.8	
M_5^0	0.33	0.000	0.009	0.051	34.7	41.0	8.9	349.8	
M_{10}^0	0.31	0.030	0.032	0.058	32.1	39.8	9.0	183.0	
M_{11}^0	0.29	0.000	0.008	0.050	31.6	39.9	8.8	346.1	
IO	M_{15}^0	0.60	0.049	0.050	0.005	31.4	51.5	8.3	344.8
	M_7^0	0.57	0.049	0.050	0.006	32.2	51.4	8.4	344.8
	M_{11}^0	0.54	0.049	0.050	0.006	31.7	51.4	8.3	344.7
	M_2^0	0.53	0.050	0.051	0.009	31.3	51.6	8.3	344.3
	M_{12}^0	0.53	0.050	0.050	0.004	31.4	51.2	8.3	344.9
	M_{18}^0	0.51	0.050	0.050	0.004	31.4	51.3	8.3	344.9
	M_8^0	0.50	0.051	0.052	0.012	31.8	51.6	8.6	194.5
	M_{24}^0	0.50	0.051	0.052	0.017	35.8	46.3	8.8	344.9
	M_3^0	0.50	0.052	0.052	0.013	31.5	51.5	8.2	255.0
	M_6^0	0.48	0.051	0.052	0.016	35.7	45.4	8.4	344.7
	M_{17}^0	0.47	0.051	0.052	0.016	35.8	40.1	8.9	197.0
	M_1^0	0.45	0.050	0.051	0.010	32.4	51.5	8.4	345.0
	M_9^0	0.42	0.051	0.052	0.017	32.2	39.9	8.5	195.9
	M_{10}^0	0.41	0.051	0.052	0.016	31.4	40.3	8.7	194.3
	M_{13}^0	0.40	0.050	0.051	0.009	35.8	51.4	8.4	344.4
	M_{19}^0	0.40	0.051	0.052	0.016	31.3	39.8	8.3	199.4
	M_{14}^0	0.39	0.051	0.052	0.017	35.6	47.7	8.3	344.8
	M_5^0	0.37	0.051	0.052	0.017	32.9	39.9	9.0	195.1
	M_{20}^0	0.36	0.051	0.052	0.017	32.6	47.9	8.7	344.8
	M_{21}^0	0.33	0.049	0.049	0.000	31.3	51.6	8.9	342.5
M_{16}^0	0.33	0.048	0.049	0.000	31.3	39.9	8.5	338.5	
M_{23}^0	0.32	0.051	0.052	0.017	31.3	40.8	9.0	344.9	
M_{22}^0	0.31	0.051	0.052	0.016	35.3	39.9	9.0	344.3	
M_4^0	0.27	0.051	0.051	0.011	31.3	50.3	8.3	344.9	

表 2 NO の場合に魔方陣の文脈から好ましい $M_{12}^0, M_{13}^0, M_{14}^0, M_{17}^0, M_{20}^0$ の各要素が, どれだけ摂動とみなせるか. 値が小さいほど摂動と見なす.

	M_{12}^0	M_{13}^0	M_{14}^0	M_{17}^0	M_{20}^0
$\delta a_{0,ij}$	0.18	0.18	0.19	0.17	0.18
$\delta b_{0,ij}$	0.68	0.69	0.68	0.68	0.69
$\delta c_{0,ij}$	0.00	0.00	0.00	0.012	0.007
$\delta d_{0,ij}$	0.00	0.001	0.01	0.00	0.001
$\delta e_{0,ij}$	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
$\delta f_{0,ij}$	0.003	0.00	0.005	0.002	0.00
$\delta g_{0,ij}$	0.76	0.77	0.76	0.76	0.77
$\delta h_{0,ij}$	0.007	0.012	0.00	0.00	0.00
$\delta i_{0,ij}$	1.72	1.72	1.73	1.76	1.72

の摂動項が魔方陣を 68%, 76%, 172% 程度破っていることがわかる. そもそもディラック質量行列が完全な魔方陣に従っていることは期待できないため, 3ゼロテクスチャーが魔方陣をある程度大きく破ることは避けられない. このため, 少しでも魔方陣の文脈で好ましい3ゼロテクスチャーがどれなのかに注目する.

次に IO の場合を見てみよう. 表 1 より, 魔方陣の文脈の中で最も好ましい3ゼロテクスチャーの候補は

$$M_{15}^0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 \\ d_0 & 0 & f_0 \\ g_0 & h_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (44)$$

である. しかしながら,

$$\begin{aligned} \delta a_{0,15} &= 0.08, & \delta b_{0,15} &= 0.02, & \delta d_{0,15} &= 0.10, \\ \delta f_{0,15} &= 0.95, & \delta g_{0,15} &= 0.65, & \delta h_{0,15} &= 2.65, \end{aligned} \quad (45)$$

となって, NO の時と同様に3つの成分が魔方陣を大きく破るが, その破れの大きさは 95%(f_0), 65%(g_0), 265%(i_0) となり NO の時と比べて大きい. このことから, 魔方陣の文脈では NO の場合の方が IO の場合よりも好ましいと言える. 以後, NO の場合にのみ着目する.

魔方陣の文脈として好ましい M_{12}^0 の場合の, ϵ_{12} とニュートリノパラメータ $m_1, m_2, m_3, \theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}, \delta_{\text{CP}}$ の関係を図 1 に示す (残りの4つの好ましい行列でも同様の結論を得た). 比較のために, 魔方陣の文脈として最も好ましくない M_{11}^0 の場合も図 1 に示した. 図 1 から次のことが読み取れる.

- 魔方陣の文脈で好ましい行列の場合, 質量 m_1, m_2 とディラック CP 位相 δ_{CP} は ϵ_{12} とに相関が見られる.
- 魔方陣の文脈で好ましくない行列の場合, ϵ_{11} と相関が見られるのは m_1, m_2 のみである.

ディラック CP 位相 δ_{CP} の正確な測定が実験グループによって進んでいるが, T2K 実験と NOvA 実験での食い違いが話題になっている [101, 102]. NO の場合, NOvA グループはベストフィット値を

$$\delta_{\text{CP}} \sim 145^\circ, \quad (46)$$

と報告しているが, T2K グループはベストフィット値を

$$\delta_{\text{CP}} \sim 250^\circ, \quad (47)$$

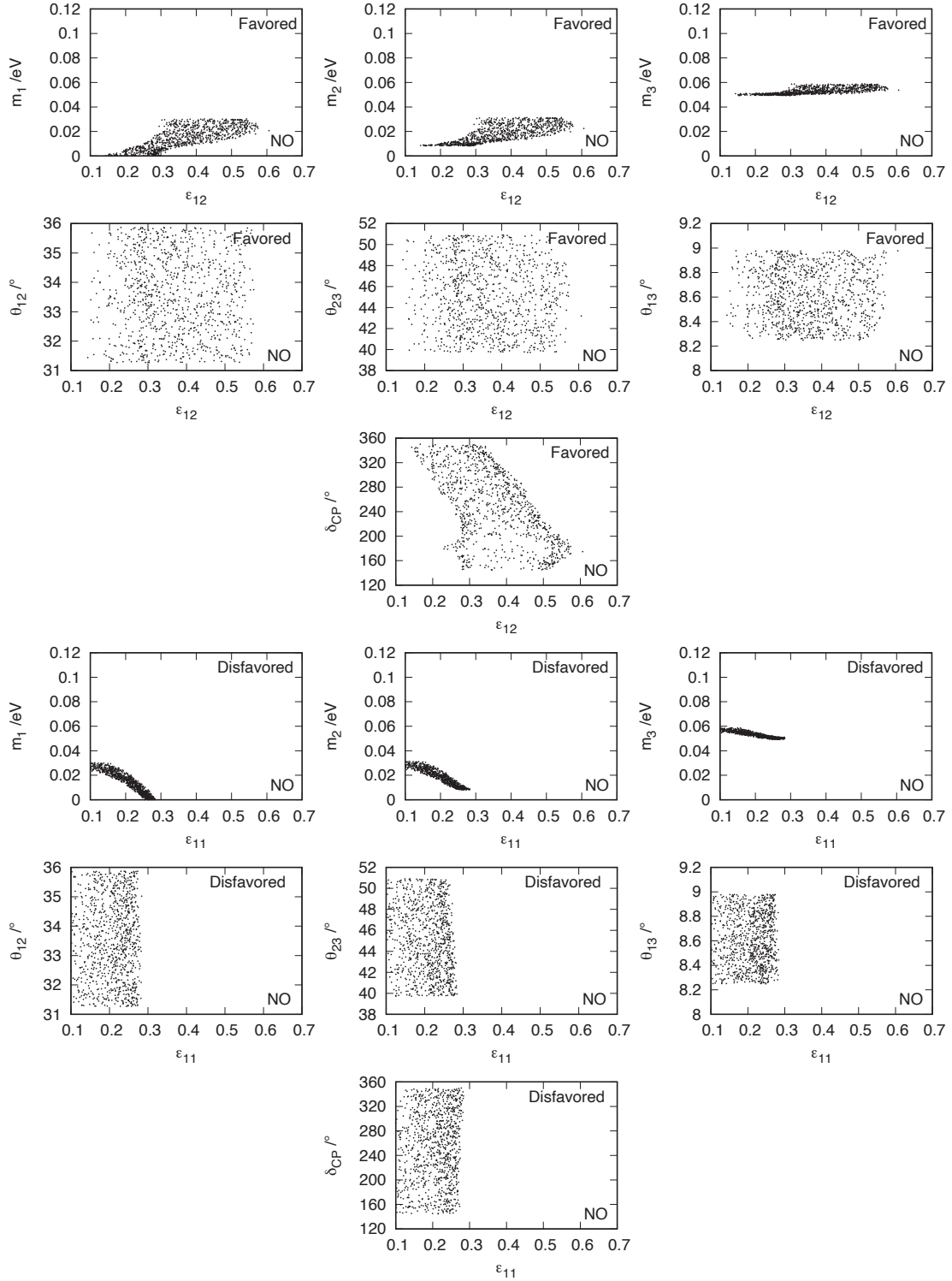


図1 NO の場合の ϵ_i とニュートリノパラメータ $m_i, \theta_{ij}, \delta_{\text{CP}}$ の関係. 上の7つのパネルは ϵ_{12} (最も好ましい M_{12}^0) の場合. 下の7つのパネルは ϵ_{11} (最も好ましくない M_{11}^0) の場合.

と報告している. これに対して, 本研究では最も好ましい場合のディラック CP 位相 δ_{CP} は

$$\delta_{\text{CP}} \sim 180^\circ, \quad (48)$$

と得られた. この値は NOvA または T2K が支持するベストフィット値のほぼ中間値であるが, NOvA

と T2K の 90% C.L. からは棄却されてはいない。

4 まとめ

本研究では、右巻ニュートリノの混合角を無視した時に得られる最も簡単なディラック型のニュートリノフレーバー質量行列を $M = M' + M^0$ と分解したとき、 M' が魔方陣に従う場合に M^0 が3つの0要素を持つ3ゼロテクスチャーとなることを示した。そして、実験と比較が可能な3ゼロテクスチャーは24パターンあるが、そのなかで魔方陣と最も相性の良い3ゼロテクスチャーはニュートリノが正質量順序になるときに得られることがわかった。ニュートリノの質量順序が正質量順序なのか逆質量順序であるかは明らかになっていないが、将来のニュートリノ実験において正質量順序であることが確定すれば、本研究で示したディラック型のニュートリノフレーバー質量行列の魔方陣と3ゼロテクスチャーによる分解の有効性が高まると期待できる。一方で、ニュートリノの質量が逆質量順序に従っていることが明らかになった場合には、本研究で示した質量行列の分解法は完全に棄却されるか大幅な修正を求められることになる。ニュートリノの質量順序については2027年実験開始予定のハイパーカミオカンデ[103, 104]などの次世代ニュートリノ実験装置で決定されると期待されている。このため、本研究の有効性は近い将来、実験的にも評価可能になると考えられる。

ここで、本研究で行った質量行列を分解した結果、 M^0 を摂動項と見なしたことについて言及するため、本研究で最も魔方陣の再現性が良いとされた M_{12}^0 について補足する。表1では $\epsilon_{12}^{\max} = 0.64$ が示されているが、図1を見ると極僅かな点のみが0.55を超えているだけで多くの点は0.3–0.4の範囲にあることがわかる。このことから、 M^0 よりむしろ Lucas 行列の方を摂動項とみなす考え方もある。だが、序論でも言及した通り本研究の動機はマヨナラニュートリノの質量行列形として成功している魔方陣型 (Lucas 行列) が、ディラックニュートリノの場合にもどれだけ有効であるかを調べることであったため、本論では魔方陣の文脈を基準として M^0 を摂動項と考えることにした。結果、残念ながら明らかな摂動項としてみなせる行列形を特定することはできなかったが、ニュートリノの質量階層に関する予言を得たことは意味があると考えている。

最後に、右巻きニュートリノの混合効果についてコメントしておきたい。本研究ではディラック型のニュートリノ質量行列の一般形として、Hagedorn と Rodejohann によって提案されている最も単純な形を採用していた[91]。このため、質量行列への右巻きニュートリノの混合効果が無視されていた。右巻きニュートリノの混合を考慮した場合には、本論の結論が修正を受けることが予想される。この右巻きニュートリノの混合効果については、今後の研究テーマとしたい。

参考文献

- [1] P. F. Harrison, D. H. Perkins, and W. G. Scott, Phys. Lett. B **530**, 167 (2002).
- [2] Z. Z. Xing, Phys. Lett. B **533**, 85 (2002).
- [3] P. F. Harrison and W. G. Scott, Phys. Lett. B **535**, 163 (2002).
- [4] T. Kitabayashi, Phys. Rev. D **76**, 033002 (2007).
- [5] T. Fukuyama and H. Nishiura, (1997), arXiv:hep-ph/9702253.
- [6] C. S. Lam, Phys. Lett. B **507**, 214 (2001).
- [7] E. Ma and M. Raidal, Phys. Rev. Lett. **87**, 011802 (2001); Erratum Phys. Rev. Lett. **87**, 159901 (2001).
- [8] K. R. S. Balaji, W. Grimus, and T. Schwetz, Phys. Lett. B **508**, 301 (2001).
- [9] Y. Koide, H. Nishiura, K. Matsuda, T. Kikuchi, and T. Fukuyama, Phys. Rev. D **66**, 093006 (2002).
- [10] T. Kitabayashi and M. Yasue, Phys. Rev. D **67**, 015006 (2003).

- [11] Y. Koide, *Phys. Rev. D* **69**, 093001 (2004).
- [12] I. Aizawa, M. Ishiguro, T. Kitabayashi, and M. Yasue, *Phys. Rev. D* **70**, 015011 (2004).
- [13] A. Ghosal, *Mod. Phys. Lett. A* **19**, 2579 (2004).
- [14] R. N. Mohapatra and W. Rodejohann, *Phys. Rev. D* **72**, 053001 (2005).
- [15] Y. Koide, *Phys. Lett. B* **607**, 123 (2005).
- [16] T. Kitabayashi and M. Yasue, *Phys. Lett. B* **621**, 133 (2005).
- [17] N. Haba and W. Rodejohann, *Phys. Rev. D* **74**, 017701 (2006).
- [18] Z. Z. Xing, H. Zhang, and S. Zhou, *Phys. Lett. B* **641**, 189 (2006).
- [19] Y. H. Ahn, S. K. Kang, C. S. Kim, and J. Lee, *Phys. Rev. D* **73**, 093005 (2006).
- [20] A. S. Joshipura, *Eur. Phys. J. C* **53**, 77 (2008).
- [21] J. C. Gomez-Izquierdo and A. Perez-Lorenzana, *Phys. Rev. D* **82**, 033008 (2010).
- [22] H. J. He and F. R. Yin, *Phys. Rev. D* **84**, 033009 (2011).
- [23] H. J. He and X. J. Xu, *Phys. Rev. D* **86**, 111301 (2012).
- [24] J. C. Gomez-Izquierdo, *Eur. Phys. J. C* **77**, 551 (2017).
- [25] T. Fukuyama, *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2017**, 033B11 (2017).
- [26] T. Kitabayashi, *Int. J. Mod. Phys. A* **31**, 09 (2016).
- [27] T. Kitabayashi, and M. Yasuè, *Phys. Rev. D* **94**, 075020 (2016).
- [28] H. C. Bao, X. Y. Zhao, and Z. H. Zhao, *arXiv:2104.05394*.
- [29] G. Altarelli and F. Feruglio, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 2701 (2010).
- [30] M. S. Berger and K. Siyeon, *Phys. Rev. D* **64**, 053006 (2001).
- [31] P. H. Frampton, S. L. Glashow, and D. Marfatia, *Phys. Lett. B* **536**, 79 (2002).
- [32] Z. Z. Xing, *Phys. Lett. B* **530**, 159 (2002).
- [33] Z. Z. Xing, *Phys. Lett. B* **539**, 85 (2002).
- [34] A. Kageyama, S. Kaneko, N. Shimoyana, and M. Tanimoto, *Phys. Lett. B* **538**, 96 (2002).
- [35] Z. Z. Xing, *Phys. Rev. D* **69**, 013006 (2004).
- [36] W. Grimus, A. S. Joshipura, L. Lavoura, and M. Tanimoto, *Eur. Phys. J. C* **36**, 227 (2004).
- [37] C. I. Low, *Phys. Rev. D* **70**, 073013 (2004).
- [38] C. I. Low, *Phys. Rev. D* **71**, 073007 (2005).
- [39] W. Grimus and L. Lavoura, *J. Phys. G* **31**, 693 (2005).
- [40] S. Dev, S. Kumar, S. Verma, and S. Gupta, *Phys. Rev. D* **76**, 013002 (2007).
- [41] Z. Z. Xing and S. Zhou, *Phys. Lett. B* **679**, 249 (2009).
- [42] H. Fritzsch, Z. Z. Xing, and S. Zhou, *J. High Energy Phys.* **09**, 083 (2011).
- [43] S. Kumar, *Phys. Rev. D* **84**, 077301 (2011).
- [44] S. Dev, S. Gupta, and R. R. Gautam, *Phys. Lett. B* **701**, 605 (2011).
- [45] T. Araki, J. Heeck, and J. Kubo, *J. High Energy Phys.* **07**, 083 (2012).
- [46] P. Ludle, S. Morisi, and E. Peinado, *Nucl. Phys. B* **857**, 411 (2012).
- [47] E. Lashin and N. Chamoun, *Phys. Rev. D* **85**, 113011 (2012).
- [48] K. Deepthi, S. Gollu, and R. Mohanta, *Eur. Phys. J. C* **72**, 1888 (2012).
- [49] D. Meloni and G. Blankenburg, *Nucl. Phys. B* **867**, 749 (2013).
- [50] D. Meloni, A. Meroni, and E. Peinado, *Phys. Rev. D* **89**, 053009 (2014).
- [51] S. Dev, R. R. Gautam, L. Singh, and M. Gupta, *Phys. Rev. D* **90**, 013021 (2014).
- [52] R. G. Felipe and H. Serodio, *Nucl. Phys. B* **886**, 75 (2014).
- [53] P. O. Ludl and W. Grimus, *J. High Energy Phys.* **07**, 090 (2014).
- [54] L. M. Cebola, D. E. Costa, and R. G. Felipe, *Phys. Rev. D* **92**, 025005 (2015).
- [55] R. R. Gautam, M. Singh, and M. Gupta, *Phys. Rev. D* **92**, 013006 (2015).
- [56] S. Dev, L. Singh, and D. Raj, *Eur. Phys. J. C* **75**, 394 (2015).
- [57] T. Kitabayashi and M. Yasuè, *Phys. Rev. D* **93**, 053012 (2016).
- [58] S. Zhou, *Chin. Phys. C* **40**, 033102 (2016).

- [59] M. Singh, G. Ahuja and M. Gupta, *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2016**, 123B08 (2016).
- [60] T. Kitabayashi, and M. Yasuè, *Int. J. Mod. Phys. A* **32**, 1750034 (2017).
- [61] T. Kitabayashi, S. Ohkawa and M. Yasuè, *Int. J. Mod. Phys. A* **32**, 1750186 (2017).
- [62] K. Bora, D. Borah and D. Dutta, *Phys. Rev. D* **96**, 075006 (2017).
- [63] D. M. Barreiros, R. G. Felipe and F. R. Joaquim, *Phys. Rev. D* **97**, 115016 (2018).
- [64] T. Kitabayashi, *Phys. Rev. D* **98**, 083001 (2018).
- [65] D. M. Barreiros, R. G. Felipe and F. R. Joaquim, *J. High Energy Phys.* **01**, 223 (2019).
- [66] T. Kitabayashi, *Int. J. Mod. Phys. A* **34**, 1950098 (2019).
- [67] M. Singh, *EPL* **2020**, 11002 (2020).
- [68] D. M. Barreiros, F. R. Joaquim and T. T. Yanagida, arXiv:2003.06332.
- [69] T. Kitabayashi, *Phys. Rev. D* **102**, 075027 (2020).
- [70] F. Capozzi, E. D. Valentino and E. Lisi, A. Marrone, A. Melchiorri and A. Palazzo, *Phys. Rev. D* **101**, 116013 (2020).
- [71] H. Borgohain, D. Bofah, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **48**, 075005 (2021).
- [72] A. Levitin, and M. Levitin, “Algorithmic Puzzles,” Oxford University Press, NewYork (2011).
- [73] L. Sallows, *The Mathematica Intelligencer*, **19**, 53 (1997).
- [74] P. Loly, I. Cameron, W. Trump, and D. Schindel, *Linear Algebra Appl.* **430**, 2659 (2009).
- [75] R. P. Nordgren, *Linear Algebra Appl.* **437**, 2009 (2012).
- [76] R. P. Nordgren, arXiv:2009.03499 (2020).
- [77] R. P. Nordgren, arXiv:2103.04774 (2021).
- [78] L. Borsten, and A. Marrani, *Class. Quantum Grav.* **34**, 235014 (2017).
- [79] P. F. Harrison and W. G. Scott, *Phys. Lett. B* **594**, 324 (2004).
- [80] Y. Hyodo and T. Kitabayashi, *Int. J. Mod. Phys. A* **35**, 2050183 (2020).
- [81] Y. Hyodo and T. Kitabayashi, *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2021**, 123B08 (2021).
- [82] C. S. Lam, *Phys. Lett. B* **640**, 260 (2006).
- [83] R. R. Gautam and S. Kumar, *Phys. Rev. D* **94**, 036004 (2016).
- [84] M. J. S. Yang, *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2022**, 013B12 (2022).
- [85] K. S. Channey and S. Kumar, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **46**, 015001 (2019).
- [86] S. Verma and M. Kashav, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **47**, 085003 (2020).
- [87] P. Minkowski, *Phys. Lett. B* **67**, 421 (1997).
- [88] T. Yanagida, *Proc. Workshop Unified Theory and Baryon Number in the Universe*, p. 95 (1979).
- [89] M. Gell-Mann, P. Ramond, and R. Slansky, in *Supergravity*, eds. P. van Nieuwenhuizen and D. Z. Freedmann (North-Holland, Amsterdam, 1979), p. 315.
- [90] S. L. Glashow, in *Proceedings of the 1979 Cargèse Summer Institute on Quarks and Leptons*, eds. M. Lèvy, J.-L. Basdevant, D. Speiser, J. Weyers, R. Gastmans, and M. Jacob (Plenum Press, New York, 1980), p. 687.
- [91] C. Hagedron and W. Rodejohann, *J. High Energy Phys.* **07**, 034 (2005).
- [92] B. Pontecorvo, *Sov. Phys. JETP* **6** (1957) 429.
- [93] B. Pontecorvo, *Sov. Phys. JETP* **7** (1958) 172;
- [94] Z. Maki, M. Nakagawa and S. Sakata, *Prog. Theor. Phys.* **28**, 870 (1962).
- [95] P. A. Zyla, et al., (Particle Data Group), *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2020**, 083C01 (2020).
- [96] R. Jimenez, C. P.-Garay, K. Short, F. Simpson, and L. Verde, arXiv:2203.14247v2 (2022).
- [97] S. Gariazzo, M. Gerbino, T. Brinckmann, M. Lattanzi, O. Mena, T. Schwetz, S. R. Choudhury, K. Freese, S. Hannestad, C. A. Ternes, and M. Tórtola, arXiv:2205.02195 (2022).
- [98] I. Esteban, M. C. Gonzalez-Garcia, M. Maltoni, T. Schwetz, and A. Zhou *J. High Energy Phys.* **09**, 178 (2020). See also, NuFIT 5.1 (2021), <http://www.nu-fit.org>.
- [99] S. Vagnozzi, E. Giusarma, O. Mena, K. Freese, M. Gerbino, S. Ho, and M. Lattanzi, *Phys. Rev. D* **96**, 123503 (2017).

- [100] N. Aghanim, et al. (Planck Collaboration), *Astron. Astrophys.* **641**, A6 (2020).
- [101] M. A. Acero, et al. (NOvA Collaboration), arXiv:2108.08219 (2021).
- [102] K. Abe, et al. (T2K Collaboration), *Phys. Rev. D* **103**, 112008 (2021).
- [103] Ritu Devi, Jaydip Singh, Baba Potukuchi, *J. Phys. Conf. Ser.* **2156**, 012153 (2021).
- [104] B. Jamieson, arXiv:hep-ph/2207.05044