

大学初年次における数学教材の提案（その 29） ～行列の指数関数とその応用～

貴田研司^{*1}

A Suggestion on Mathematical Materials for Freshman Education Vol. 29 ～ Exponential Functions of Matrices and Their Applications ～

by

Kenshi KIDA ^{*1}

(received on Nov. 29, 2019 & accepted on Jan. 9, 2020)

あらまし

行列の指数関数の計算手法として、ジョルダンの標準形を用いる方法を紹介する．さらに、その応用として、定数係数 1 階線形連立常微分方程式の解法について述べる．

Abstract

We first explain examples of calculations of exponential functions of matrices by means of diagonalizations and Jordan standard forms. Further, we present methods of solution of systems of ordinary differential linear equations by means of exponential functions of matrices

キーワード : 行列の指数関数, 連立常微分方程式, ジョルダン標準形

Keywords: Exponential Functions of Matrices, System of Ordinary Differential Equations, Jordan Standard Form

1. はじめに

行列の指数関数を用いた定数係数 1 階線形連立常微分方程式の初期値問題の解法¹⁾、そして係数行列の標準化（対角化する、またはジョルダン標準形に直す）による定数係数 1 階線形連立常微分方程式の解法²⁾については既に述べた。

この論文では、行列の指数関数の計算に、対角化をするか、またはジョルダン標準形に直すことが極めて有用であることを、いくつかの具体例を挙げることによって示したい。

さらに、行列の指数関数の定数係数 1 階線形連立常微分方程式の初期値問題の解法への応用について詳述したい。

2. 行列の指数関数

この章では、行列の整級数を定義してから、その性質について述べる¹⁾。

変数 t に関する整級数

$$c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_k t^k + \cdots$$

の各 t を n 次行列 A で置き換えることによって得られる行列

$$c_0 E + c_1 A + c_2 A^2 + \cdots + c_k A^k + \cdots$$

のことを、行列 A の整級数という。この収束と発散については次の結果が知られている。

^{*1} 高輪教養教育センター 准教授

Liberal Arts Education Center, Takanawa Campus, Associate
Professor

定理 2.1 元の変数 t に関する整級数の収束半径を ρ とする. 行列 A の整級数は, A のすべての固有値の絶対値が ρ より小さければ収束する. また, 一つでも固有値の絶対値が ρ を越えれば発散する.

そこで, 指数関数 e^t のマクローリン展開の収束半径が無限大であり

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots + \frac{t^k}{k!} + \cdots \quad (-\infty < t < +\infty)$$

であることを利用して, n 次行列 A の指数関数 $e^A (= \exp A)$ を次の整級数

$$e^A = E + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots + \frac{A^k}{k!} + \cdots \quad (E \text{ は } n \text{ 次単位行列})$$

で定義する. これは上記の定理により, 任意の n 次行列 A に対して収束する.

さらに, 次の性質が成り立つことが知られている.

① 任意の n 次正則行列 P に対して

$$\exp P^{-1}AP = P^{-1}(\exp A)P \text{ すなわち } \exp A = P(\exp P^{-1}AP)P^{-1}$$

② $\det(\exp A) = e^{\operatorname{tr} A}$

③ 実数値行列値関数 $\exp tA$ は解析関数であり, 項別に微分すると

$$\frac{d}{dt}(\exp tA) = A \exp tA$$

が成り立つ.

④ ${}^t(\exp A) = \exp {}^tA$

⑤ $AB = BA$ ならば $\exp(A + B) = \exp A \cdot \exp B$

⑥ $\exp A$ は正則行列で, $(\exp A)^{-1} = \exp(-A)$

3. 行列の指数関数の計算例

例題 3.1

次の行列について, 指数関数 $\exp tA$ を求めよ.

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(解答)

一般に $\exp tA$ を直接計算することは得策ではないので, まずは A を標準化する(対角化する, またはジョルダン標準形に直す)ことにする.

(1) 変換行列として

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

をとると

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

であり

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

と, A は対角化される.

* 上の計算過程については, 付録に記述している.

次に, 第2章の性質①より

$$\exp tA = P(\exp P^{-1}tAP)P^{-1} \dots \dots (*)$$

が成り立つことを利用する.

すると

$$\begin{aligned} \exp(P^{-1}tAP) &= \exp \begin{pmatrix} 2t & 0 & 0 \\ 0 & 2t & 0 \\ 0 & 0 & 3t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t & 0 & 0 \\ 0 & 2t & 0 \\ 0 & 0 & 3t \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} 2t & 0 & 0 \\ 0 & 2t & 0 \\ 0 & 0 & 3t \end{pmatrix}^2 + \dots \dots + \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} 2t & 0 & 0 \\ 0 & 2t & 0 \\ 0 & 0 & 3t \end{pmatrix}^n + \dots \dots \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t & 0 & 0 \\ 0 & 2t & 0 \\ 0 & 0 & 3t \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} (2t)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (2t)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (3t)^2 \end{pmatrix} + \dots + \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} (2t)^n & 0 & 0 \\ 0 & (2t)^n & 0 \\ 0 & 0 & (3t)^n \end{pmatrix} + \dots \\ &= \begin{pmatrix} 1 + 2t + \frac{1}{2!}(2t)^2 + \dots + \frac{1}{n!}(2t)^n + \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 + 2t + \frac{1}{2!}(2t)^2 + \dots + \frac{1}{n!}(2t)^n + \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 + 3t + \frac{1}{2!}(3t)^2 + \dots + \frac{1}{n!}(3t)^n + \dots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であることから, $(*)$ により

$$\begin{aligned} \exp tA &= P \exp(P^{-1}tAP) P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & e^{3t} \\ e^{2t} & e^{2t} & 2e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ e^{2t} - e^{3t} & 2e^{2t} - e^{3t} & -e^{2t} + e^{3t} \\ 2e^{2t} - 2e^{3t} & 2e^{2t} - 2e^{3t} & -e^{2t} + 2e^{3t} \end{pmatrix}$$

であることがわかった.

(2) 変換行列として

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

をとると

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

であり

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

となって, A はジョルダン標準形に直された.

*上の計算過程については, 付録に記述している.

次に, (1)と同様にして

$$\exp tA = P(\exp P^{-1}tAP)P^{-1} \dots \dots (*)$$

が成り立つことを利用する.

まず

$$\exp(P^{-1}tAP) = \exp \begin{pmatrix} 2t & t & 0 & 0 \\ 0 & 2t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4t \end{pmatrix} \dots \dots (**)$$

を求める.

$$\begin{pmatrix} 2t & t & 0 & 0 \\ 0 & 2t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4t \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t & t \\ 0 & 2t \end{pmatrix}^k & 0 & 0 \\ 0 & (3t)^k & 0 \\ 0 & 0 & (4t)^k \end{pmatrix} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n, \dots)$$

であるから

$$\begin{aligned} \exp \begin{pmatrix} 2t & t & 0 & 0 \\ 0 & 2t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t & t \\ 0 & 2t \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & 3t & 0 \\ 0 & 0 & 4t \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t & t \\ 0 & 2t \end{pmatrix}^2 & 0 & 0 \\ 0 & (3t)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (4t)^2 \end{pmatrix} + \dots + \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t & t \\ 0 & 2t \end{pmatrix}^n & 0 & 0 \\ 0 & (3t)^n & 0 \\ 0 & 0 & (4t)^n \end{pmatrix} + \dots \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t & t \\ 0 & 2t \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} 2t & t \\ 0 & 2t \end{pmatrix}^2 + \cdots + \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} 2t & t \\ 0 & 2t \end{pmatrix}^n + \cdots \right) & 0 & 0 \\ 0 & 1 + 3t + \frac{1}{2!} (3t)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} (3t)^n + \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 + 4t + \frac{1}{2!} (4t)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} (4t)^n + \cdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} 2t & t \\ 0 & 2t \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{4t} \end{pmatrix}$$

となっていることがわかる。

さらに, $\begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & 2t \end{pmatrix}$ であるから, 第2章の性質⑤により $\exp \begin{pmatrix} 2t & t \\ 0 & 2t \end{pmatrix}$ を

$$\exp \begin{pmatrix} 2t & t \\ 0 & 2t \end{pmatrix} = \exp \left\{ \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \exp \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & 2t \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdots \cdots \textcircled{7}$$

と変形してから求めればよい。

ここで

$$\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (k = 2, 3, \dots, n, \dots)$$

だから

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots \cdots \textcircled{8}$$

である。

そして

$$\begin{aligned} \exp \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & 2t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & 2t \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & 2t \end{pmatrix}^2 + \cdots + \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & 2t \end{pmatrix}^n + \cdots \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & 2t \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} (2t)^2 & 0 \\ 0 & (2t)^2 \end{pmatrix} + \cdots + \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} (2t)^n & 0 \\ 0 & (2t)^n \end{pmatrix} + \cdots \\ &= \begin{pmatrix} 1 + 2t + \frac{1}{2!} (2t)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} (2t)^n + \cdots & 0 \\ 0 & 1 + 2t + \frac{1}{2!} (2t)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} (2t)^n + \cdots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \cdots \cdots \textcircled{9} \end{aligned}$$

である。

⑦に⑧, ⑨を代入して

$$\exp \begin{pmatrix} 2t & t \\ 0 & 2t \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & 2t \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

が得られた。

以上より, (**) から

$$\exp(P^{-1} tA P) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{4t} \end{pmatrix}$$

であることがわかる.

したがって, (*) により

$$\begin{aligned}
 \exp tA &= P \exp(P^{-1} tA P) P^{-1} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & e^{3t} & e^{4t} \\ e^{2t} & (t+1)e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 2e^{3t} & e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} (-t+1)e^{2t} & (-t+1)e^{2t} - e^{3t} & te^{2t} & (t-1)e^{2t} + e^{3t} \\ -e^{2t} + e^{4t} & -e^{2t} - e^{3t} + 3e^{4t} & e^{2t} - e^{4t} & e^{2t} + e^{3t} - 2e^{4t} \\ -te^{2t} & -te^{2t} & (t+1)e^{2t} & te^{2t} \\ -e^{2t} + e^{4t} & -e^{2t} - 2e^{3t} + 3e^{4t} & e^{2t} - e^{4t} & e^{2t} + 2e^{3t} - 2e^{4t} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

であることがわかった.

(解答終)

4. 定数係数連立常微分方程式の解法

行列の指数関数 $\exp tA$ の応用として, 定数係数 1 階線形連立常微分方程式の初期値問題の解法について述べる.

変数分離形微分方程式

$$x'(t) = ax(t), \quad x(0) = \alpha \quad (a, \alpha \text{ は定数})$$

の解が $x(t) = x(0)e^{at} = \alpha e^{at}$ であることに対応している, 次の定理を適用する.

定理 4.1¹⁾

定数係数 1 階線形連立常微分方程式

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad (\text{ただし, } A \text{ は実数係数の } n \text{ 次行列})$$

を, 初期条件

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

の下で解くと, 解は

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \exp tA \cdot \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{pmatrix} = \exp tA \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

である.

例題 4.1

次の定数係数連立常微分方程式を解け.

$$(1) \quad \begin{cases} x_1' = 2x_1 \\ x_2' = -x_1 + x_2 + x_3 \\ x_3' = -2x_1 - 2x_2 + 4x_3 \end{cases} ; \text{初期条件} \quad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 3 \\ x_3(0) = 5 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x_1' = x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 \\ x_2' = 2x_1 + 7x_2 - 2x_3 - 3x_4 \\ x_3' = -x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \\ x_4' = 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 \end{cases} ; \text{初期条件} \quad \begin{cases} x_1(0) = 2 \\ x_2(0) = 3 \\ x_3(0) = 2 \\ x_4(0) = 4 \end{cases}$$

(解答)

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

とおけば, 微分方程式は

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

と表される.

したがって, 初期条件に対する解は, 定理 4.1 によって

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \exp tA \cdot \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ e^{2t} - e^{3t} & 2e^{2t} - e^{3t} & -e^{2t} + e^{3t} \\ 2e^{2t} - 2e^{3t} & 2e^{2t} - 2e^{3t} & -e^{2t} + 2e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} + e^{3t} \\ 3e^{2t} + 2e^{3t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

とおけば, 微分方程式は

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

と表される．

したがって，初期条件に対する解は，定理 4.1 によって

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \exp tA \cdot \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ x_4(0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-t+1)e^{2t} & (-t+1)e^{2t}-e^{3t} & te^{2t} & (t-1)e^{2t}+e^{3t} \\ -e^{2t}+e^{4t} & -e^{2t}-e^{3t}+3e^{4t} & e^{2t}-e^{4t} & e^{2t}+e^{3t}-2e^{4t} \\ -te^{2t} & -te^{2t} & (t+1)e^{2t} & te^{2t} \\ -e^{2t}+e^{4t} & -e^{2t}-2e^{3t}+3e^{4t} & e^{2t}-e^{4t} & e^{2t}+2e^{3t}-2e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (t+1)e^{2t}+e^{3t} \\ e^{2t}+e^{3t}+e^{4t} \\ (t+2)e^{2t} \\ e^{2t}+2e^{3t}+e^{4t} \end{pmatrix}$$

(解答終)

参考文献

- 1) 貴田研司，“大学初年次における数学教材の提案（その 2）～微分方程式と行列の指数関数～”，東海大学紀要情報通信学部，Vol. 9, No. 1, 2016, pp. 24-30
- 2) 貴田研司，“大学初年次における数学教材の提案（その 8）～ジョルダン標準形と微分方程式～”，東海大学紀要情報通信学部，Vol. 10, No. 1, 2017, pp. 78-91

付録

例（行列の標準化）²⁾

次の行列 A について，対角化可能であるかどうかを調べ，対角化可能ならばある正則行列 P を求めて $P^{-1}AP$ が対角行列になるようにせよ．また，対角化可能でない場合には，変換行列 P を求めて $P^{-1}AP$ がジョルダン標準形 J になるようにせよ．

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(解答)

以下， $\rightarrow$ によって行基本変形を示すものとする．

(1) まず， A の固有方程式は

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ -2 & -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(3-\lambda) = 0$$

なので、 A の固有値は、 $\lambda = 2$ (重複度 2), 3 である.

さて

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より } \text{rank}(A - 2E) = 1 \text{ だから } \dim W(2) = 3 - 1 = 2$$

$$A - 3E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より } \text{rank}(A - 3E) = 2 \text{ だから } \dim W(3) = 3 - 2 = 1$$

であるから、 A は対角化可能であることがわかる.

そこで、固有値 $\lambda = 2$ (重複度 2) に属する固有ベクトル $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ を求める.

$$(A - 2E)\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ すなわち } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

において

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから

$$u_3 = u_1 + u_2.$$

よって

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_1 + C_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

と書けるので、一組の一次独立な固有ベクトルとして、 $\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ をとることができる.

次に、固有値 $\lambda = 3$ に属する固有ベクトル $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ を求める.

$$(A - 3E)\mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ すなわち } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから

$$v_1 = 0, \quad -2v_2 + v_3 = 0.$$

よって

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c_3 \\ 2c_3 \end{pmatrix} = c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (c_3 \text{ は任意定数})$$

と書けるので、一つの固有ベクトルとして $\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ をとることができる。

したがって、正則行列として

$$P = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

とおくと

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

であり

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

となる。

(2) まず、 A の固有方程式は

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 7-\lambda & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 3-\lambda & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(3-\lambda)(4-\lambda)$$

なので、 A の固有値は、 $\lambda = 2$ (重複度 2), $3, 4$ である。さて

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より } \text{rank}(A - 2E) = 3 \text{ だから } \dim W(2) = 4 - 3 = 1$$

$$A - 3E = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より } \text{rank}(A - 3E) = 3 \text{ だから } \dim W(3) = 4 - 3 = 1$$

$$A - 4E = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より } \text{rank}(A - 4E) = 3 \text{ だから } \dim W(4) = 4 - 3 = 1$$

だから、固有値 $\lambda = 2$ (重複度 2), $3, 4$ に対するジョルダン細胞の数は、それぞれ 1 個ずつであることがわかる。したがって、行列

A のジョルダン標準形 J は

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

である。今、変換行列 P を

$$P = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4)$$

とおくことにすると

$$AP = A(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) = (A\mathbf{p}_1, A\mathbf{p}_2, A\mathbf{p}_3, A\mathbf{p}_4)$$

$$PJ = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = (2\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_1 + 2\mathbf{p}_2, 3\mathbf{p}_3, 4\mathbf{p}_4)$$

となるが, $AP = PJ$ が成り立つとすると

$$\begin{cases} A\mathbf{p}_1 = 2\mathbf{p}_1 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ A\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 + 2\mathbf{p}_2 \cdots \cdots \textcircled{2} \\ A\mathbf{p}_3 = 3\mathbf{p}_3 \cdots \cdots \textcircled{3} \\ A\mathbf{p}_4 = 4\mathbf{p}_4 \cdots \cdots \textcircled{4} \end{cases}$$

が成り立つ.

①より

$$(A - 2E)\mathbf{p}_1 = \mathbf{0} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ここで

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから

$$x_1 = x_3, x_2 = 0, x_4 = 0$$

これより

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ 0 \\ C_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (C_1 \text{ は任意定数})$$

と書ける. そこで, 例えば $\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ をとる.

②について, 上で求めた $\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対して

$$(A - 2E)\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A - 2E)\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

であるから

$$y_1 = y_3 - 1, y_4 = 1, y_2 = 1$$

となっているので

$$\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_2 - 1 \\ 1 \\ C_2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (C_2 \text{ は任意定数})$$

なので、例えば $C_2 = 1$ とおいて、 $\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ をとる。

③より

$$(A - 3E)\mathbf{p}_3 = \mathbf{0} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ここで

$$\left(\begin{array}{cccc} -2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

であるから

$$z_1 = z_2, \quad z_4 = 2z_2, \quad z_3 = 0$$

となっているので

$$\mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_3 \\ C_3 \\ 0 \\ 2C_3 \end{pmatrix} \quad (C_3 \text{ は任意定数})$$

と書ける。そこで、例えば $\mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ をとる。

④より

$$(A - 4E)\mathbf{p}_4 = \mathbf{0} \text{ すなわち } \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ここで

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから

$$w_1 = 0, \quad w_2 = w_4, \quad w_3 = 0$$

となっているので

$$\mathbf{p}_4 = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ C_4 \\ 0 \\ C_4 \end{pmatrix} \quad (C_4 \text{ は任意定数})$$

と書ける．そこで，例えば $\mathbf{p}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ をとる．

したがって，変換行列として

$$P = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくことにすれば

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

であり $AP = PJ$ すなわち $P^{-1}AP = J$ により

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} (=J)$$

が成り立つ．

(解答終)