

大学初年次における数学教材の提案（その 42） ～ 直交補空間 ～

貴田 研司^{*1}

A Suggestion on Mathematical Materials for Freshman Education Vol.42 ～ Orthogonal Complements ～

by

Kenshi KIDA^{*1}

(received on Nov. 26, 2021 & accepted on Jan. 11, 2022)

あらまし

本論文においては線形代数に関する話題として、計量線形空間（内積空間）における、直交補空間と正射影（射影子）について述べる。

Abstract

In this paper, we give explanation of items for linear algebra. We present specially orthogonal complements and orthogonal projections for metric linear spaces.

キーワード: 直交補空間, 計量線形空間, 正規直交基底, 正射影

Keywords: *Orthogonal Complement, Metric Linear Space, Orthonormal Basis, Orthogonal Projection*

1. はじめに

大学初年次に学ぶ線形代数において、計量線形空間（内積空間）の概念の理解について習熟することが大切である．ここでは特に直交補空間について詳しく解説する． V が有限次元計量線形空間， W を V の部分空間とすれば

$$(1) \quad V = W \oplus W^\perp$$

$$(2) \quad \dim V = \dim W + \dim W^\perp$$

$$(3) \quad (W^\perp)^\perp = W$$

ただし， $W^\perp$ で部分空間 W の直交補空間， $\oplus$ で 2 つの部分空間の直和， $\dim$ で線形空間の次元を表す．
が成り立つことを示すことは，特に重要であると考ええる．

また，4 つの基本部分空間と呼ばれる

1. A の行空間 $\mathcal{R}(^tA)$,
2. A の零行空間 $\mathcal{N}(A)$,
3. A の列空間 $\mathcal{R}(A)$,
4. A の左零空間 $\mathcal{N}(^tA)$,

ただし，実数を成分とする行列 A に対して，転置行列を tA と表す．
について述べることは，本論文の一つの特徴である．

^{*1} スチューデントアチーブメントセンター
(高輪教養教育センター) 教授
Student Achievement Center
(Liberal Arts Education Center, Takanawa Campus), Professor

また、執筆にあたって数多くの好著を参考にさせていただいた¹⁾²⁾³⁾⁴⁾⁵⁾⁶⁾⁷⁾⁸⁾⁹⁾¹⁰⁾。

2. 内積とノルム

内積 $(\cdot, \cdot)$ の定義された計量線形空間 V のベクトル $\mathbf{a}$ に対して

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}$$

を、ベクトルの長さまたはノルムという。また

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$$

のとき、 $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は直交するという。

$\mathbf{0}$ でないベクトル $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$ のどの 2 つも直交しているとき、すなわち

$$(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = 0 \quad (i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, r)$$

が成り立つとき、 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$ は直交系であるという。

$\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$ がすべて単位ベクトルであり、しかも直交系であるとき、すなわち

$$(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

が成り立つとき $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$ は、正規直交系であるという。

また、 V の基底 $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ が正規直交系であるとき、この基底を V の正規直交基底という。

定理 2.1 (グラム・シュミットの正規直交化法)

内積 $(\cdot, \cdot)$ をもつ計量線形空間 V において、1 次独立なベクトルの系 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$ が与えられたとき

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|}, & \mathbf{u}_1 &= \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{v}_2 &= \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|}, & \mathbf{u}_2 &= \mathbf{a}_2 - (\mathbf{a}_2, \mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_3 &= \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|}, & \mathbf{u}_3 &= \mathbf{a}_3 - (\mathbf{a}_3, \mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1 - (\mathbf{a}_3, \mathbf{v}_2)\mathbf{v}_2 \\ & & & \vdots \\ \mathbf{v}_r &= \frac{\mathbf{u}_r}{\|\mathbf{u}_r\|}, & \mathbf{u}_r &= \mathbf{a}_r - (\mathbf{a}_r, \mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1 - \dots - (\mathbf{a}_r, \mathbf{v}_{r-1})\mathbf{v}_{r-1} \end{aligned}$$

として、正規直交系 $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ を作ることができる。

定理 2.2

V が n 次元計量線形空間であり、 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ を V の正規直交系とすれば、これを拡大した V の正規直交基底 $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ が存在する。

定義（直和）

線形空間 V とその部分空間 U, W に対して、の任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ が

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} \quad (\boldsymbol{u} \in U, \boldsymbol{w} \in W)$$

と表されて、その表し方が一意であるならば、 V を U と W の直和であるといい、 $U \oplus W$ と書く。

定理 2.3（直和）

線形空間 V とその部分空間 U, W に対して、次の (1), (2) が成り立つ。

- (1) $V = U \oplus W \Leftrightarrow V = U + W, U \cap W = \{0\}$.
 (2) V が有限次元線形空間で $V = U \oplus W$ のとき $\dim V = \dim U + \dim W$.

3. 直交補空間**3.1 直交部分空間 ¹¹⁾****定義（直交部分空間）**

計量線形空間 V の部分空間 U, W について、 U と W の任意のベクトルが互いに直交するとき、 U, W は直交するといつて、 $U \perp W$ と表す。

これから、線形写像についての

定理 3.1.1

V, V' を線形空間、 $f: V \rightarrow V'$ を線形写像とするととき

$$\text{零空間(核)}: \text{Ker } f = \{\boldsymbol{v} \in V; f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}\}, \quad \text{像空間}: \text{Im } f = \{f(\boldsymbol{v}); \boldsymbol{v} \in V\}$$

はそれぞれ V, V' の部分空間であり

$$\dim V = \dim \text{Im } f + \dim \text{Ker } f$$

が成り立つ。

に基づいて、4 つの基本部分空間と呼ばれるものを定義する。

さて

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \quad \text{ただし, } \text{rank } A = r$$

に対して

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m)$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

で定義される写像 f は, $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像である.

また

$${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{n,m}(\mathbb{R})$$

に対して

$$\mathbf{y} = {}^tA\mathbf{x} \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n)$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

で定義される写像 g は, $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への線形写像である.

ただし, 行列の転置を考えることにより, g は

$${}^t\mathbf{y} = {}^t\mathbf{x}A \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n)$$

すなわち

$$(y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_n) = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_m) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

と書き換えられることから, $M_{1,m}(\mathbb{R})$ から $M_{1,n}(\mathbb{R})$ への線形写像とみることもできる.

A の行ベクトルを $\mathbf{a}^{(s)}$ ($s = 1, \dots, m$), の列ベクトルを $\mathbf{a}_{(t)}$ ($t = 1, \dots, n$) とおけば

$$A = (\mathbf{a}_{(1)} \ \mathbf{a}_{(2)} \ \cdots \ \mathbf{a}_{(n)}) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}^{(1)} \\ \mathbf{a}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^{(m)} \end{pmatrix},$$

$${}^tA = ({}^t\mathbf{a}^{(1)} \ {}^t\mathbf{a}^{(2)} \ \cdots \ {}^t\mathbf{a}^{(m)}) = \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{a}_{(1)} \\ {}^t\mathbf{a}_{(2)} \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{a}_{(n)} \end{pmatrix}$$

と表されることに留意されたい.

定義（4つの基本部分空間）

1. A の行空間 $\mathcal{R}({}^tA) = \langle {}^t\mathbf{a}^{(1)} \quad {}^t\mathbf{a}^{(2)} \quad \cdots \quad {}^t\mathbf{a}^{(m)} \rangle : g$ の像空間 ($\dim \operatorname{Im} g$) と呼ばれる $\mathbb{R}^n$ の部分空間.
2. A の零空間 $\mathcal{N}(A) = \{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n ; A\mathbf{u} = \mathbf{0}_m \} : f$ の零空間 (核) ($\operatorname{Ker} f$) と呼ばれる $\mathbb{R}^n$ の部分空間.
3. A の列空間 $\mathcal{R}(A) = \langle \mathbf{a}_{(1)} \quad \mathbf{a}_{(2)} \quad \cdots \quad \mathbf{a}_{(n)} \rangle : f$ の像空間 ($\dim \operatorname{Im} f$) と呼ばれる $\mathbb{R}^m$ の部分空間.
4. A の左零空間 $\mathcal{N}({}^tA) = \{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m ; {}^tA\mathbf{v} = \mathbf{0}_n \} : g$ の零空間 (核) ($\operatorname{Ker} g$) と呼ばれる $\mathbb{R}^m$ の部分空間.

4つの基本部分空間のそれぞれの次元については、定理 3.1.1 により以下の通りとなる.

$$\dim \mathcal{R}({}^tA) = \operatorname{rank} {}^tA = r,$$

$$\dim \mathcal{N}(A) = \dim \mathbb{R}^n - \operatorname{rank} A = n - r,$$

$$\dim \mathcal{R}(A) = \operatorname{rank} A = r,$$

$$\dim \mathcal{N}({}^tA) = \dim \mathbb{R}^m - \operatorname{rank} A = m - r.$$

例（直交部分空間）

$$(1) \quad \mathcal{R}({}^tA) \perp \mathcal{N}(A) \text{ である.}$$

$$(2) \quad \mathcal{R}(A) \perp \mathcal{N}({}^tA) \text{ である.}$$

(証明)

(1)

$\mathbf{w} \in \mathcal{N}(A), \mathbf{v} \in \mathcal{R}({}^tA)$ とすると, $A\mathbf{w} = \mathbf{0}_m$ であり, ある $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ が存在して $\mathbf{v} = {}^tA\mathbf{x}$ となっている.

$$(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = {}^t\mathbf{w}\mathbf{v} = {}^t\mathbf{w}({}^tA\mathbf{x}) = {}^t(A\mathbf{w})\mathbf{x} = {}^t\mathbf{0}_m\mathbf{x} = 0$$

(2)

$\mathbf{w} \in \mathcal{N}({}^tA), \mathbf{v} \in \mathcal{R}(A)$ とすると, ${}^tA\mathbf{w} = \mathbf{0}_n$ であり, ある $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ が存在して $\mathbf{v} = A\mathbf{x}$ となっている.

$$(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = {}^t\mathbf{w}\mathbf{v} = {}^t\mathbf{w}A\mathbf{x} = {}^t({}^tA\mathbf{w})\mathbf{x} = {}^t\mathbf{0}_n\mathbf{x} = 0$$

(証明終)

3.2 直交補空間

定義（直交補空間）

内積 $(\ , \)$ をもつ計量線形空間 V の任意の部分空間 W について, W のすべてのベクトルと直交する V のベクトルの全体, すなわち

$$W^\perp = \{ \mathbf{a} \in V ; (\mathbf{a}, \mathbf{w}) = 0 \quad (\mathbf{w} \text{ は } V \text{ の任意の元}) \}$$

は V の部分空間であり, $W^\perp$ は直交補空間と呼ばれる.

定理 (直交補空間)

V を n 次元計量線形空間, W, W_1, W_2 を V の $r (< n)$ 次元部分空間とすれば, 次のことが成り立つ.

$$(1) \quad V = W \oplus W^\perp$$

$$(2) \quad \dim V = \dim W + \dim W^\perp$$

$$(3) \quad (W^\perp)^\perp = W$$

一般には, $W \subset (W^\perp)^\perp$ である.

$$(4) \quad W_1 \subset W_2 \text{ ならば } W_2^\perp \subset W_1^\perp$$

$$(5) \quad (W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$$

$$(6) \quad (W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$$

(証明)

(1)

$\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ を W の 1 つの正規直交基底とする.

定理 2.2 より, これを V の正規直交基底 $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ に拡大することができる.

このとき, V の元 $\mathbf{v}$ に対して

$$\mathbf{v} = x_1 \mathbf{v}_1 + \dots + x_r \mathbf{v}_r + x_{r+1} \mathbf{v}_{r+1} + \dots + x_n \mathbf{v}_n$$

とする. そして $(\mathbf{v}_i, \mathbf{v})$ ($i = 1, \dots, n$) を考えると

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}) &= (\mathbf{v}_i, x_1 \mathbf{v}_1 + \dots + x_r \mathbf{v}_r + x_{r+1} \mathbf{v}_{r+1} + \dots + x_n \mathbf{v}_n) \\ &= x_1 (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_1) + \dots + x_i (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i) + \dots + x_n (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_n) \\ &= x_i \end{aligned}$$

が成り立つ.

$\mathbf{v}$ が $W^\perp$ の元である, W のすべての元と直交するための必要十分条件は, $\mathbf{v}$ が $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ と直交すること, すなわち

$$(\mathbf{v}, \mathbf{v}_j) = x_j = 0 \quad (j = 1, \dots, r)$$

である. これは

$$\mathbf{v} = x_{r+1} \mathbf{v}_{r+1} + \dots + x_n \mathbf{v}_n$$

と同等である. よって, $V = W + W^\perp$ であることがわかる.

また, $\mathbf{u} \in W \cap W^\perp$ とすると, $\mathbf{u} \in W$ かつ $\mathbf{u} \in W^\perp$ だから

$$\mathbf{u} = x_1 \mathbf{v}_1 + \dots + x_r \mathbf{v}_r + 0 \mathbf{v}_{r+1} + \dots + 0 \mathbf{v}_n = 0 \mathbf{v}_1 + \dots + 0 \mathbf{v}_r + x_{r+1} \mathbf{v}_{r+1} + \dots + x_n \mathbf{v}_n$$

により, $x_k = 0$ ($k = 1, \dots, n$) であるから $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, すなわち $W \cap W^\perp = \mathbf{0}$ が得られる.

よって, $V = W \oplus W^\perp$ が示された.

(2)

(1)の結果と定理 2.3 により示される.

(3)

 $\mathbf{x} \in W$ とすると, $W^\perp$ の任意の元 $\mathbf{y}$ に対して, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ である.よって, $\mathbf{x} \in (W^\perp)^\perp$ であるから, $W \subset (W^\perp)^\perp$ が示された.逆に, $\mathbf{x} \in (W^\perp)^\perp$ であれば, $\mathbf{x} \in V$ だから(1)の結果により, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ ($\mathbf{x}_1 \in W, \mathbf{x}_2 \in W^\perp$)と表される. $(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2) = 0, (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0$ だから

$$0 = (\mathbf{x}, \mathbf{x}_2) = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2) = (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2) = \|\mathbf{x}_2\|^2$$

となる.

したがって, $\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$ であるから $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 \in W$ により, $(W^\perp)^\perp \subset W$ が示される.よって, $(W^\perp)^\perp = W$ が得られた.

(4)～(6)

証明略

(証明終)

例 1

計量線形空間 $\mathbb{R}^3$ (標準内積)において, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で生成される部分空間

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

の直交補空間 $W^\perp$ を求めよ.

(解答)

 $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ が $W^\perp$ の元であるための必要十分条件は

$$-x + z = 0, \quad 5x + y = 0$$

すなわち

$$x = t, \quad y = -5t, \quad z = t \quad (t \text{ は任意定数})$$

だから

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} t \\ -5t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である. したがって

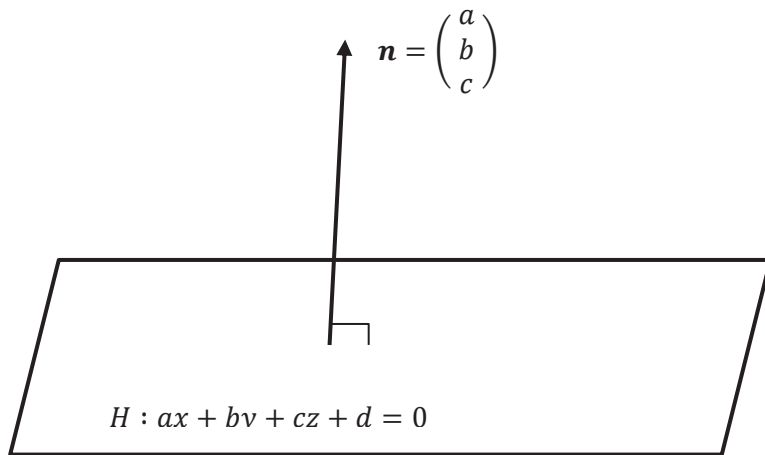
$$W^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

が得られる.

(解答終)

例 2

座標空間において, 平面 $H : ax + by + cz + d = 0$ すなわち $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 ; ax + by + cz + d = 0 \right\}$ の法線ベクトルは, $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ である. よって, 直交補空間は法線ベクトル $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ で生成される部分空間である, すなわち $H^\perp = \langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \rangle$ となる.



例 3 (4つの基本部分空間)

- (1) $\mathbb{R}^n = \mathcal{R}(^tA) \oplus \mathcal{N}(A)$ すなわち $\mathcal{R}(^tA)^\perp = \mathcal{N}(A)$.
- (2) $\mathbb{R}^m = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(^tA)$ すなわち $\mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{N}(^tA)$.

3.3 正射影 (射影子)

V は W と $W^\perp$ の直和であり, $\mathbf{v} \in V$ であり

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{w}' \quad (\mathbf{w} \in W, \mathbf{w}' \in W^\perp)$$

と一意的に表される.

$\mathbf{v} \in V$ に対して, $\mathbf{w} \in W$ を対応させる線形写像 (射影) を V から W への正射影 (射影子) といい, $P_{V/W}$ と書く.

W の正規直交基底を $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$ とすれば

$$P_{V/W}(\mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + \dots + (\mathbf{v}, \mathbf{u}_r)\mathbf{u}_r \quad (\mathbf{v} \in V)$$

で与えられる.

参考文献

- 1) 岩永恭雄「入門線型代数学」日本評論社，2005
- 2) 碓野俊博，加藤芳文 共著「理工系の基礎線形代数学」学術図書，1994
- 3) 碓野俊博，山田浩，山辺元雄 共著「理工系の演習線形代数学」学術図書，2001
- 4) 根本精司「線形代数例題演習」森北出版，1980
- 5) 川久保勝夫「線形代数学」日本評論社，1999
- 6) 服部昭「線型代数学」朝倉書店，1982
- 7) 小寺平治「明解演習線形代数」共立出版，1982
- 8) 富永晃「基礎演習 線形代数」聖文社，1975
- 9) 松坂和夫「線型代数入門」岩波書店，1980
- 10) 三宅敏恒「線形代数学」培風館，2008
- 11) G. ストラング著，山口昌哉監訳，井上昭訳「線形代数とその応用」産業図書，1978