

大学初年次における数学教材の提案（その 9）

～行列式の定義～

貴田 研司^{*1}

Suggestion about Mathematical Material for Freshman Education Vol.9 ～ Definition of Determinant～

by

Kenshi KIDA^{*1}

(received on May 26, 2017 & accepted on Jul. 13, 2017)

あらまし

まず、行列式を平行多面体の体積として幾何学な定義をしたのち、線形変換の表現行列の行列式の意味について解説する。さらに、行列式の公理を紹介し、行列式は、本質的には交代性と多重線形性をもつ写像であり、一意性をもつことについて述べる。

Abstract

First, we define the determinant geometrically, as volume of *parallelotope*. Next, we present a sense of determinants of representation matrices of linear transformations. Further, after we give axiom of determinant, we explain that determinants are alternative and multilinear mappings and have uniqueness.

キーワード: 行列式, 公理, 定義, 平行多面体, 線形変換

Keywords: Determinant, Axiom, Definition, Parallelotope, Linear Transformation

1. はじめに

大学初年次に学ぶ線形代数において、 n 次行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

に対して、各列から1つずつ、同じ行から重複なく計 n 個の成分をとり、それらの積 $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}$ を作る。

この積に、さらに、置換 σ の符号 $\text{sgn}(\sigma)$ をかける。このような積は $n!$ 個ある。 n 次行列式はそれらの総和として

$$\sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \quad \left(\text{ただし, } S_n \text{ は } n \text{ 次の置換の全体であり, } n \text{ 次対称群と呼ばれる.} \right)$$

と定義され

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, |A|, \det A$$

^{*1} 高輪教養教育センター 准教授
Liberal Arts Education Center, Takanawa Campus,
Associate Professor

などの記号で表される¹⁾. さらに A の列ベクトルを $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ とおくと

$$\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$$

と表すこともある. この定義に基づき, 基本性質として以下の (1) ~ (5) が示されることが多い²⁾.

(1) 転置行列の行列式の値は, 元の行列の行列式の値に等しい.

(2) 【 n 重線形性 (一般には, 多重線形性)】

$$\text{ア) } \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}'_k + \mathbf{a}''_k, \dots, \mathbf{a}_n) = \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}'_k, \dots, \mathbf{a}_n) + \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}''_k, \dots, \mathbf{a}_n) \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

$$\text{イ) } \det(\mathbf{a}_1, \dots, c\mathbf{a}_k, \dots, \mathbf{a}_n) = c \cdot \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k, \dots, \mathbf{a}_n) \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

(3) 【交代性】

$$\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n) = -\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n) \quad (i \neq j)$$

一般化すると, n 文字の置換 σ に対して

$$\det(\mathbf{a}_{\sigma(1)}, \mathbf{a}_{\sigma(2)}, \dots, \mathbf{a}_{\sigma(n)}) = \text{sgn}(\sigma) \cdot \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$$

となる.

(4) 行列 A のある列 (あるいは行) に, 他のある列 (あるいは行) の定数倍を加えて得られる行列の行列式の値は, 元の行列 A の行列式 $|A|$ に等しい.

$$\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i + c\mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n) = \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n) = |A|$$

(5) 2つの n 次行列の積の行列式は, それぞれの行列式の積に等しい.

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

本論文では, 行列式の幾何学的定義, 行列式の公理について紹介する.

2. 行列式の幾何学的定義

まず, 行列式の直観的な意味を述べることから始める³⁾. 一般に $P_0, P_1, P_2, \dots, P_r \in R^n$ として,

$$\overrightarrow{(P_0 P_i)} = \mathbf{v}_i \quad (i=1, 2, \dots, r) \text{ とするとき}$$

$$\overrightarrow{(P_0 P)} = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{v}_i \quad (0 \leq \lambda_i \leq 1; i=1, 2, \dots, r)$$

と表されるような点 P 全体の集合を $P_0 P_1, P_0 P_2, \dots, P_0 P_r$ を辺とする平行多面体という. さて

『 n 行列 A の行列式とは, A の n 個の列ベクトルで張られる平行 $2n$ 面体の符号付き体積である』
というものである.

i) 2 次の行列式は

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

であり, 平面上の2つのベクトル $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ で張られる平行4辺形の符号付き面積である. この場合の符号は, ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ からベクトル $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ へ回る向きが正の向き(反時計回り)のときプラス, 負の向き(時計回り)のときマイナスとする.

ii) 3次の行列式

$$\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$$

は, 空間内の3つのベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ で張られる平行6面体の符号付き体積である. この場合の符号は, 列ベクトル $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ が正の向きで並んでいるか, または, 負の向きに並んでいるかで決める. ここで言うベクトル系の向きとは以下のように定める. $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ が, 連続変形により(途中で体積が0につぶれることなく)基本単位ベクトルの順序付き集合 $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ に帰着できるとき, 正の向きといい, 一度鏡に写した後に, 連続変形で $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ に帰着できるとき, 負の向きであるという.

定理 (線形変換)

n 行列 A が線形変換の表現行列のとき

- ① $\det A$ の絶対値は, この線形変換による体積の拡大率を表す.
- ② $\det A$ の符号は, この線形変換が空間の向きを保つか, それとも逆転するかを表す. ■

3. 行列式の公理

行列式とは本質的には, 交代・多重線形写像である. この章では, 行列式の第1定義(implicitな定義)について述べる.

複素数を成分とする n 次の正方行列の全体を $M(n, \mathbf{C})$ で表す. n 次行列 $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ に, 一つの複素数を対応させる関数

$$F: M(n, \mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{C}$$

で, 次の条件 I, II, III を満たすものを行列式関数と呼び, その関数値を行列 A の行列式と呼ぶ.

I. 交代性

$$F(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n) = -F(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n) \quad (i \neq j)$$

II. 多重線形性

$$\text{ア) } F(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k + \mathbf{b}_k, \dots, \mathbf{a}_n) = F(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k, \dots, \mathbf{a}_n) + F(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{b}_k, \dots, \mathbf{a}_n) \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

$$\text{イ) } F(\mathbf{a}_1, \dots, c\mathbf{a}_k, \dots, \mathbf{a}_n) = c \cdot F(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k, \dots, \mathbf{a}_n) \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

III. 単位行列の行列式

$$F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) = 1$$

この条件 I, II, III のことを，行列式の公理と呼ぶことがある．

また，I. において，2 つの異なる列が等しい，すなわち， $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_j = \mathbf{v} \quad (i \neq j)$ とおけば

$$F(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{v}, \dots, \mathbf{v}, \dots, \mathbf{a}_n) = -F(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{v}, \dots, \mathbf{v}, \dots, \mathbf{a}_n)$$

となるので

$$F(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{v}, \dots, \mathbf{v}, \dots, \mathbf{a}_n) = 0$$

が導かれる．

したがって，2 つの異なる列が等しい行列式の値は 0 であることがわかる．

さて，次のことが成り立つ．

定理 (行列式の一意性)

上記の行列式関数 F は，ただ一つだけ存在する． ■

まず具体的に，2 次行列の場合について証明する．

(証明)

まず

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2$$

である．すると

$$F(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = F(a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2, a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2)$$

多重線形性 II. ア) を繰り返し用いると

$$\begin{aligned} &= F(a_{11}\mathbf{e}_1, a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2) + F(a_{21}\mathbf{e}_2, a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2) \\ &= F(a_{11}\mathbf{e}_1, a_{12}\mathbf{e}_1) + F(a_{11}\mathbf{e}_1, a_{22}\mathbf{e}_2) + F(a_{21}\mathbf{e}_2, a_{12}\mathbf{e}_1) + F(a_{21}\mathbf{e}_2, a_{22}\mathbf{e}_2) \end{aligned}$$

多重線形性 II. イ) を繰り返し用いると

$$= a_{11}a_{12}F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + a_{11}a_{22}F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + a_{21}a_{12}F(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) + a_{21}a_{22}F(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)$$

交代性 I. により

$$F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = 0, \quad F(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = 0, \quad F(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = -F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$$

だから

$$\begin{aligned} &= a_{11}a_{22}F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + a_{21}a_{12}F(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) \\ &= a_{11}a_{22}F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + a_{21}a_{12}\{-F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)\} \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \\ &= \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \cdot F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \end{aligned}$$

単位行列の行列式 III. より $F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1$ なので

$$= \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$$

が成り立つ.

このことは、行列式の公理を満たす関数の一意性を示している.

【証明終】

次に、3 次行列の場合について証明する.

(証明)

まず

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + a_{31}\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + a_{32}\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3$$

である. すると

$$F(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = F(a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + a_{31}\mathbf{e}_3, a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + a_{32}\mathbf{e}_3, a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3)$$

多重線形性 II. ア) を繰り返し用いると

$$\begin{aligned} &= F(a_{11}\mathbf{e}_1, a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + a_{32}\mathbf{e}_3, a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3) \\ &\quad + F(a_{21}\mathbf{e}_2, a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + a_{32}\mathbf{e}_3, a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3) \\ &\quad + F(a_{31}\mathbf{e}_3, a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + a_{32}\mathbf{e}_3, a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3) \\ &= F(a_{11}\mathbf{e}_1, a_{12}\mathbf{e}_1, a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3) \\ &\quad + F(a_{11}\mathbf{e}_1, a_{22}\mathbf{e}_2, a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3) \\ &\quad + F(a_{11}\mathbf{e}_1, a_{32}\mathbf{e}_3, a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3) \\ &\quad + F(a_{21}\mathbf{e}_2, a_{12}\mathbf{e}_1, a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3) \\ &\quad + F(a_{21}\mathbf{e}_2, a_{22}\mathbf{e}_2, a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3) \\ &\quad + F(a_{21}\mathbf{e}_2, a_{32}\mathbf{e}_3, a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3) \\ &\quad + F(a_{31}\mathbf{e}_3, a_{12}\mathbf{e}_1, a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3) \\ &\quad + F(a_{31}\mathbf{e}_3, a_{22}\mathbf{e}_2, a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3) \\ &\quad + F(a_{31}\mathbf{e}_3, a_{32}\mathbf{e}_3, a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3) \\ &= F(a_{11}\mathbf{e}_1, a_{12}\mathbf{e}_1, a_{13}\mathbf{e}_1) + F(a_{11}\mathbf{e}_1, a_{12}\mathbf{e}_1, a_{23}\mathbf{e}_2) + F(a_{11}\mathbf{e}_1, a_{12}\mathbf{e}_1, a_{33}\mathbf{e}_3) \\ &\quad + F(a_{11}\mathbf{e}_1, a_{22}\mathbf{e}_2, a_{13}\mathbf{e}_1) + F(a_{11}\mathbf{e}_1, a_{22}\mathbf{e}_2, a_{23}\mathbf{e}_2) + F(a_{11}\mathbf{e}_1, a_{22}\mathbf{e}_2, a_{33}\mathbf{e}_3) \\ &\quad + F(a_{11}\mathbf{e}_1, a_{32}\mathbf{e}_3, a_{13}\mathbf{e}_1) + F(a_{11}\mathbf{e}_1, a_{32}\mathbf{e}_3, a_{23}\mathbf{e}_2) + F(a_{11}\mathbf{e}_1, a_{32}\mathbf{e}_3, a_{33}\mathbf{e}_3) \\ &\quad + F(a_{21}\mathbf{e}_2, a_{12}\mathbf{e}_1, a_{13}\mathbf{e}_1) + F(a_{21}\mathbf{e}_2, a_{12}\mathbf{e}_1, a_{23}\mathbf{e}_2) + F(a_{21}\mathbf{e}_2, a_{12}\mathbf{e}_1, a_{33}\mathbf{e}_3) \\ &\quad + F(a_{21}\mathbf{e}_2, a_{22}\mathbf{e}_2, a_{13}\mathbf{e}_1) + F(a_{21}\mathbf{e}_2, a_{22}\mathbf{e}_2, a_{23}\mathbf{e}_2) + F(a_{21}\mathbf{e}_2, a_{22}\mathbf{e}_2, a_{33}\mathbf{e}_3) \\ &\quad + F(a_{21}\mathbf{e}_2, a_{32}\mathbf{e}_3, a_{13}\mathbf{e}_1) + F(a_{21}\mathbf{e}_2, a_{32}\mathbf{e}_3, a_{23}\mathbf{e}_2) + F(a_{21}\mathbf{e}_2, a_{32}\mathbf{e}_3, a_{33}\mathbf{e}_3) \\ &\quad + F(a_{31}\mathbf{e}_3, a_{12}\mathbf{e}_1, a_{13}\mathbf{e}_1) + F(a_{31}\mathbf{e}_3, a_{12}\mathbf{e}_1, a_{23}\mathbf{e}_2) + F(a_{31}\mathbf{e}_3, a_{12}\mathbf{e}_1, a_{33}\mathbf{e}_3) \\ &\quad + F(a_{31}\mathbf{e}_3, a_{22}\mathbf{e}_2, a_{13}\mathbf{e}_1) + F(a_{31}\mathbf{e}_3, a_{22}\mathbf{e}_2, a_{23}\mathbf{e}_2) + F(a_{31}\mathbf{e}_3, a_{22}\mathbf{e}_2, a_{33}\mathbf{e}_3) \\ &\quad + F(a_{31}\mathbf{e}_3, a_{32}\mathbf{e}_3, a_{13}\mathbf{e}_1) + F(a_{31}\mathbf{e}_3, a_{32}\mathbf{e}_3, a_{23}\mathbf{e}_2) + F(a_{31}\mathbf{e}_3, a_{32}\mathbf{e}_3, a_{33}\mathbf{e}_3) \end{aligned}$$

多重線形性 II. イ) を繰り返し用いると

$$\begin{aligned}
 = & a_{11}a_{12}a_{13}F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + a_{11}a_{12}a_{23}F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + a_{11}a_{12}a_{33}F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) \\
 & + a_{11}a_{22}a_{13}F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) + a_{11}a_{22}a_{23}F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) + a_{11}a_{22}a_{33}F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \\
 & + a_{11}a_{32}a_{13}F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) + a_{11}a_{32}a_{23}F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) + a_{11}a_{32}a_{33}F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) \\
 & + a_{21}a_{12}a_{13}F(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + a_{21}a_{12}a_{23}F(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + a_{21}a_{12}a_{33}F(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) \\
 & + a_{21}a_{22}a_{13}F(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) + a_{21}a_{22}a_{23}F(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) + a_{21}a_{22}a_{33}F(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \\
 & + a_{21}a_{32}a_{13}F(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) + a_{21}a_{32}a_{23}F(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) + a_{21}a_{32}a_{33}F(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) \\
 & + a_{31}a_{12}a_{13}F(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + a_{31}a_{12}a_{23}F(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + a_{31}a_{12}a_{33}F(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) \\
 & + a_{31}a_{22}a_{13}F(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) + a_{31}a_{22}a_{23}F(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) + a_{31}a_{22}a_{33}F(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \\
 & + a_{31}a_{32}a_{13}F(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) + a_{31}a_{32}a_{23}F(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) + a_{31}a_{32}a_{33}F(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3)
 \end{aligned}$$

上式の一つの項において、 i_1, i_2, i_3 の中に同じものがあれば、上述の交代性 I から導かれる性質により、

$$F(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \mathbf{e}_{i_3}) = 0 \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned}
 = & a_{11}a_{22}a_{33}F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) + a_{11}a_{32}a_{23}F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) + a_{21}a_{12}a_{33}F(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) \\
 & + a_{21}a_{32}a_{13}F(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) + a_{31}a_{12}a_{23}F(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + a_{31}a_{22}a_{13}F(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)
 \end{aligned}$$

となる．一方、 i_1, i_2, i_3 がすべて異なれば

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix}$$

は、3文字の置換であるから、やはり交代性 I により

$$F(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \mathbf{e}_{i_3}) = \text{sgn}(\sigma) \cdot F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$$

となっているから

$$\begin{aligned}
 = & a_{11}a_{22}a_{33}F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) + a_{11}a_{32}a_{23}\{(-1)F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\} + a_{21}a_{12}a_{33}\{(-1)F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\} \\
 & + a_{21}a_{32}a_{13}\{(-1)^2F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\} + a_{31}a_{12}a_{23}\{(-1)^2F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\} + a_{31}a_{22}a_{13}\{(-1)F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\} \\
 = & a_{11}a_{22}a_{33}F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) - a_{11}a_{32}a_{23}F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) - a_{21}a_{12}a_{33}F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \\
 & + a_{21}a_{32}a_{13}F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) + a_{31}a_{12}a_{23}F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) - a_{31}a_{22}a_{13}F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \\
 = & (a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}) \cdot F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \\
 = & \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \cdot F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)
 \end{aligned}$$

単位行列の行列式 III. より $F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 1$ なので

$$= \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$$

が成り立つ．

このことは、行列式の公理を満たす関数の一意性を示している．

【証明終】

そこで、一般の n 次行列の場合について証明する．

(証明)

まず、 n 次行列 A の列ベクトルを $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ とおき

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n)$$

と表すことにする．このとき，各列は

$$\mathbf{a}_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{jk} \mathbf{e}_j \quad (j=1, 2, \cdots, n)$$

と表される．すると

$$F(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n) = F\left(\sum_{i_1=1}^n a_{i_1 1} \mathbf{e}_{i_1}, \sum_{i_2=1}^n a_{i_2 2} \mathbf{e}_{i_2}, \cdots, \sum_{i_n=1}^n a_{i_n n} \mathbf{e}_{i_n}\right)$$

多重線形性 II. ア) を繰り返し用いると

$$\begin{aligned} &= \sum_{i_1=1}^n F\left(a_{i_1 1} \mathbf{e}_{i_1}, \sum_{i_2=1}^n a_{i_2 2} \mathbf{e}_{i_2}, \cdots, \sum_{i_n=1}^n a_{i_n n} \mathbf{e}_{i_n}\right) \\ &= \sum_{i_1=1}^n \left\{ \sum_{i_2=1}^n F\left(a_{i_1 1} \mathbf{e}_{i_1}, a_{i_2 2} \mathbf{e}_{i_2}, \sum_{i_3=1}^n a_{i_3 3} \mathbf{e}_{i_3}, \cdots, \sum_{i_n=1}^n a_{i_n n} \mathbf{e}_{i_n}\right) \right\} \\ &= \cdots \cdots \cdots \\ &= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_n=1}^n F(a_{i_1 1} \mathbf{e}_{i_1}, a_{i_2 2} \mathbf{e}_{i_2}, \cdots, a_{i_n n} \mathbf{e}_{i_n}) \end{aligned}$$

多重線形性 II. イ) を繰り返し用いると

$$= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_n=1}^n a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \cdot F(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \cdots, \mathbf{e}_{i_n})$$

となることがわかる．

上式の一つの項において， $i_1, i_2, \cdots, i_n$ の中に同じものがあれば，上述の交代性より導かれる性質により，

$F(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \cdots, \mathbf{e}_{i_n}) = 0$ である．一方， $i_1, i_2, \cdots, i_n$ がすべて異なれば

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

は， n 文字の置換であるから，やはり交代性により

$$F(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \cdots, \mathbf{e}_{i_n}) = \text{sgn}(\sigma) \cdot F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n)$$

となっている．

したがって

$$\begin{aligned} F(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \cdot a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \cdot F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n) \\ &= \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n) \cdot F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n) \end{aligned}$$

単位行列の行列式 III. により, $F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) = 1$ なので

$$= \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$$

が得られる.

このことは, 行列式の公理を満たす関数の一意性を示している.

【証明終】

4. おわりに

本論文では, 最初に行列式の定義ありきの解説とした. もっと遡ると, 行列式の起源は, 連立一次方程式の一般的解法にあり, 1678 年のライプニッツの書簡が初出と言われている. 今現在よく知られている行列式の定義が, どのようにして導き出されたのかについては, 高木貞治著「代数学講義 改訂新版」⁴⁾を参照されたい.

参考文献

- 1) 小寺平治「明解演習 線形代数」共立出版, 1982
- 2) 齋藤正彦「線型代数入門」東京大学出版会, 1966
- 3) 金子晃「線形代数講義」サイエンス社, 2004
- 4) 高木貞治「代数学講義 改訂新版」共立出版, 1965