

# バックオーダーと順序依存型段取り時間を考慮した並列機械 多品目容量制約付きロットサイズ決定問題に対する緩和固定法

木内 敦規<sup>\*1</sup>, 森山 弘海<sup>\*2</sup>

## A Relax and Fix Method for a Multi-Item Capacitated Lot Sizing Problem on Parallel Machines with Backorders and Sequence-Dependent Setup Times

by

Atsuki KIUCHI<sup>\*1</sup> and Hiroumi MORIYAMA<sup>\*2</sup>

( received on Sep.22, 2014 & accepted on Jan.15, 2015 )

### Abstract

The multi-item capacitated lot sizing problem is one of the basic problems in production planning, and it has various applications in many fields. In this paper, we consider a multi-item capacitated lot sizing problem on parallel machines with backorders and sequence-dependent setup times. First, we formulate this problem as a mixed 0-1 integer programming problem. Next, we propose a heuristic algorithm for solving the formulation on the basis of the relax and fix method. Finally, we verify the effectiveness of the proposed method through computational experiments.

**Keywords:** lot sizing, parallel machines, backorders, sequence-dependent setup times, relax and fix method

**キーワード:** ロットサイジング, 並列機械, バックオーダー, 順序依存型段取り時間, 緩和固定法

### 1. 概要

代表的な数理計画問題の 1 つに多品目容量制約付きロットサイズ決定問題 (capacitated lot sizing problem) がある。いま, 1 台の機械で生産すべき複数の品目が与えられている。計画対象期間は有限であり多期間で構成される。また, 各期間における各品目の需要量は既知であり, 各期間の生産時間は所与の規定時間 (生産可能時間の上限) 以下でなければならない。このとき, 生産費用, 在庫保管費用, 段取り費用の総和が最小となるように, 各期間で生産すべき品目とそのロットサイズを同時に決定する問題を多品目容量制約付きロットサイズ決定問題という。

この問題は単一機械の運用だけでなく生産ラインや組立ラインの運用等にも幅広い応用をもつため, これまでに数多くの研究があるが, それらの多くは, 各品目の需要量に対する生産の遅れが許されないことを仮定している。しかし, 実務においては, 生産の遅れを許す場合が, すなわち, バックオーダーを考慮する場合が頻繁に現れる。また, 従来の研究の多くは, 各品目の生産順序に依存する段取り時間を考慮していない。しかし, 実際の工場においては, 各品目の生産時間に加えて, 各品目の生産順序に依存

した段取り時間を陽に考慮しなければならない場合が多い, それゆえ, バックオーダーと順序依存型の段取り時間を考慮した場合の多品目容量制約付きロットサイズ決定問題も実務上重要な問題であると考えられる。この問題に関しては, これまでに森山ら<sup>1)</sup>がラグランジアン・ヒューリスティック法に基づく, 木内ら<sup>2)</sup>が緩和固定法に基づく近似解法を提案しているが, これらの研究はいずれも単一機械を対象としている。しかし, 実際の生産現場においては, 並列機械 (parallel machines) を対象としなければならない場合も数多く見受けられる。すなわち, 複数台の機械が並列的に存在し, 各品目が任意の機械で生産できる場合である。

そこで当研究では, 並列機械を対象とした場合の, バックオーダーと順序依存型段取り時間を考慮した多品目容量制約付きロットサイズ決定問題を考える。つまり, 各機械の各期間における総生産時間が所与の規定時間を超えないという制約の下で, 生産費用, 在庫保管費用, バックオーダー費用, 段取り費用の総和が最小となるように, 各機械の各期間で生産する品目とそのロットサイズ, および各品目の生産順序を同時に決定する問題である。当研究では, この問題をバックオーダーと順序依存型段取り時間を考慮した並列機械多品目容量制約付きロットサイズ決定問題とよび, その近似解法を提案する。

この問題は, 上述のように, 複数台の機械の全計画期間における生産すべき品目とそのロットサイズ, および各品目の生産順序を同時に決定しなければならないため, その最適解を簡単に求めることができない難しい問題であると考えられる。そこで当研究では, 最初に, この問題を混合 0-1 整数計画問題に定式化し, その数理的な構造を明らかにする。次いで,

\*1 情報通信学研究科情報通信学専攻 修士課程  
Graduate School of Information and  
Telecommunication Engineering, Course of  
Information and Telecommunication Engineering,  
Master's Program

\*2 情報通信学部経営システム工学科 教授  
School of Information and Telecommunication  
Engineering, Department of Management Systems  
Engineering, Professor

その定式化の構造を利用した緩和固定法に基づく近似解法を提案し、その有効性を数値実験を通して検証する。

## 2. 問題の定式化

機械の集合を  $M = \{1, 2, \dots, m\}$ 、生産品目の集合を  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ 、計画期間の集合を  $T = \{1, 2, \dots, t\}$  とする。また、ダミー品目 0 と期間 0 を考え、機械の初期状態は期間 0 で品目 0 の生産が終了した状態であるとする。そして、 $N$  にダミー品目 0 を加えた集合を  $N_0 = N \cup \{0\}$  とする。さらに、次を定義する。

- $p_i^h$  : 機械  $h \in M$  における品目  $i \in N$  の単位量当たり生産費用
- $s_i$  : 品目  $i \in N$  の単位期間当たり単位量当たり在庫保管費用
- $b_i$  : 品目  $i \in N$  の単位期間当たり単位量当たりバックオーダー費用
- $c_{ij}^h$  : 機械  $h \in M$  における品目  $i \in N_0$  から品目  $j \in N_0$  への段取り費用
- $r_{ij}^h$  : 機械  $h \in M$  における品目  $i \in N_0$  から品目  $j \in N_0$  への段取り時間
- $d_{ik}$  : 品目  $i \in N$  の期間  $k \in T$  における需要量
- $R_k^h$  : 機械  $h \in M$  における期間  $k \in T$  の規定時間
- $a_i^h$  : 機械  $h \in M$  における品目  $i \in N$  の単位量当たり生産時間

ただし、 $c_{ij}^h$  と  $r_{ij}^h$  に関しては、 $c_{ii}^h = 0, h \in M, i \in N_0$  であり、 $r_{ii}^h = 0, h \in M, i \in N_0$  であるとする。また、 $r_{ij}^h$  は  $R_k^h$  に対して、

$$\max_{i,j \in N_0} r_{ij}^h \leq \min_{k \in T} R_k^h, \quad h \in M \quad (1)$$

であるとする。つまり、ある機械の最大の段取り時間はその機械の最小の規定時間以下であるとする。加えて、機械  $h$  における品目  $i$  の期間  $k$  での生産を  $(i, k)^h$  とし、その集合を各  $h \in M$  ごとに

$$V^h = \{(i, k)^h \mid (i, k) \in N \times T\} \cup \{(0, 0)^h\}, \quad h \in M \quad (2)$$

とおく。ただし、 $(0, 0)^h$  は機械  $h$  におけるダミー品目 0 の期間 0 での生産（初期状態）である。また、生産  $(i, k)^h$  を  $(j, l)^h$  に切り替えるための段取り替えを  $(ik, jl)^h$  とし（正確には  $((i, k)^h, (j, l)^h)$  と記すべきであるが、記述を簡単化するためにこのように記す）、その集合を各  $h \in M$  ごとに

$$E^h = \{(ik, jl)^h \in V^h \times V^h\}, \quad h \in M \quad (3)$$

とおく。そして、変数  $q_{ik}^h, I_{ik}^+, I_{ik}^-, f_k^h, g_k^h, x_{ik}^h, y_{ikjl}^h$  を

- $q_{ik}^h$  : 機械  $h \in M$  における品目  $i \in N$  の期間  $k \in T$  での生産量
- $I_{ik}^+$  : 品目  $i \in N$  の期間  $k \in T$  における在庫量
- $I_{ik}^-$  : 品目  $i \in N$  の期間  $k \in T$  におけるバックオーダー量
- $f_k^h$  : 機械  $h \in M$  における期間  $k \in T$  の最初の段取り時間
- $g_k^h$  : 機械  $h \in M$  における期間  $k \in T$  の最後の段取り時間

$$x_{ik}^h = \begin{cases} 1, & \text{機械 } h \text{ において品目 } i \text{ を期間 } k \text{ で生産する場合} \\ 0, & \text{その他} \end{cases}, \quad h \in M, i \in N, k \in T$$

$$y_{ikjl}^h = \begin{cases} 1, & \text{機械 } h \text{ において品目 } i \text{ を期間 } k \text{ に生産した直後に品目 } j \text{ を期間 } l \text{ で生産する場合,} \\ 0, & \text{その他} \end{cases}, \quad h \in M, (ik, jl)^h \in E^h$$

と定義する。ただし、 $y_{ikik}^h$  は

$$y_{ikik}^h = \begin{cases} 1, & \text{機械 } h \text{ において品目 } i \text{ を期間 } k \text{ に生産しない場合} \\ 0, & \text{その他} \end{cases},$$

を意味するものとする。つまり、

$$x_{ik}^h = 1 - y_{ikik}^h, \quad h \in M, i \in N, k \in T \quad (4)$$

であるものとする。このとき、 $V^h$  を頂点の集合とし、 $E^h$  を枝の集合とする  $m$  個の有向グラフ  $G^h = (V^h, E^h)$ 、 $h \in M$  を考えると、変数  $x_{ik}^h, y_{ikjl}^h$  は、 $G^h$  の  $((0, 0)^h$  以外の) 頂点  $(i, k)^h$  に変数  $x_{ik}^h$  を、 $G^h$  の枝  $(ik, jl)^h$  に変数  $y_{ikjl}^h$  を付与したことになる。したがって、変数  $y^h = (y_{ikjl}^h), h \in M$  の値を定めると、各  $h \in M$  ごとに  $G^h$  の部分グラフ  $G^h(y^h) = (V^h, E^h(y^h))$  が定まる。ただし、

$$E^h(y^h) = \{(ik, jl)^h \in E^h \mid y_{ikjl}^h = 1\}, \quad h \in M \quad (5)$$

である。そして、この  $G^h(y^h)$  が機械  $h$  における全計画期間にわたる各品目の 1 つの生産順序を与えるためには、 $G^h(y^h)$  にある期間からそれより前の期間に戻る枝や、ある期間から次の次以降の期間（次の期間を飛ばした先の期間）に向かう枝があってはならない。すなわち、 $E^h$  に関して  $E_1^h = \{(0, 0)^h \mid j \in N\}$ 、 $E_2^h = \{(ik, jl)^h \mid i \in N, k \in T, j \in N, l = k\}$ 、 $E_3^h = \{(ik, jl)^h \mid i \in N, k \in T \setminus \{t\}, j \in N, l = k + 1\}$ 、 $E_4^h = \{(it, 00)^h \mid i \in N\}$  とし、 $\bar{E}^h = E_1^h \cup E_2^h \cup E_3^h \cup E_4^h$  とすると、 $E^h(y^h) \subseteq \bar{E}^h$  でなければならない（ $(0, 0)^h \notin \bar{E}^h$  であることに注意）。また、 $G^h(y^h)$  は明らかに

(a) 頂点の正次数と負次数は共に 1 である。

でなければならない。加えて、 $G^h(y^h) = (V^h, E^h(y^h))$ 、 $h \in M$  に関して、

$$V_k^h = \{(i, k)^h \in V^h \mid i \in N\}, \quad h \in M, k \in T \quad (6)$$

$$E_k^h(y^h) = \{(ik, jl)^h \in E^h(y^h) \mid l = k\}, \quad h \in M, k \in T \quad (7)$$

とし、 $G^h(y^h)$  の部分グラフ  $G_k^h(y^h) = (V_k^h, E_k^h(y^h))$ 、 $k \in T$  を定めると、 $G^h(y^h)$  は各  $G_k^h(y^h)$ 、 $k \in T$  に関して、

(b) 2 つ以上の枝をもつ閉路を含まない。

でなければならない。したがって、 $G^h(y^h) = (V^h, E^h(y^h))$  は、 $E^h(y^h) \subseteq \bar{E}^h$  でかつ上記 (a)、(b) であるとき、そしてそのときに限り、 $G^h(y^h)$  が機械  $h$  における全期間にわたる各品目の 1 つの生産順序を与える。例えば、品目数が  $n = 3$  で期間数  $t = 3$  である場合に、 $E^h(y^h) \subseteq \bar{E}^h$  でかつ上記 (a)、(b) である Fig.1 のような  $G^h(y^h)$  が求まったとすると、この  $G^h(y^h)$  は、機械  $h$  において期間 1 では品目  $1 \rightarrow 3$  の順に生産する（品目 2 は生産しない）ことを、期間 2 では品目  $3 \rightarrow 2$  の順に生産する（品目 1 は生産しない）ことを、期間 3 では品目  $1 \rightarrow 3$  の順に生産する（品目 2 は生産しない）こと

を示している。

以上を確認すると、バックオーダーと順序依存型段取り時間を考慮した並列機械多品目容量制約付きロットサイズ決定問題は、次のような混合0-1整数計画問題に定式化される。ただし、初期在庫量、初期バックオーダー量、期末在庫量、期末バックオーダー量は

$$I_{i0}^+ = I_{i0}^- = I_{it}^+ = I_{it}^- = 0, \quad i \in N \quad (8)$$

であるとする。また、目的関数における  $y_{ikjl}^h$  の係数  $c_{ij}^h$  に関しては、

$$c_{ij}^h = \infty, \quad h \in M, (ik, jl)^h \in E^h \setminus \bar{E}^h \quad (9)$$

であるものとする。

$$(P) \min. \sum_{h \in M} \sum_{i \in N} \sum_{k \in T} p_i^h q_{ik}^h + \sum_{i \in N} \sum_{k \in T} s_i I_{ik}^+ + \sum_{i \in N} \sum_{k \in T} b_i I_{ik}^- + \sum_{h \in M} \sum_{(ik, jl)^h \in E^h} c_{ij}^h y_{ikjl}^h \quad (10)$$

$$\text{s.t. } I_{ik}^+ - I_{ik}^- = I_{ik-1}^+ - I_{ik-1}^- + \sum_{h \in M} q_{ik}^h - d_{ik}, \quad i \in N, k \in T \quad (11)$$

$$q_{ik}^h \leq \left( \sum_{k=1}^t d_{ik} \right) x_{ik}^h, \quad h \in M, i \in N, k \in T \quad (12)$$

$$x_{ik}^h = 1 - y_{ikik}^h, \quad h \in M, i \in N, k \in T \quad (13)$$

$$f_1^h = \sum_{j \in N} r_{0j}^h y_{00j1}^h, \quad h \in M \quad (14)$$

$$g_t^h = \sum_{i \in N} r_{i0}^h y_{it00}^h, \quad h \in M \quad (15)$$

$$g_k^h + f_{k+1}^h = \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} r_{ij}^h y_{ikjk+1}^h, \quad h \in M, k \in T \setminus \{t\} \quad (16)$$

$$f_k^h + \sum_{i \in N} a_i^h q_{ik}^h + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} r_{ij}^h y_{ikjk}^h + g_k^h \leq R_k^h, \quad h \in M, k \in T \quad (17)$$

$$\sum_{(j,l)^h \in V^h} y_{ikjl}^h = 1, \quad h \in M, (i,k)^h \in V^h \quad (18)$$

$$\sum_{(i,k)^h \in V^h} y_{ikjl}^h = 1, \quad h \in M, (j,l)^h \in V^h \quad (19)$$

「 $G_k^h(\mathbf{y}^h)$  は2つ以上の枝を持つ閉路を含まない」,  $h \in M, k \in T$  (20)

$$q_{ik}^h \geq 0, \quad h \in M, i \in N, k \in T \quad (21)$$

$$I_{ik}^+, I_{ik}^- \geq 0, \quad i \in N, k \in T \cup \{0\} \quad (22)$$

$$f_k^h, g_k^h \geq 0, \quad h \in M, k \in T \quad (23)$$

$$x_{ik}^h \in \{0,1\}, \quad h \in M, i \in N, k \in T \quad (24)$$

$$y_{ikjl}^h \in \{0,1\}, \quad h \in M, (ik, jl)^h \in E^h \quad (25)$$

ここで、式 (10) は目的関数で、生産費用、在庫保管費用、バックオーダー費用、段取り費用の総和を最小することを表す。そして式 (11) は、各品目の各期間における在庫量、バックオーダー量、生産量および需要量の関係を規定する。式 (12) は、 $x_{ik}^h = 0$  ならば  $q_{ik}^h = 0$  であることを、すなわち、各機械の各期間で生産しない品目の生産量は0であることを保証する。式 (13) は、既述のように、 $y_{ikik}^h = 1$  である場合には

$x_{ik}^h = 0$  であることを、すなわち、 $y_{ikik}^h = 1$  である場合には機械  $h$  において品目  $i$  を期間  $k$  で生産しないことを規定する。また、式 (14) は機械  $h$  の期間 1 における最初の段取り時間を、式 (15) は機械  $h$  の期間  $t$  における最後の段取り時間（後片付け時間）を規定する。式 (16) は、機械  $h$  において期間  $k$  の最後に生産した品目を期間  $k+1$  の最初に生産する品目に切り替えるための、つまり、連続した2つの期間にまたがって切り替えを行う場合の段取り時間を規定する。また式 (17) は、各機械の各期間における総生産時間（実生産時間と段取り時間の総和）が、その機械のその期間における規定時間以下であることを保証する。そして式 (18), (19) は、 $G^h(\mathbf{y}^h)$  の頂点  $(i,k)^h \in V^h$  の正次数と負次数が共に1であることを保証する。よって、これらの式 (18), (19) と式 (20) より、 $G^h(\mathbf{y}^h)$  は上述の (a), (b) となる。つまり、式 (18), (19), (20) は、式 (9) より  $E^h(\mathbf{y}^h) \subseteq \bar{E}^h$  であることに注意すると、 $G^h(\mathbf{y}^h)$  が機械  $h$  における全期間にわたる各品目の1つの生産順序を与えることを保証する。

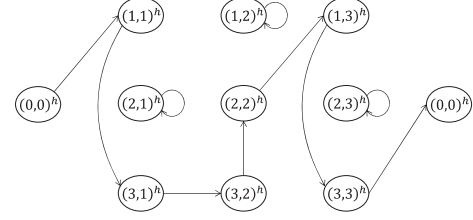


Fig.1 An example of graph  $G^h(\mathbf{y}^h)$ .

また、式 (20) は数式で記述されていないが、 $V_k^h$  に関して  $\Omega^h(i,k) = \{Q \subset V_k^h \mid (i,k)^h \in Q\}$ ,  $h \in M, i \in N, k \in T$  (26) を定めると、次のように記述できる<sup>3)</sup>。ただし  $E(Q) = \{(i,k)^h \in E_2^h \cup E_3^h \cup E_4^h \mid (i,k)^h \in Q, (j,l)^h \notin Q\}$  である。

また、新たな変数  $v_{ik}^h$ ,  $h \in M, i \in N, k \in T$  を導入すれば、式 (20) は次のように記述することもできる<sup>2)</sup>。

$$v_{ik}^h - v_{jl}^h + (|V^h| - 1) y_{ikjl}^h \leq |V^h| - 2, \quad h \in M, (ik, jl)^h \in E_2^h \cup E_3^h, (i,k)^h \neq (j,l)^h \quad (28)$$

$$1 \leq v_{ik}^h \leq |V^h| - 1, \quad h \in M, i \in N, k \in T \quad (29)$$

ここで、 $v_{ik}^h$ ,  $h \in M, i \in N, k \in T$  は生産順序を定めるための実数変数で、その値が小さい順に各品目を生産することを表す。

### 3. 緩和固定法に基づく近似解法

混合整数計画問題は通常、問題の規模が大きくなると、汎用の混合整数計画ソルバー（以下では MIP ソルバー）を用いてその最適解を求めることが難しくなる。そこでここでは、混合整数計画問題の一部の整数変数を「実数変数に連続緩和」または「ある

値に固定することで定数化」した (MIP ソルバーで求解可能な) 問題を解くことにより, 元の混合整数計画問題の近似解を求める方法である緩和固定法 (relax and fix method) <sup>4)</sup> に着目し, それに基づく (P) の近似解法を提案する.

いま, 計画期間の集合  $T = \{1, 2, \dots, t\}$  を  $W$  個の集合  $T^1 = \{1, 2, \dots, t_1\}, T^2 = \{t_1 + 1, t_1 + 2, \dots, t_2\}, \dots, T^W = \{t_{W-1} + 1, t_{W-1} + 2, \dots, t\}$  に分割する. また, これらの  $T^1, T^2, \dots, T^W$  に対応した  $W$  個の集合  $U^\rho = \{t_\rho + 1, t_\rho + 2, \dots, u_\rho\}, \rho = 1, 2, \dots, W-1, U^W = \phi$  を定義する. さらに,  $T$  の部分集合  $T_F^1 = \phi, T_F^\rho = (U_{w=1}^{\rho-1} T^w) \cup \{0\}, \rho = 2, 3, \dots, W$  と  $M$  の部分集合  $M_F^\sigma = \{h \in M \mid h < \sigma\}, \sigma = 1, 2, \dots, m$  を定義する. そして, (P) の制約式 (24), (25) を以下の制約式 (30)~(41) に置き換えた問題  $(P^{\rho\sigma}), \rho = 1, 2, \dots, W, \sigma = 1, 2, \dots, m$  を考える.

$$x_{ik}^h = \bar{x}_{ik}^h, h \in M, i \in N, k \in T_F^\rho \setminus \{0\} \quad (30)$$

$$x_{ik}^h = \bar{x}_{ik}^h, h \in M_F^\sigma, i \in N, k \in T^\rho \quad (31)$$

$$0 \leq x_{ik}^h \leq 1, h \in M_F^\sigma, i \in N, k \in U^\rho \quad (32)$$

$$x_{ik}^h \in \{0, 1\}, h = \sigma, i \in N, k \in T^\rho \cup U^\rho \quad (33)$$

$$0 \leq x_{ik}^h \leq 1, h \in M \setminus (M_F^\sigma \cup \{\sigma\}), i \in N, k \in T^\rho \cup U^\rho \quad (34)$$

$$0 \leq x_{ik}^h \leq 1, h \in M, i \in N, k \in T \setminus (T_F^\rho \cup T^\rho \cup U^\rho) \quad (35)$$

$$y_{ikjl}^h = \bar{y}_{ikjl}^h, h \in M, (ik, jl)^h \in E^h, k \in T_F^\rho \quad (36)$$

$$y_{ikjl}^h = \bar{y}_{ikjl}^h, h \in M_F^\sigma, (ik, jl)^h \in E^h, k \in T^\rho \quad (37)$$

$$0 \leq y_{ikjl}^h \leq 1, h \in M_F^\sigma, (ik, jl)^h \in E^h, k \in U^\rho \quad (38)$$

$$y_{ikjl}^h \in \{0, 1\}, h = \sigma, (ik, jl)^h \in E^h, k \in T^\rho \cup U^\rho \quad (39)$$

$$0 \leq y_{ikjl}^h \leq 1, h \in M \setminus (M_F^\sigma \cup \{\sigma\}), (ik, jl)^h \in E^h, k \in T^\rho \cup U^\rho \quad (40)$$

$$0 \leq y_{ikjl}^h \leq 1, h \in M, (ik, jl)^h \in E^h, k \in T \setminus (T_F^\rho \cup T^\rho \cup U^\rho) \quad (41)$$

ただし,  $(\bar{x}_{ik}^h)$  と  $(\bar{y}_{ikjl}^h)$  は  $\sigma = 1$  ならば  $(P^{\rho-1,m})$  の実行可能解であり,  $\sigma > 1$  ならば  $(P^{\rho,\sigma-1})$  の実行可能解である. ここで,  $(P^{\rho\sigma})$  は期間  $k \in T_F^\rho$  と機械  $h \in M_F^\sigma$  の期間  $k \in T^\rho$  に関連した (P) の 0-1 変数を実行可能解  $(\bar{x}_{ik}^h), (\bar{y}_{ikjl}^h)$  に固定し, 機械  $h = \sigma$  の期間  $T^\rho \cup U^\rho$  に関連した (P) の 0-1 変数はそのままとし, それら以外の (P) の 0-1 変数を 0 以上 1 以下の実数変数に連続緩和した問題である. 例えば, 機械の集合が  $M = \{1, 2, 3\}$ , 品目の集合が  $N = \{1, 2, 3\}$ , 期間の集合が  $T = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  である場合の問題に,  $W = 4$  とし,  $T^1 = \{1\}, T^2 = \{2\}, T^3 = \{3\}, T^4 = \{4, 5\}, U^1 = \{2\}, U^2 = \{3\}, U^3 = \{4\}, U^4 = \phi$  とした場合の緩和固定法を適用することを考える. このとき,  $\rho = 3$  で  $\sigma = 2$  である問題  $(P^{32})$  は, 期間  $k \in T_F^3 = \{0, 1, 2\}$  と機械  $h \in M_F^2 = \{1\}$  の期間  $k \in T^3 = \{3\}$  に関連した (P) の 0-1 変数を  $(P^{31})$  の実行可能解に固定し, 機械  $h = 2$  の期間  $k \in T^3 \cup U^3 = \{3, 4\}$  に関連した (P) の 0-1 変数はそのままとし, それら以外の (P) の 0-1 変数を 0 以上 1 以下の実数変数に連続緩和した問題となる (Fig.2 参照).

当研究で提案する緩和固定法は, MIP ソルバーを用いて  $(P^{11}), (P^{12}), \dots, (P^{1m}), (P^{21}), (P^{22}), \dots, (P^{2m}), \dots, (P^{W1}), (P^{W2}), \dots, (P^{Wm})$  の実行可能解を順次算出することで  $(P^{Wm})$  の実行可能解, すなわち, (P) の近似解を求める. ただし, 各  $(P^{\rho\sigma}), \rho = 1, 2, \dots, W, \sigma = 1, 2, \dots, m$  における計画期間の集合  $T = \{1, 2, \dots, t\}$  は, 緩和固定法全体の

計算時間を短縮することを意図して, 新たなパラメータ  $\tau_\rho (u_\rho \leq \tau_\rho \leq t), \rho = 1, 2, \dots, W-1, \tau_W = t$  を導入し,  $T = \{1, 2, \dots, \tau_\rho\}$  であるものとする. また, 既述のように, (P) の制約式 (20) は式 (27) または式 (28), (29) の数式

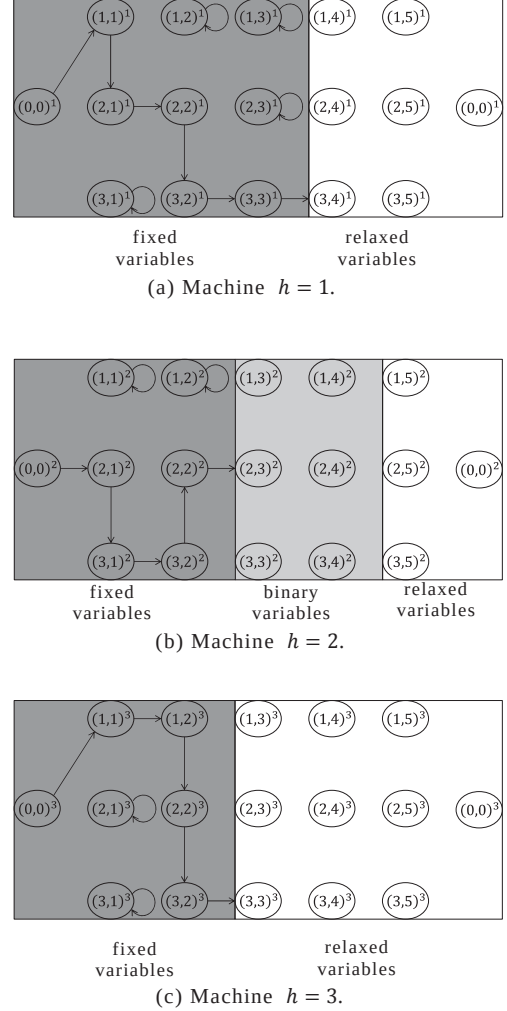


Fig.2 An example of problem  $(P^{32})$ .

として記述できるが, 緩和固定法の  $(P^{\rho\sigma}), \rho = 1, 2, \dots, W, \sigma = 1, 2, \dots, m$  においては, 期間  $k \in T_F^\rho$  と機械  $h \in M_F^\sigma$  の期間  $k \in T^\rho$  と機械  $h = \sigma$  の期間  $k \in T^\rho \cup U^\rho$  に対応する制約式 (20) には式 (27) を使用し, それら以外の制約式 (20) には式 (28), (29) を使用するものとする.

#### 4. 数値実験による検証

前節で提案した緩和固定法 (以下では RAF 法と呼ぶ) を

- 制約式 (20) を式 (27) で記述した場合の (P) の最適解を MIP ソルバーを用いて求める方法 (以下では MIP1 と呼ぶ)
- 制約式 (20) を式 (28) (29) で記述した場合の (P) の最適解を MIP ソルバーを用いて求める方法 (以下では MIP2 と呼ぶ)

と比較するために, 数値実験を実施した. 以下では,

次の 4.1 で、実験で使用した問題例の作成方法を示す。次いで 4.2 では実験で使用した PC および MIP ソルバーとそれらの環境を、4.3 では RAF 法, MIP1, MIP2 におけるパラメータ設定を示す。そして、4.4 では数値実験の結果と考察を示す。

#### 4.1 問題の作成方法

数値実験用の問題例は以下の (1)～(6) で作成した。

- (1) 機械  $h \in M$  における品目  $i \in N$  の単位量当たり生産費用  $p_i^h$  は次式で定めた。

$$p_i^h = U[1,10] \times 0.01 \quad (42)$$

ただし、 $U[1,10]$  は  $[1,10]$  の一様整数乱数である。

- (2) 品目  $i \in N$  の単位期間当たり単位量当たり在庫保管費用  $s_i$  と、品目  $i \in N$  の単位期間当たり単位量当たりバックオーダー費用  $b_i$  は次式で定めた。

$$s_i = U[1,10] \times 0.01 \quad (43)$$

$$b_i = U[1,10] \times 0.01 \quad (44)$$

ただし、 $U[1,10]$  は  $[1,10]$  の一様整数乱数である。

- (3) 機械  $h \in M$  における品目  $i \in N_0$  から品目  $j \in N_0$  への段取り時間  $r_{ij}^h$  は次式で定めた。

$$r_{ij}^h = U[1,50] \quad (45)$$

ただし、 $U[1,50]$  は  $[1,50]$  の一様整数乱数である。また、機械  $h \in M$  における品目  $i \in N_0$  から品目  $j \in N_0$  への段取り費用  $c_{ij}^h$  は上式の  $r_{ij}^h$  より次式で定めた。

$$c_{ij}^h = 0.1 \cdot r_{ij}^h \quad (46)$$

- (4) 品目  $i \in N$  の期間  $k \in T$  における需要量  $d_{ik}$  は次式で定めた。

$$d_{ik} = U[0,50] \quad (47)$$

ただし、 $U[0,50]$  は  $[0,50]$  の一様整数乱数である。

- (5) 機械  $h \in M$  における品目  $i \in N$  の単位量当たり生産時間  $a_i^h$  はすべて 1 とした。

- (6) 機械  $h \in M$  における期間  $k \in T$  の規定時間  $R_k^h$  は次式で定めた。

$$R_k^h = \left\langle \frac{\sum_{i \in N} \sum_{k \in T} a_i^h d_{ik} + C^h}{m \cdot t \cdot \phi} \right\rangle \quad (48)$$

ただし、 $\langle \cdot \rangle$  は  $\cdot$  以上の最小の整数を表す。ここで、 $\phi$  はパラメータで  $\phi = 2.2$  とした。また、 $C^h$  は機械  $h$  における全計画期間にわたる段取り時間の総和の上界値で、次の割当問題 ( $Q^h$ ) の最適値である。

$$(Q^h) \max. \sum_{(ik,jl)^h \in E^h} r_{ikjl}^h y_{ikjl}^h \quad (49)$$

$$\text{s.t.} \sum_{(j,l)^h \in V^h} y_{ikjl}^h = 1, (i,k)^h \in V^h \quad (50)$$

$$\sum_{(i,k)^h \in V^h} y_{ikjl}^h = 1, (j,l)^h \in V^h \quad (51)$$

$$y_{ikjl}^h \in \{0,1\}, (ik,jl)^h \in E^h \quad (52)$$

ただし、( $Q^h$ ) の目的関数の係数  $r_{ikjl}^h$  は

$$r_{ikjl}^h = \begin{cases} r_{ij}^h & (ik,jl)^h \in E^h \\ -\infty & \text{その他} \end{cases}, (ik,jl)^h \in E^h \quad (53)$$

である。

#### 4.2 実験環境

数値実験に使用した PC および MIP ソルバーとそれらの環境は以下の (1), (2) の通りである。

- (1) 使用計算機は Intel(R) Core(TM) i7-4770 CPU 3.40GHz の CPU と 8GB のメモリを搭載した PC (OS: Windows 7 Professional 64bit SP1) で、使用言語は C# (処理系: Microsoft Visual Studio 2013 Professional) である。
- (2) RAF 法, MIP1, MIP2 に使用した MIP ソルバーは Gurobi Optimizer Version 5.5<sup>5)</sup> (以下では Gurobi と略記する) である。

なお、(P) の式 (27) に含まれる制約式の数は、品目数  $n$  と期間数  $t$  に関して指数関数的に増大する。そのため、式 (27) を用いる RAF 法と MIP1 においては、その式に含まれる制約式をすべて陽に列挙することは実際のでない。これに対して、Gurobi には、そのような制約式を取り除いた問題から解き始め、新しい実行可能解が求まるたびに、それが満たさない制約式を追加する機能が備わっている。そこで、RAF 法と MIP1 における Gurobi の使用においては、その機能を積極的に利用した。

#### 4.3 パラメータ設定

RAF 法, MIP1, MIP2 におけるパラメータ設定については以下の (1)～(3) の通りである。

- (1) RAF 法のパラメータ  $W, t_\rho (\rho = 1, 2, \dots, W-1), u_\rho (\rho = 1, 2, \dots, W-1, \tau_\rho \rho = 1, 2, \dots, W-1)$  は、新たなパラメータ  $\mu (0 < \mu \leq t), v (0 \leq v < t - \mu), \xi (0 \leq \xi < t - \mu - v)$  を導入し、次のように定めた。ただし、 $\cdot$  は  $\cdot$  以上の最小の整数を表す。

$$W = \langle t/\mu \rangle \quad (54)$$

$$t_\rho = \rho\mu, \rho = 1, 2, \dots, W-1 \quad (55)$$

$$u_\rho = \begin{cases} t_\rho + v, & t_\rho + v < t \\ t, & \text{その他} \end{cases}, \rho = 1, 2, \dots, W-1 \quad (56)$$

$$\tau_\rho = \begin{cases} u_\rho + \xi, & u_\rho + \xi < t \\ t, & \text{その他} \end{cases}, \rho = 1, 2, \dots, W-1 \quad (57)$$

- (2) RAF 法のパラメータは  $\mu = 2, v = 0, \xi = 1$  とした。また、RAF 法における各 ( $P^{\rho\sigma}$ ),  $\rho = 1, 2, \dots, W, \sigma = 1, 2, \dots, m$  の計算は、相対誤差 (= (上界値 - 下界値) / 下界値) が 0.05 以下の実行可能解が求まれば終了とした。
- (3) MIP1, MIP2 の計算は計算時間 1800 秒で打ち切りとした。なお、打ち切りの場合には、その時点で求まっている最良解の目的関数値 (最良上界値) を出力した。

#### 4.4 数値実験の結果と考察

数値実験の結果を Table1～3 に示す。ただし、Table1～3 に関しては以下の (1), (2) の通りである。

- (1) Table1～3 の  $z_0$  は求まった最良解の目的関数値

(最良上界値)である。ただし、計算打ち切り時間 1800 秒以内に実行可能解が求まらなかった場合には「-」印を記した。

(2) Table1～3 の Time は計算時間で、単位は秒である。

算時間が増大し、 $n$  と  $t$  が同じ問題ならば、多くの場合、 $m$  が大きくなるほど計算時間が増大することを示唆している。さらに、MIP1, MIP2 の方が RAF 法よりも、多くの場合、より良い解が求まるが、RAF

Table 1 Computational results ( $m=3$ ).

| $n$ | $t$ | RAF Method |      | MIP1     |      | MIP2    |      |
|-----|-----|------------|------|----------|------|---------|------|
|     |     | $z_U$      | Time | $z_U$    | Time | $z_U$   | Time |
| 30  | 10  | 398.790    | 13   | 331.840  | 1421 | 491.760 | 1800 |
|     | 20  | 855.390    | 30   | 655.280  | 1800 | -       | 1800 |
|     | 30  | 1453.440   | 61   | 976.570  | 1800 | -       | 1800 |
| 40  | 10  | 448.470    | 29   | 394.470  | 957  | 405.620 | 1800 |
|     | 20  | 1024.880   | 97   | 930.440  | 1800 | -       | 1800 |
|     | 30  | 1782.490   | 188  | -        | 1800 | -       | 1800 |
| 50  | 10  | 572.910    | 90   | -        | 1800 | -       | 1800 |
|     | 20  | 1358.400   | 158  | -        | 1800 | -       | 1800 |
|     | 30  | 2195.420   | 288  | 1565.100 | 1800 | -       | 1800 |

Table 2 Computational results ( $m=4$ ).

| $n$ | $t$ | RAF Method |      | MIP1     |      | MIP2    |      |
|-----|-----|------------|------|----------|------|---------|------|
|     |     | $z_U$      | Time | $z_U$    | Time | $z_U$   | Time |
| 30  | 10  | 334.680    | 21   | 251.430  | 1800 | 258.350 | 1800 |
|     | 20  | 785.680    | 53   | 526.930  | 1800 | -       | 1800 |
|     | 30  | 1344.730   | 88   | -        | 1800 | -       | 1800 |
| 40  | 10  | 478.330    | 43   | 375.170  | 1800 | -       | 1800 |
|     | 20  | 905.670    | 107  | 663.880  | 1800 | -       | 1800 |
|     | 30  | 2023.530   | 163  | 2950.000 | 1800 | -       | 1800 |
| 0   | 10  | 481.340    | 113  | -        | 1800 | -       | 1800 |
|     | 20  | 1132.180   | 265  | -        | 1800 | -       | 1800 |
|     | 30  | 2288.380   | 462  | 1443.130 | 1800 | -       | 1800 |

Table 3 Computational results ( $m=5$ ).

| $n$ | $t$ | RAF Method |      | MIP1     |      | MIP2  |      |
|-----|-----|------------|------|----------|------|-------|------|
|     |     | $z_U$      | Time | $z_U$    | Time | $z_U$ | Time |
| 30  | 10  | 340.950    | 36   | 240.530  | 1800 | -     | 1800 |
|     | 20  | 975.680    | 94   | 716.100  | 1800 | -     | 1800 |
|     | 30  | 1860.090   | 114  | 1384.630 | 1800 | -     | 1800 |
| 40  | 10  | 463.070    | 134  | 375.420  | 1800 | -     | 1800 |
|     | 20  | 1267.290   | 196  | -        | 1800 | -     | 1800 |
|     | 30  | 2155.830   | 242  | -        | 1800 | -     | 1800 |
| 50  | 10  | 536.170    | 255  | -        | 1800 | -     | 1800 |
|     | 20  | 1256.740   | 493  | -        | 1800 | -     | 1800 |
|     | 30  | 2401.760   | 583  | -        | 1800 | -     | 1800 |

Table 1～3 の結果は、機械数が 3～5 で品目数が 30～50 でかつ期間数が 10～30 の問題であれば、RAF 法を用いて計算時間 600 秒以内に実行可能解が求まることを示している。また、 $n$  と  $t$  が大きくなるほど計

法を用いれば、MIP1 と MIP2 のいずれも計算時間 1800 秒以内に実行可能解を求めることができなかった問題に対しても、より少ない計算時間で実行可能解が求まることを示している。

## 5. 結論

当研究では、並列機械を対象とした場合の、バックオーダーと順序依存型段取り時間を考慮した多品目容量制約付きロットサイズ決定問題を取り上げ、それを混合 0-1 整数計画問題に定式化した。そして、その定式化の構造を利用した緩和固定法に基づく近似解法を提案し、その有効性を検証するための数値実験を実施した。その結果、提案した解法を用いれば、汎用の MIP ソルバーが計算時間 1800 秒以内に実行可能解を求めることができない問題に対して、より少ない計算時間で実行可能解が求まることを検証した。

しかしながら、提案法の実用性を高めるためには、求まる解を更に改良するとともに、計算時間の更なる短縮が必要である。それゆえ今後、解の改善方法や問題の縮小化方法などを開発し、提案法の一層の効率化を図る必要がある。

## 参考文献

- 1) 森山弘海, 水野浩孝, 羽田隆男 : バックオーダーと順序依存型段取り時間を考慮した多品目容量制約付きロットサイズ決定問題の解法, 日本ロジスティクスシステム学会誌, Vol.13, No.1, pp.97-104, 2013
- 2) 木内敦規, 森山弘海, 水野浩孝 : バックオーダーと順序依存型段取り時間を考慮した多品目容量制約付きロットサイズ決定問題に対する緩和固定法, 日本経営システム学会第51回全国研究発表大会講演論文集, pp.298-299,
- 3) M. Fischetti and P. Toth : “An Additive Approach for the Optimal Solution of the Prize Collecting Traveling Salesman Problem”, *Vehicle Routing: Methods and Studies*, B. L. Golden and A. A. Assad Edit., North-Holland, pp.319-343, 1988
- 4) V. Pochet and L. A. Wolsey : *Production Planning by Mixed Integer Programming*, Springer, pp.109-111, 2006
- 5) Gurobi Optimization, Inc. Gurobi Optimizer Reference Manual Version 5.5, 2013