

異種材料領域を有する薄肉平板の動的問題に対する境界要素法の応用

川上哲太郎*1・小倉洋一*2

Application of Boundary Element Method to Dynamic Problem for Composite Thin Plate

Tetsutaro KAWAKAMI and Youichi OGURA

Abstract

The plate is one of the basic structural members. Therefore, various researches both for the static and the dynamic plate problems have been carried out. However, in these research, the plate was supposed to constructed homogeneous material. The researches on the composite plate problems are carried out little.

The dynamic properties of composite plates are analyzed by the boundary element method in this study. The composite plate is defined in this analysis by combining an infinite thin plate and a finite thin plate, that is casted into the infinite plate, and whose material properties are different from the infinite plate. Therefore, the composite plate problem is reduced to a coupling problem of the two plates with different material properties.

To investigate the dynamic response of the composite thin plate, numerical analyses for some models are carried out. In these numerical analyses, the ratio of the flexural rigidity of the two plates and the angular frequency of the harmonic cyclic loading are chosen as the parameters. The numerical results of the relation between the ratio of the flexural rigidity of the two plates and the dynamic response of the deflection (lateral displacement), and the relation between the angular frequency of the harmonic cyclic loading and the dynamic response of the deflection are shown. The results show the dynamic response of the composite plates well, and also confirm the usefulness of the proposed method for the composite plate problems.

1. 序 論

平板は、最も基本的な構造要素の一つである。近年では、複合材料の使用などによる平板の構造的多様化に伴い、その力学的特性も複雑化してきている。したがって、これまで一般的に取り扱われてきた曲げやせん断、伸縮、ねじり等に関する静的問題のみならず、振動や波動伝播等の動的問題の解明も重要な課題となっている。

平板の動的問題に関する理論的解明は、Rayleigh (1889) や Lamb (1917) 以来、数多くの研究者により平板の振動や固有値問題としてなされてきた。しかしながら、線形弾性論に基づくいわゆる古典理論では、振動する平板の境界値問題に対する厳密解を見出すことは、一般的に困難であり、Rayleigh および Lamb の場合でも、ごく限られた条件のもとに厳密解を導いたにすぎなかった。したがって、平板の動的問題に対する理論的取り組みは、所要の境界条件に適した

弾性厳密解の近似解を見出すか、平板の近似理論の高次化を図ることとなり、現在においても活発に行われている（例えば（根岸，1994））。

一方、コンピュータの急速な発達とそれに伴う数値解析手法の進展は、構造解析の分野においても数多くの問題の解明に大きな影響を与えた。平板の動的問題に対しても、有限要素法や境界要素法などの数値解析手法を用いた研究が行われるようになり、その代表的研究の一つとして、Kitahara (1984) による境界要素法を用いた平板の固有振動問題の解析があげられる。さらにこれ以降、平板の振動問題を直接的な動的応答問題として取り扱った、数値解析的研究も数多く行われている（例えば（Danial, 1996））。筆者らもこれまで、任意形状の欠陥を有する薄肉平板の動的応答特性について、境界要素法による数値解析を行ってきた。（川上・小倉，2002）

以上のように、平板は基本的構造要素であるがために、古くから静的にも動的にも、理論解析的あるいは数値解析的に

2003年10月1日受理

*1 東海大学海洋学部海洋土木工学科

*2 株式会社 システムソフト

研究が行われてきていることがわかる。しかしながら、それらのほとんどが、平板を単一の材料物性で構成された均質材料として取り扱っており、平板内に材料物性の異なる領域を有する複合材料としての研究は行われていない。

そこで本研究では、平板領域内に任意形状の異種材料領域を有する薄肉平板の動的応答問題の解明を目的として、境界要素法による数値解析的アプローチを行ったものである。

解析手法としては、任意形状の孔を有する無限平板、その孔形状と同形状で板剛性の異なる有限平板を考え、それぞれの領域に対して各々支配方程式を定式化する。次に、無限平板に対しては外部問題として、有限平板に対しては内部問題として、たわみ及びたわみ角に関する境界積分方程式を定式化する。さらに、共通の境界上における、たわみ、たわみ角、曲げモーメント、せん断力についての連続条件を用いて、無限平板および有限平板に対する境界積分方程式を接続し、異種材料領域を有する平板に対する境界積分方程式系を定式化する。最終的に、この境界積分方程式系を離散化し数値的に解くことにより、共通の境界上での物理量とさらには、平板内の領域における物理量が得られる。本解析では、動的荷重として、無限平板内の任意点に調和振動荷重を作用させた。

本研究で取り扱った平板内の異種材料領域とは、腐食などによって発生した劣化領域や、逆に溶接などによって硬化した領域、さらには複合材料と想定することが可能である。したがって、本解析手法は、動的荷重作用下におけるこれら平板構造の力学特性の把握や、振動法などによる非破壊評価手法への応用など、広範囲な実際問題への拡張が可能であると考えられる。

2. 平板の動的問題の定式化

2.1 薄肉平板の支配方程式

等方、均質で一樣な厚さの線形弾性薄肉平板の運動方程式は、次の様に表せる。

$$\Delta^2 \bar{u} + \frac{\rho h}{K} \ddot{\bar{u}} = \frac{\tilde{p}}{K} \quad (1)$$

ここに、 Δ はラプラシアン、 $\bar{u} = \bar{u}(\mathbf{X}, t)$ はたわみベクトル、 $\tilde{p} = \tilde{p}(\mathbf{X}, t)$ は単位面積当りの垂直荷重、 ρ は密度、 h は平板の厚さであり、 K は板剛性を表し次式により与えられる。

$$K = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2)$$

ここで、荷重 $\tilde{p}$ および $\bar{u}$ たわみは、角周波数を ω とする $e^{-i\omega t}$ 時間因子を持つ時間調和振動するものと考え、時間調和振動する平板の運動方程式は、時間因子を省略した形で次のように表される。

$$(\Delta^2 - \lambda^4) \mathbf{u}(\mathbf{X}) = (\Delta - \lambda^2)(\Delta + \lambda^2) \mathbf{u}(\mathbf{X}) = \frac{p(\mathbf{X})}{K} \quad (3)$$

ここで、 $\lambda^4 = \frac{w^2 \rho h}{K}$ である。

2.2 基本解

ここでは、前節に示した支配方程式(3)式に対する基本解を導出する。無限平板の任意点 $\mathbf{Y}$ に単位集中力が垂直に作用する場合、平板内の任意点 $\mathbf{X}$ における応答を表す基本解 U が満足すべき微分方程式は次式の様に定義される。

$$\mathbf{L}U(\mathbf{X}, \mathbf{Y}; \lambda) = (\Delta + \lambda^2)(\Delta - \lambda^2)U(\mathbf{X}, \mathbf{Y}; \lambda) = -\delta(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \quad (4)$$

ここで、 $\mathbf{L}$ は随伴作用素を表し、 $\delta(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ はディラックのデルタ関数を表す。

上式の基本解 U を得るために、一般的な方法としてフーリエ変換を用いることとし(丹羽他, 1980)、フーリエ変換対を次のとおりに定義する。

$$\begin{cases} \hat{U}(\boldsymbol{\xi}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mathbf{X}\boldsymbol{\xi}} U(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \\ U(\mathbf{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{X}\boldsymbol{\xi}} \hat{U}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \end{cases} \quad (5)$$

(4)式の U に対するフーリエ変換より次式が得られる。

$$\hat{U}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{-1}{\xi^4 - \lambda^4} = \frac{-1}{2\lambda^2} \left\{ \frac{1}{\xi^2 - \lambda^2} - \frac{1}{\xi^2 + \lambda^2} \right\} \quad (6)$$

ここで、 $\xi = |\boldsymbol{\xi}|$ である。さらに、(6)式の逆変換を行うために、 $\mathbf{X} = (r, \theta)$ 、 $\boldsymbol{\xi} = (r, \theta_0)$ の様な極座標系を導入する。この表記法で $1/(\xi^2 - \lambda^2)$ の逆変換は次式の様に表される。

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{X}\boldsymbol{\xi}} \frac{1}{\xi^2 - \lambda^2} d\boldsymbol{\xi} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ir\xi \cos(\theta - \theta_0)}}{\xi^2 - \lambda^2} \xi d\xi d\theta_0 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\xi J_0(r\xi)}{\xi^2 - \lambda^2} d\xi \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 $J_0(\cdot)$ は0次のベッセル関数であり、 $r = |\mathbf{X} - \mathbf{Y}|$ である。(7)式を評価するために、以下の積分表現を導入する。

$$\int_0^{\infty} \frac{\xi J_0(r\xi)}{\xi^2 - \lambda^2} d\xi = \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(r\lambda) \quad (8)$$

従って、 U_1 の解が次式の様に得られる。

$$U_1 = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(r\lambda) \quad (9)$$

同様に、 U_2 の解は次式の様に得られる。

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{X}\boldsymbol{\xi}} \frac{1}{\xi^2 + \lambda^2} d\boldsymbol{\xi} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ir\xi \cos(\theta - \theta_0)}}{\xi^2 + \lambda^2} \xi d\xi d\theta_0 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\xi J_0(r\xi)}{\xi^2 + \lambda^2} d\xi = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(ir\lambda) \end{aligned} \quad (10)$$

最終的に、(4)式の解すなわち基本解は、次の様に表される。

$$\begin{aligned}
U(\mathbf{X}, \mathbf{Y}; \lambda) &= \frac{-1}{2\lambda^2} (U_1 - U_2) \\
&= -\frac{i}{8\lambda^2} [H_0^{(1)}(r\lambda) - H_0^{(1)}(ir\lambda)] \quad (11)
\end{aligned}$$

ここで、 $H_0^{(1)}$ は第 1 種 0 次ハンケル関数である。

2.3 積分表現

最初に、平板の内部・外部領域、境界等の定義を Fig. 1 に示す。図中において、 D は平板の支配方程式が定義されている内部領域、 D_c はその補領域である外部領域を表す。また、 $\mathbf{n}$ は外向き単位法線ベクトル $\mathbf{s}$ は接線ベクトルである。

平板のたわみとたわみ角に関する積分表現は、Green の公式と基本解より、領域内および境界上の 4 つの物理量すなわち、たわみ、たわみ角、曲げモーメント、等価せん断力を用いて定式化される。

平板のたわみに関する Green の公式は、次式の様に表される。

$$\begin{aligned}
&\int_D [v(\mathbf{L}u) - u(\mathbf{L}v)] dA \\
&= \int_{\partial D} [v(\mathbf{V}_n u) - (\partial_n v)(\mathbf{M}_n u) + (\mathbf{M}_n v)(\partial_n u) - (\mathbf{V}_n v)u] \quad (12)
\end{aligned}$$

ここで、 u はたわみ、 $\partial_n u$ はたわみ角、 $\mathbf{M}_n u$ は曲げモーメント、 $\mathbf{V}_n u$ は等価せん断力を各々表し、たわみ u の前に記してある記号は、それぞれの物理量を表す演算子である。

支配方程式(3)式の解 u を(12)式の u とし、(11)式の基本解 U を(12)式の v に代入したならば、次式のような内部問題におけるたわみに関する積分表現を得る。

$$\begin{aligned}
&-\int_{D_c} U(\mathbf{X}, \mathbf{Y}; \lambda) \frac{\partial(\mathbf{Y})}{K} dA_Y \\
&+ \int_{\partial D} [U(\mathbf{X}, \mathbf{y}; \lambda) \{\mathbf{V}_n u(\mathbf{y})\} - \{\partial_{ny} U(\mathbf{X}, \mathbf{y}; \lambda)\} \{\mathbf{M}_n u(\mathbf{y})\} \\
&+ \{\mathbf{M}_{ny} U(\mathbf{X}, \mathbf{y}; \lambda)\} \{\partial_n u(\mathbf{y})\} - \{\mathbf{V}_{ny} U(\mathbf{X}, \mathbf{y}; \lambda)\} \{u(\mathbf{y})\}] ds_y \\
&= -u_p(\mathbf{X}) + [\mathbf{S}(\mathbf{V}_n u)](\mathbf{X}) - [\mathbf{D}(\mathbf{M}_n u)](\mathbf{X}) + [\mathbf{M}(\partial_n u)](\mathbf{X}) \\
&\quad - [\mathbf{V}(u)](\mathbf{X})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} u(\mathbf{X}) & \mathbf{X} \in D \\ C_1^+ u(\mathbf{x}) & (=1/2 u(\mathbf{x}) \text{ 滑らかな境界}) \mathbf{X} = \mathbf{x} \in \partial D \\ 0 & \mathbf{X} \in D_c \end{cases} \quad (13) \\
&= \begin{cases} u(\mathbf{X}) & \mathbf{X} \in D \\ C_1^+ u(\mathbf{x}) & (=1/2 u(\mathbf{x}) \text{ 滑らかな境界}) \mathbf{X} = \mathbf{x} \in \partial D \\ 0 & \mathbf{X} \in D_c \end{cases} \quad (14) \\
&= \begin{cases} u(\mathbf{X}) & \mathbf{X} \in D \\ C_1^+ u(\mathbf{x}) & (=1/2 u(\mathbf{x}) \text{ 滑らかな境界}) \mathbf{X} = \mathbf{x} \in \partial D \\ 0 & \mathbf{X} \in D_c \end{cases} \quad (15)
\end{aligned}$$

同様に内部問題におけるたわみ角に関する積分表現は次式のようにになる。

$$\begin{aligned}
&-\int_{D_c} U(\mathbf{X}, \mathbf{Y}; \lambda) \frac{\partial(\mathbf{Y})}{K} dA_Y \\
&+ \int_{\partial D} [\partial_{nx} U(\mathbf{X}, \mathbf{y}; \lambda) \{\mathbf{V}_n u(\mathbf{y})\} ds_y \\
&- \int_{\partial D} [\partial_{nx} \partial_{ny} U(\mathbf{X}, \mathbf{y}; \lambda)] \{\mathbf{M}_n u(\mathbf{y})\} ds_y \\
&+ \int_{\partial D} \{\partial_{nx} \mathbf{M}_{ny} U(\mathbf{X}, \mathbf{y}; \lambda)\} \{\partial_n u(\mathbf{y})\} ds_y \\
&- \partial_{nx} \int_{\partial D} \{\mathbf{V}_{ny} U(\mathbf{X}, \mathbf{y}; \lambda)\} \{u(\mathbf{y})\} ds_y \\
&= -\partial_{nx} u_p(\mathbf{X}) + [\partial_{nx} \mathbf{S}(\mathbf{V}_n u)](\mathbf{X}) - [\partial_{nx} \mathbf{D}(\mathbf{M}_n u)](\mathbf{X}) \\
&\quad + [\partial_{nx} \mathbf{M}(\partial_n u)](\mathbf{X}) - \partial_{nx} [\mathbf{V}(u)](\mathbf{X}) \\
&= \begin{cases} \partial_{nx} u(\mathbf{X}) & \mathbf{X} \in D \\ -C_2^+ \partial_{nx} u(\mathbf{x}) & (=1/2 \partial_{nx} u(\mathbf{x}) \text{ 滑らかな境界}) \mathbf{X} = \mathbf{x} \in \partial D \\ 0 & \mathbf{X} \in D_c \end{cases} \quad (16) \\
&= \begin{cases} \partial_{nx} u(\mathbf{X}) & \mathbf{X} \in D \\ -C_2^+ \partial_{nx} u(\mathbf{x}) & (=1/2 \partial_{nx} u(\mathbf{x}) \text{ 滑らかな境界}) \mathbf{X} = \mathbf{x} \in \partial D \\ 0 & \mathbf{X} \in D_c \end{cases} \quad (17) \\
&= \begin{cases} \partial_{nx} u(\mathbf{X}) & \mathbf{X} \in D \\ -C_2^+ \partial_{nx} u(\mathbf{x}) & (=1/2 \partial_{nx} u(\mathbf{x}) \text{ 滑らかな境界}) \mathbf{X} = \mathbf{x} \in \partial D \\ 0 & \mathbf{X} \in D_c \end{cases} \quad (18)
\end{aligned}$$

ここで、 $u_p(\mathbf{X})$ は入力振動を表し、例えば、任意の 1 点 Y_0 に単位調和振動荷重が作用する場合には次のように表される。

$$u_p(\mathbf{X}) = (1/K) U(\mathbf{X}, \mathbf{Y}_0; \lambda) \quad (19)$$

内部問題と同様に、外部問題におけるたわみに関する積分表現は次のようになる。

$$\begin{aligned}
&-\int_{D_c} U(\mathbf{X}, \mathbf{Y}; \lambda) \frac{\partial(\mathbf{Y})}{K} dA_Y \\
&- \int_{\partial D} [U(\mathbf{X}, \mathbf{y}; \lambda) \{\mathbf{V}_n u(\mathbf{y})\} + \{\partial_{ny} U(\mathbf{X}, \mathbf{y}; \lambda)\} \{\mathbf{M}_n u(\mathbf{y})\} \\
&- \{\mathbf{M}_{ny} U(\mathbf{X}, \mathbf{y}; \lambda)\} \{\partial_n u(\mathbf{y})\} + \{\mathbf{V}_{ny} U(\mathbf{X}, \mathbf{y}; \lambda)\} \{u(\mathbf{y})\}] ds_y \\
&= -u_p(\mathbf{X}) - [\mathbf{S}(\mathbf{V}_n u)](\mathbf{X}) + [\mathbf{D}(\mathbf{M}_n u)](\mathbf{X}) - [\mathbf{M}(\partial_n u)](\mathbf{X}) \\
&\quad + [\mathbf{V}(u)](\mathbf{X}) \\
&= \begin{cases} u(\mathbf{X}) & \mathbf{X} \in D \\ C_1^+ u(\mathbf{x}) & (=1/2 u(\mathbf{x}) \text{ 滑らかな境界}) \mathbf{X} = \mathbf{x} \in \partial D \\ 0 & \mathbf{X} \in D_c \end{cases} \quad (20) \\
&= \begin{cases} u(\mathbf{X}) & \mathbf{X} \in D \\ C_1^+ u(\mathbf{x}) & (=1/2 u(\mathbf{x}) \text{ 滑らかな境界}) \mathbf{X} = \mathbf{x} \in \partial D \\ 0 & \mathbf{X} \in D_c \end{cases} \quad (21) \\
&= \begin{cases} u(\mathbf{X}) & \mathbf{X} \in D \\ C_1^+ u(\mathbf{x}) & (=1/2 u(\mathbf{x}) \text{ 滑らかな境界}) \mathbf{X} = \mathbf{x} \in \partial D \\ 0 & \mathbf{X} \in D_c \end{cases} \quad (22)
\end{aligned}$$

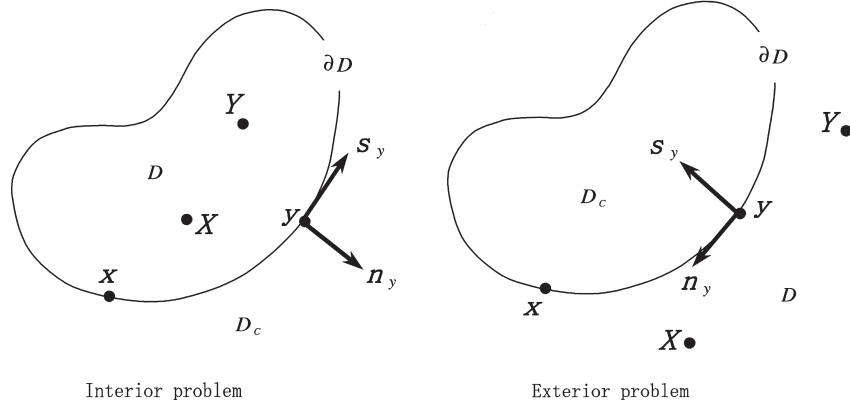


Fig. 1 Definition of interior problem and exterior problem

さらに、外部問題におけるたわみ角に関して次式を得る。

$$\begin{aligned}
& - \int_{D_-} \{ \partial_{n_x} U(\mathbf{X}, \mathbf{Y}; \lambda) \} \frac{p(\mathbf{Y})}{K} dA_Y \\
& - \int_{\partial D} [\partial_{n_x} U(\mathbf{X}, \mathbf{y}; \lambda)] \{ \mathbf{V}_n u(\mathbf{y}) \} ds_y \\
& + \int_{\partial D} [\partial_{n_x} \partial_{n_y} U(\mathbf{X}, \mathbf{y}; \lambda)] \{ \mathbf{M}_n u(\mathbf{y}) \} ds_y \\
& - \int_{\partial D} \{ \partial_{n_x} \mathbf{M}_{ny} U(\mathbf{X}, \mathbf{y}; \lambda) \} \{ \partial_n u(\mathbf{y}) \} ds_y \\
& + \partial_{n_x} \int_{\partial D} [\{ \mathbf{V}_{ny} U(\mathbf{X}, \mathbf{y}; \lambda) \} \{ u(\mathbf{y}) \}] ds_y \\
& = -(\partial_{n_x} u_p)(\mathbf{X}) - [\partial_{n_x} \mathbf{S}(\mathbf{V}_n u)](\mathbf{X}) + [\partial_{n_x} \mathbf{D}(\mathbf{M}_n u)](\mathbf{X}) \\
& \quad - [\partial_{n_x} \mathbf{M}(\partial_n u)](\mathbf{X}) + \partial_{n_x} [\mathbf{V}(u)](\mathbf{X}) \\
& \begin{cases} \partial_{n_x} u(\mathbf{X}) & \mathbf{X} \in D \\ -C_2^+ \partial_{n_x} u(\mathbf{x}) & (=1/2 \partial_{n_x} u(\mathbf{x}) \text{ 滑らかな境界}) \mathbf{X} = \mathbf{x} \in \partial D \\ 0 & \mathbf{X} \in D_c \end{cases} \quad (23) \\
& \begin{cases} \partial_{n_x} u(\mathbf{X}) & \mathbf{X} \in D \\ -C_2^+ \partial_{n_x} u(\mathbf{x}) & (=1/2 \partial_{n_x} u(\mathbf{x}) \text{ 滑らかな境界}) \mathbf{X} = \mathbf{x} \in \partial D \\ 0 & \mathbf{X} \in D_c \end{cases} \quad (24) \\
& \begin{cases} \partial_{n_x} u(\mathbf{X}) & \mathbf{X} \in D \\ -C_2^+ \partial_{n_x} u(\mathbf{x}) & (=1/2 \partial_{n_x} u(\mathbf{x}) \text{ 滑らかな境界}) \mathbf{X} = \mathbf{x} \in \partial D \\ 0 & \mathbf{X} \in D_c \end{cases} \quad (25)
\end{aligned}$$

上記の積分表現の内(13), (16), (20), (23)式は積分方程式であり、平板の内部領域において成立する。また, (14), (17), (21), (24)式は境界積分方程式であり、平板の境界上において成立する。実際の計算の過程では、最初に境界積分方程式を解き、境界上の物理量を決定し、その得られた境界上の物理量を積分方程式に代入することにより領域内部での物理量を得る。なお、上記の積分表現の具体的表示は、川上・小倉(2002)を参照されたい。

2.4 領域の接続

Fig. 2 に、領域の接続方法に関する概念を示す。\$D_1\$ は \$\partial D\$ を境界とする孔を有する無限平板を表し、\$D_2\$ は \$\partial D\$ を境界とする有限平板を表す。したがって、領域 \$D_1\$ では外部問題となり、境界 \$\partial D\$ 上において、境界積分方程式(21)式および(24)式が成立する。また、領域 \$D_2\$ では内部問題となり、境界 \$\partial D\$ 上において、境界積分方程式(14)式および(17)式が成立する。

この2つの領域 \$D_1\$ と領域 \$D_2\$ は、同一形状の境界 \$\partial D\$ を有し、また、境界上の物理量も同じであることから、この共通の境界上で各領域を接続し重ね合わせることが可能である。この接続を行った共通の境界を \$\partial D_c\$ と新たに定義する。

領域の接続条件は、境界 \$\partial D_c\$ 上で次の関係を満足するように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} u_1(\mathbf{x}) &= u_2(\mathbf{x}) \\ \partial_n u_1(\mathbf{x}) &= \partial_n u_2(\mathbf{x}) \\ \mathbf{M}_n u_1(\mathbf{x}) &= -\mathbf{M}_n u_2(\mathbf{x}) \\ \mathbf{V}_n u_1(\mathbf{x}) &= -\mathbf{V}_n u_2(\mathbf{x}) \end{aligned} \right\} = x \in \partial D \quad (26)$$

ここで、添字 1 と 2 は、領域 \$D_1\$ と領域 \$D_2\$ に関する量であることを表す。

上記の接続条件により接続された新たな領域は、異種材料領域を有する無限平板を表すことになる。また、接続境界 \$\partial D_c\$ 上において、境界積分方程式(14), (17)式および(21), (24)式が成立し、境界上で定義される未知量は(26)式に示された、たわみ、たわみ角、曲げモーメント、等価せん断力で

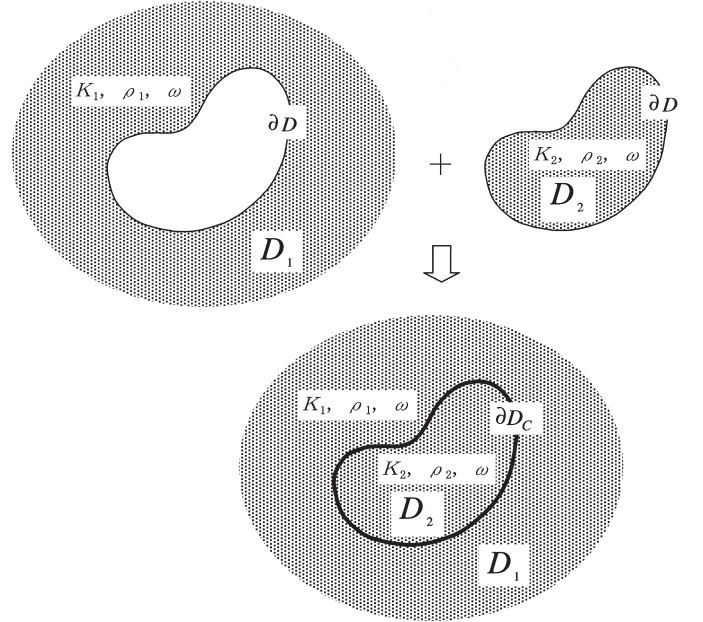


Fig. 2 Coupling of infinite plate and finite plate

あることから、未知量の数と方程式の数が一致する。したがって、境界積分方程式(14), (17), (21), (24)式を連立方程式として解くことが可能であり、接続境界上の未知量が決定される。

2.5 数値解析手法

ここでは、前節までに定式化された異種材料領域を有する平板の動的問題を解くことを考える。通常、境界積分方程式(14), (17), (21), (24)式を連立方程式として、解析的に解くことは不可能であることから、本研究では、境界要素法(BEM: Boundary Element Method)による数値解析手法を用いて解くこととする。境界要素法の特徴としては、計算精度が比較的高い、無限遠方の取扱いが容易であり波動問題に適している、計算容量が小さいなどがあげられる。

境界積分方程式(14), (17), (21), (24)式の積分を実行するために、Fig. 2 に示した領域 \$D_1\$ の境界 \$\partial D\$、および領域 \$D_2\$ の境界 \$\partial D\$ をそれぞれ同様に要素分割し離散化した後、数値積分を行う。ただしここでは、作用外力すなわち調和振動荷重は、領域 \$D_1\$ 内のみに存在するものとして考える。積分実行後の境界積分方程式(14), (17), (21), (24)式のマトリクス表現は次のようになる。

$$\begin{aligned} & -[\mathbf{S}_1(\mathbf{V}_n u_1)] + [\mathbf{D}_1(\mathbf{M}_n u_1)] - [\mathbf{M}_1(\partial_n u_1)] \\ & + \left[\left(-\frac{1}{2} \mathbf{I} + \mathbf{V}_1 \right) (u_1) \right] = u_p \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & -[\partial_{n_x} \mathbf{S}_1(\mathbf{V}_n u_1)] + [\partial_{n_x} \mathbf{D}_1(\mathbf{M}_n u_1)] - \left[\left(\frac{1}{2} \mathbf{I} + \partial_{n_x} \mathbf{M}_1 \right) (\partial_{n_x} u_1) \right] \\ & + \partial_{n_x} [\mathbf{V}_1(u_1)] = \partial_{n_x} u_p \end{aligned} \quad (28)$$

$$[\mathbf{S}_2(\mathbf{V}_n u_2)] - [\mathbf{D}_2(\mathbf{M}_n u_2)] + [\mathbf{M}_2(\partial_n u_2)] - \left[\frac{\mathbf{I}}{2} + \mathbf{V}_2(u_2) \right] = 0 \quad (29)$$

$$[\partial_{n_x} \mathbf{S}_2(\mathbf{V}_n u_2)] - [\partial_{n_x} \mathbf{D}_2(\mathbf{M}_n u_2)] + \left[\left(-\frac{\mathbf{I}}{2} + \partial_{n_x} \mathbf{M}_2 \right) (\partial_{n_x} u_2) \right] - \partial_{n_x} [\mathbf{V}_2(u_2)] = 0 \quad (30)$$

ここで、添え字 1, 2 は領域 D_1 および領域 D_2 に対応していることを表す。また、 $\mathbf{I}$ は単位行列を表し、次式のように表される。

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

この段階では、(27)～(30)式には 8 個の未知量が存在し、方程式の数 4 と一致していないことがわかる。つぎに、接続条件(26)式を(29), (30)式に代入し、領域の接続を行い、(27)～(30)式を連立一次方程式に変換する。最終的に解くべき連立一次方程式のマトリクス表現は、次のようになる。

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{S}_1 & \mathbf{D}_1 & -\mathbf{M}_1 & (-\mathbf{I}/2 + \mathbf{V}_1) \\ -\mathbf{S}_2 & \mathbf{D}_2 & \mathbf{M}_2 & -(\mathbf{I}/2 + \mathbf{V}_2) \\ -\partial_n \mathbf{S}_1 & \partial_n \mathbf{D}_1 & -(\mathbf{I}/2 + \partial_n \mathbf{M}_1) & \partial_n \mathbf{V}_1 \\ -\partial_n \mathbf{S}_2 & \partial_n \mathbf{D}_2 & -(\mathbf{I}/2 + \partial_n \mathbf{M}_2) & -\partial_n \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_n u_1 \\ \mathbf{M}_n u_1 \\ \partial_n u_1 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_p \\ 0 \\ \partial_n u_p \\ 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

上式を数値的に解くことにより、接続境界 ∂D_c 上での物理量が求められる。この得られた境界上の物理量を用いて各領域内部における物理量を求めることができる。例えば、領域 D_1 内での任意点におけるたわみは、(20)式に(32)式を解いて得られた境界上での物理量を代入することにより求めることができる。また、領域 D_2 内での任意点におけるたわみは、(32)式を解いて得られた境界上での物理量に(26)式を適用し、領域 D_2 における境界上での物理量に変換した後、(13)式に代入することにより求まる。

3. 数値計算

3.1 数値計算モデル

数値計算モデルを Fig. 3 に示す。数値計算モデルとしては、無限平板内に板剛性の異なる円形の異種材料領域を配置し、無限平板と異種材料領域との板剛性比および、入射波の角周波数をパラメータとする。数値計算結果としては、異種材料領域内およびその周辺の無限平板内の波動散乱場におけるたわみの応答分布を算定する。本解析で使用了材料物性値および解析パラメータを Table 1 に示す。また、本解析においては、調和振動する垂直荷重を円形異種材料領域中心より $y = 20a$ の位置に 1 点設定した。

3.2 数値計算結果

Fig. 4 に異種材料領域の板剛性 K_2 とその周辺の無限平板の板剛性 K_1 との比 $K_2/K_1 = 0.1$ および、調和振動荷重の角周波数 $\omega = 10000$ (rad/s) の場合における、異種材料領域およびその周辺領域でのたわみの分布を示す。図中において上部の図は計算結果の実部を表し、下部の図は虚部を表す。図

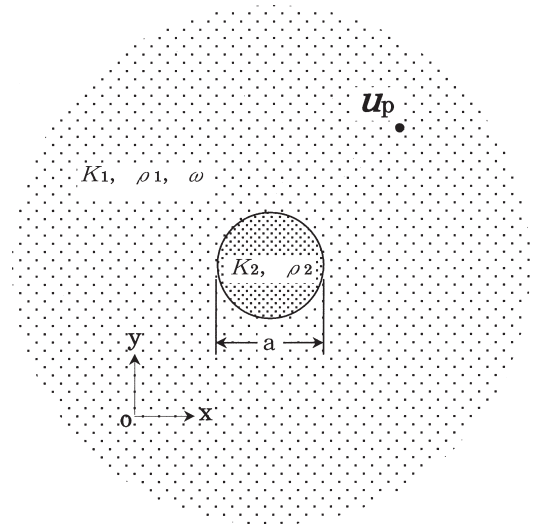


Fig. 3 Numerical analysis model

Table 1 Material properties and analysis conditions

a	(m)	1.0×10^{-3}
E_1	(kN/m ²)	1.96×10^4
ν_1		0.25
$\rho_1 = \rho_2$	(kg/m ³)	7.85×10^3
h_1	(m)	1.0×10^{-3}
K_1	(kN/m ²) (m ³)	1.74×10^{-4}
K_2/K_1		0.1 ~ 2.0
p	(N)	9.8
ω	(rad/s)	100, 1000, 10000

より異種材料領域においてたわみは周辺領域に比べて小さくなり、また、入射方向に対する異種材料領域の背後領域において、異種材料領域と同様にたわみの小さい領域が扇状に顕著に現われていることがわかる。さらに、異種材料領域周辺の平板領域で異種材料領域による波動の散乱の影響が見られる。

Fig. 5 に板剛性比 $K_2/K_1 = 0.5$ 、調和振動荷重の角周波数 $\omega = 10000$ (rad/s) の場合における、異種材料領域およびその周辺領域でのたわみの分布を示す。図より $K_2/K_1 = 0.1$ の場合と同様に、異種材料領域においてたわみは周辺領域に比べて小さく、また、異種材料領域の背後にたわみの小さい領域が扇状に現われていることがわかる。さらに、異種材料領域周辺の領域で異種材料領域による波動の散乱の影響が見られる。しかしながら、このような異種材料領域の存在によるたわみの分布に対する影響の傾向は、板剛性比が小さい Fig. 4 の場合に比べて小さくなっていることがわかる。

Fig. 6 に板剛性比 $K_2/K_1 = 0.9$ 、調和振動荷重の角周波数 $\omega = 10000$ (rad/s) の場合における、異種材料領域およびその周辺領域でのたわみの分布を示す。図より $K_2/K_1 = 0.1$, 0.5 の場合に見られた、異種材料領域の存在によるたわみの分布に対する影響はほとんど現われず、入射波が異種材料領域を有する平板内を比較的滑らかに伝播していることがわかる。

Fig. 7 に板剛性比 $K_2/K_1 = 1.5$ 、調和振動荷重の角周波数

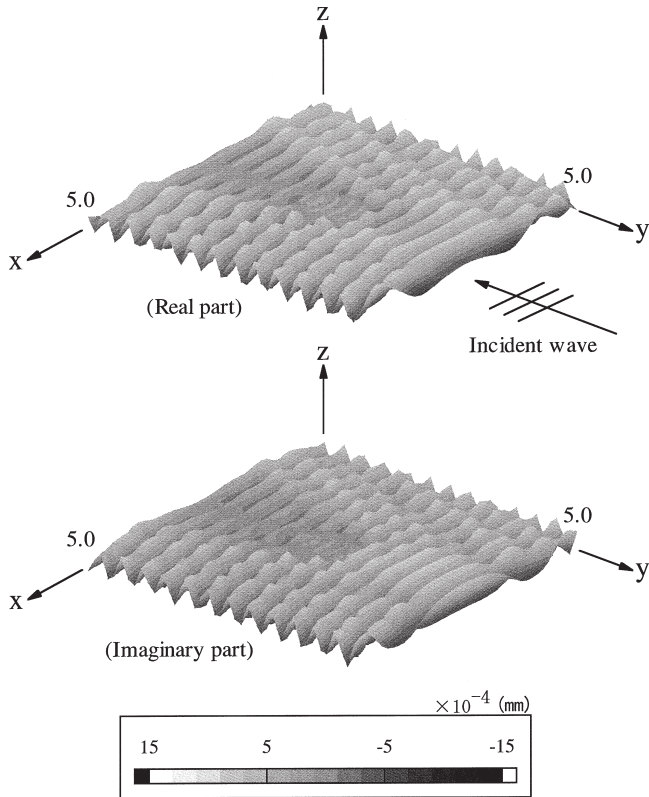


Fig. 4 Dynamic response of deflection ($\omega=10000$ (rad/s), $K_2/K_1=0.1$)

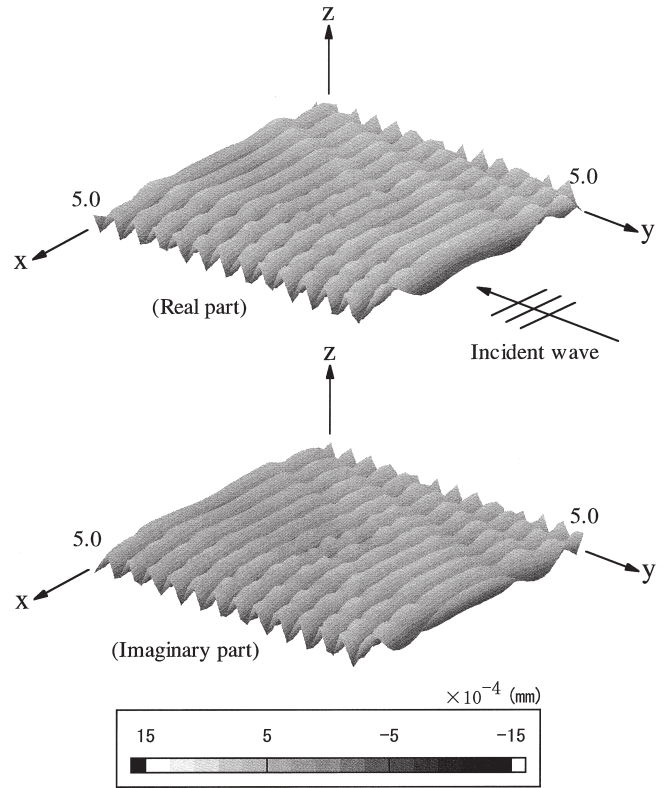


Fig. 6 Dynamic response of deflection ($\omega=10000$ (rad/s), $K_2/K_1=0.9$)

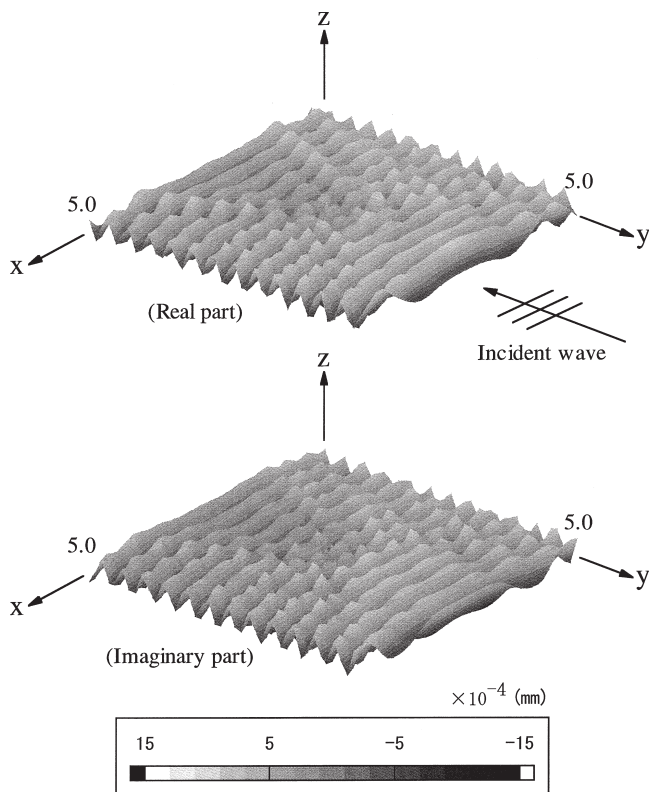


Fig. 5 Dynamic response of deflection ($\omega=10000$ (rad/s), $K_2/K_1=0.5$)

$\omega = 10000$ (rad/s) の場合における，異種材料領域およびその周辺領域でのたわみの分布を示す．図より板剛性比が1.0以下の場合とは明らかに異なる応答特性を示している．特に，異種材料領域内のたわみが周辺領域に比べて顕著に大きくなっており，その影響が，同心円状に周囲に現れている．他の板剛性比1.0以上の計算結果では，このような傾向はこれほど明確に現れていないことから，共振による現象であるとも考えられる．

Fig. 8 は板剛性比 $K_2/K_1 = 0.5$ ，Fig. 9 は板剛性比 $K_2/K_1 = 1.5$ でいずれも調和振動荷重の角周波数 $\omega=100$ (rad/s) の場合における，異種材料領域およびその周辺領域でのたわみの分布を示したものである．

これらの図より，調和振動荷重の角周波数 $\omega=100$ (rad/s) 程度の場合，すなわち入射波の波長が長くなると，板剛性比に関係なく異種材料領域による影響は顕著に現われず，比較的滑らかに波動が伝播することがわかる．しかしながら，Fig. 9 において異種材料領域が周辺領域より板剛性が高い，すなわち硬い材料となっていることから，周辺領域のたわみに追従できず，その影響が異種材料領域の両側に見られる．

4. 結 論

本研究は，板剛性が異なる領域を有する無限平板の動的応答特性の解明を目的に，平板の接続問題を定式化し，境界要素法による動的解析手法の開発と数値解析を行ったものである．本研究において得られた結論は，次のとおりである．

(1) 異種材料領域を有する平板の動的応答問題に対して，

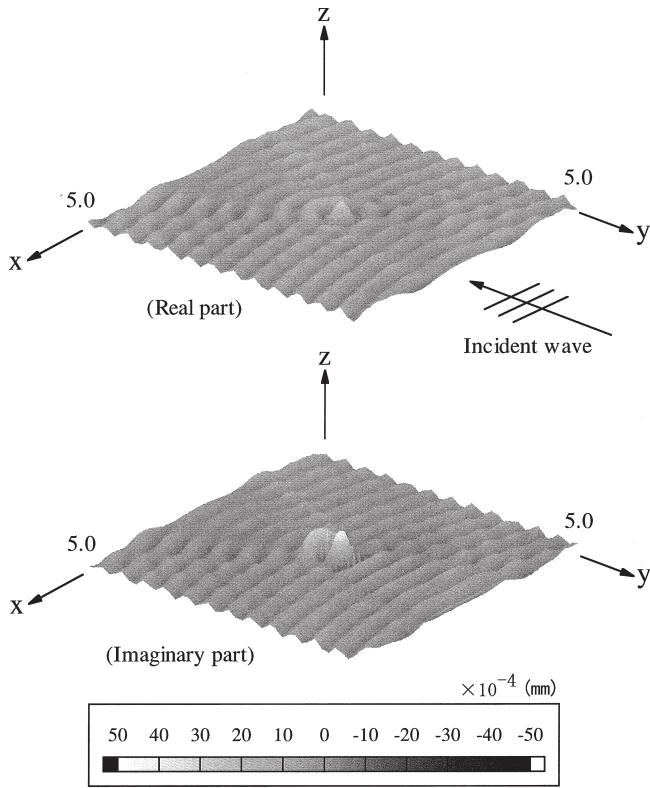


Fig. 7 Dynamic response of deflection ($\omega=10000$ (rad/s), $K_2/K_1=1.5$)

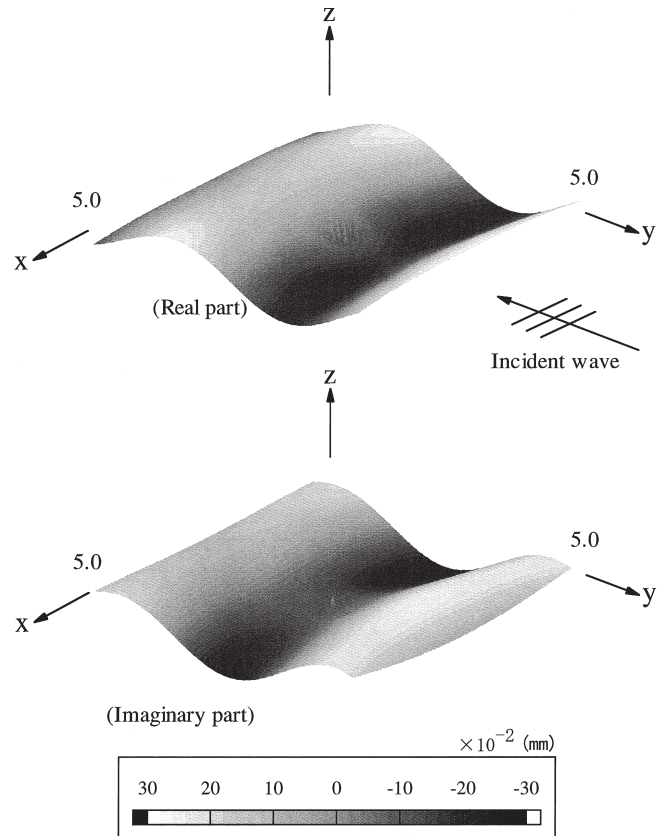


Fig. 9 Dynamic response of deflection ($\omega=100$ (rad/s), $K_2/K_1=1.5$)

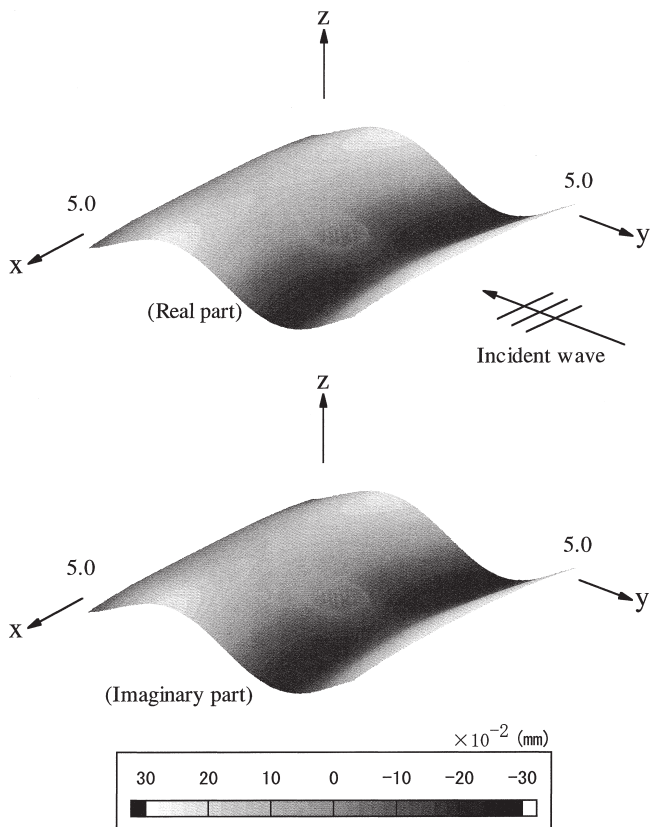


Fig. 8 Dynamic response of deflection ($\omega=100$ (rad/s), $K_2/K_1=0.5$)

境界要素法による解析手法が提案された。

- (2) 異種材料領域の板剛性が、周辺の平板の板剛性より低い場合、異種材料領域内のたわみの応答は周辺平板に比べて小さくなる傾向を示す。また、この傾向は異種材料領域の板剛性が低くなるにつれて顕著に現れる。
- (3) 異種材料領域の板剛性が、周辺の平板の板剛性より低い場合、入射方向に対する異種材料領域の背後領域において、たわみの応答が小さい領域が扇状に現れる。また、この傾向は異種材料領域の板剛性が低くなるにつれて顕著に現れる。
- (4) 異種材料領域を有する平板において、異種材料領域が共振によって考えられる卓越した応答を示すことが明らかとなった。

本研究では、異種材料領域の周辺平板を無限平板と仮定して定式化および数値計算を行ったが、これは問題を簡単化するためのものであり、何ら問題無く通常の平板同様に一般的な境界条件のもとに解析可能である。今後は、より詳細な数値解析を行って、異種材料領域を有する平板の動的特性を定性的かつ定量的に把握するとともに、各種境界条件下における動的特性の解明を行う。

参考文献

Danial, A. N., Doyle, J. F. and Rizzi, S. A. (1996): Dynamic analysis of folded plate structures, Journal of Vibration

- and Acoustics, Vol. 118, pp. 591-598.
- 川上哲太郎, 小倉洋一 (2002): 欠陥を有する薄肉平板の非破壊評価に関する基礎的研究, 東海大学紀要海洋学部, 第53号, pp. 45-59.
- Kitahara, M. (1984): Applications of Boundry Integral Equation Methods to Eigenvalue of Elastodynamics and Thin Plates, 京都大学学位論文, pp. 207-231.
- Lamb, H. (1917): On wave in an elastic plate, Proc. Roy. Soc., London, Ser. A93, pp. 114-128.
- 根岸嘉和 (1994): 平板・はり・複合構造の静的動的精密解析理論に関する総合研究, 京都大学学位論文, pp. 42-45.
- 丹羽義次, 小林昭一, 北原道弘 (1980): 積分方程式方による平板の固有値振動問題の解析, 土木学会論文報告集, 第304号, pp. 1-16.
- Rayleigh, L. (1889): On the free vibrations of an infinite plate of homogeneous isotropic elastic matter, Proc. Lond. Math. Soc., Vol. 20, pp. 225-234.

要 旨

平板は、最も基本的な構造要素の一つであり、近年、複合材料の使用などによる平板の構造的多様化に伴い、その力学的特性も複雑化してきている。また、平板は基本的構造要素であるがために、古くから静的にも動的にも、理論解析あるいは数値解析的にも研究が行われてきている。しかしながら、それらのほとんどは、平板を単一の材料物性で構成された均質材料として取り扱っており、平板内に材料物性の異なる領域を有する複合材料としての研究はほとんど行われていない。

そこで本研究では、平板領域内に任意形状の異種材料領域を有する薄肉平板の動的応答問題の解明を目的として、境界要素法による数値解析的アプローチを行ったものである。

本研究で取り扱った平板内の異種材料領域とは、腐食などによって発生した劣化領域や、逆に溶接などによって硬化した領域、さらには複合材料と想定することが可能である。したがって、本研究によって示された解析手法は、動的荷重作用下におけるこれら平板構造の力学特性の把握や、振動法等による非破壊評価手法への応用など、広範囲な実際的问题への拡張が可能であると考えられる。