

二等辺三角形の回転によるニュートリノ振動確率の表現

皆川裕希^{*1}, 北林照幸^{*2}

〒 259-1292 神奈川県平塚市北金目 4-1-1

東海大学 理学部 物理学科

^{*1}E-mail:4bsnm013@mail.tokai-u.jp

^{*2}E-mail:teruyuki@tokai-u.jp

(2014 年 9 月 24 日受付; 2014 年 11 月 14 日受理)

New Graphical Representation of Neutrino Oscillation Probability with Rotating Isosceles Triangle

by

Yuki MINAGAWA^{*1} and Teruyuki KITABAYASHI^{*2}

Department of Physics, Tokai University,

4-1-1 KitaKaname, Hiratsuka, Kanagawa, 259-1292, Japan

^{*1}E-mail:4bsnm013@mail.tokai-u.jp

^{*2}E-mail:teruyuki@tokai-u.jp

(Received on Sept. 24, 2014; accepted on Nov. 14, 2014)

Abstract

We propose a new method of graphical representation of the neutrino oscillation probability. A rotating isosceles triangle is employed for representation of the qualitative behavior of the oscillation pattern. Improving the quantitative predictability, we can regard our new method as an alternative way to represent the neutrino oscillation phenomena.

1 はじめに

電子ニュートリノ ν_e 、ミューニュートリノ ν_μ 、タウニュートリノ ν_τ の3つのフレーバーのニュートリノが実験によって確認されている（素粒子物理学ではニュートリノなどの素粒子の種類を区別する時に「フレーバー」という言葉が用いられている）。ニュートリノのフレーバーは量子力学的に混ざり合い、飛行距離に応じて変化する。この現象はニュートリノ振動現象とよばれている。ニュートリノ振動

現象によって、あるフレーバーのニュートリノが別のフレーバーに変化する確率（ニュートリノ振動確率）は、ニュートリノの混ざり具合を示す混合角 θ_{ij} 、ニュートリノ質量二乗差 Δm_{ij}^2 、エネルギー E 、飛行距離 L の4つのパラメータにより記述される ($i, j = 1, 2, 3$)。観測で得られている混合角のベストフィット値は

$$\begin{aligned}\sin^2 \theta_{23} &= 0.437, & \sin^2 \theta_{12} &= 0.308, & \sin^2 \theta_{13} &= 0.0234 & (\text{NH}) \\ \sin^2 \theta_{23} &= 0.455, & \sin^2 \theta_{12} &= 0.308, & \sin^2 \theta_{13} &= 0.0240 & (\text{IH})\end{aligned}\quad (1)$$

である [1]。NH はニュートリノの質量 m_1, m_2, m_3 が順階層 $m_1 \lesssim m_2 < m_3$ の場合、IH は逆階層 $m_3 < m_1 \lesssim m_2$ の場合である。

なぜ、これらの3つの混合角 θ_{ij} が観測された値を取っているのか？ 混合角の間に何らかの規則性はないのだろうか？ この問題はニュートリノ物理学の未解決問題の1つである。これら3つのニュートリノ混合角は、混合行列と呼ばれている 3×3 のユニタリー行列で表現できる。そして、混合角の間にある規則性の研究は、通常は混合行列が持つ対称性に着目して行われている。例えば、tribimaximal 混合行列 [2, 3] などの混合行列と A_4 対称性との関連が明らかになっている [4]。Tribimaximal 混合行列は混合角の観測値を近似的にしか再現できないが、行列がもつ対称性の研究が進んでいることから、新たな混合行列モデルを構築する時の基本モデルとして採用されることが多い。Tribimaximal 混合行列以外にも、対称性の研究が進んでおり実験結果を近似的に再現する混合行列として bimaximal 混合行列 [5] などが調査されている。

このように混合行列の対称性を用いた研究は精力的に行われているが、ニュートリノの混合角の観測値を完全に説明できる対称性の発見には至っていない。また、混合行列の中には、ニュートリノの質量に関する情報が入っていない。したがって、混合行列のみの議論では、混合角とニュートリノの質量との関連性を調査することはできない。今後も、混合行列の対称性に関する研究の重要性が増して行くことは間違いない。しかし、混合行列以外の別の数学的表現でニュートリノの混合角や質量を表すことができれば、混合行列の対称性に関する研究を補い、混合角や質量に関する規則性の更なる解明につながる可能性もある。

筆者等は、ニュートリノ振動確率の数学表現に対する新たなアプローチとして、回転図形による表現を調査した。ニュートリノ振動確率は混合角と質量の両方に依存している。このため、ニュートリノ振動確率の新たな数学表現の模索は、混合角と質量の関連を調査できる可能性も開く。現時点では、我々が得た回転図形によるニュートリノ振動確率の定量的な再現性は残念ながら高くはない。また、混合角と質量との間にある関連性も明らかにはできていない。しかしながら、2成分近似でのニュートリノ振動確率の定性的な振る舞いを回転する二等辺三角形で再現することに成功したので、本論で報告する。

2 ニュートリノ振動確率の回転図形表現

2.1 二等辺三角形による表現

2成分近似でのニュートリノ振動確率を次に示す [6]。

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{1.27 \Delta m^2}{E} L \right) \quad (2)$$

ここで、 θ と Δm^2 は2成分近似での混合角と質量2乗差である。まず

$$\begin{aligned}\omega &\equiv 1.27 \Delta m^2 [\text{eV}^2] \\ x &\equiv \frac{L [\text{km}]}{E [\text{GeV}]}\end{aligned}$$

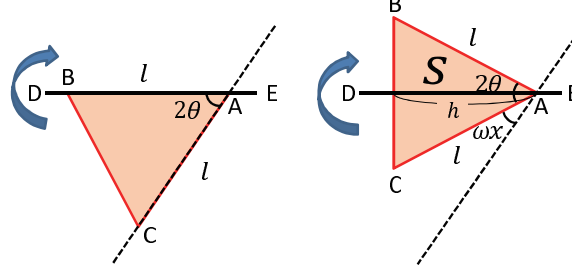


図 1: 回転させる二等辺三角形 $\triangle ABC$ 。等辺を AB, AC とし長さが l 、また頂角 $\angle BAC = 2\theta$ の二等辺三角形を角速度 ω で回転させる。頂点 A を通る直線 DE を超えた部分の面積を s とする。

を定義してパラメータを減らし、式 (2) を更に単純な形

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) &= \sin^2 2\theta \sin^2(\omega x) \\ &= \sin^2 2\theta \cdot P_{\omega x} \end{aligned} \quad (3)$$

で表しておく。ここで後のために $\sin^2 2\theta$ 以外の部分 ($\omega = 1.27\Delta m^2, x = L/E$ で決まる部分) を

$$P_{\omega x} \equiv \sin^2(\omega x) \quad (4)$$

と定義した。ニュートリノ振動確率 P は三角関数で記述されている。したがって、円運動をしている質点の運動が三角関数と関連付くように、振動確率 P も何らかの図形の回転で表せる可能性がある。式 (3) で求まる振動確率 P の値を、図形の回転から得られる何らかの量で表現することが我々の目的である。

本論では、等辺 AB, AC の長さが l 、頂角 $\angle BAC = 2\theta$ である二等辺三角形 $\triangle ABC$ を回転図形として採用する (図 1)。そして、頂点 A を回転の中心とし二等辺三角形 $\triangle ABC$ を角速度 ω で回転させる ($\omega = 1.27\Delta m^2$ は角速度の次元を持っていないが、 ω を角速度と見なす)。また、図 1 に示す通り二等辺三角形 $\triangle ABC$ が角度 ωx 回転した時に、頂点 A を通る直線 DE を超えた部分の面積を s とする。このとき、この面積 s で振動確率 P を表す可能性を探る。なお、以下では二等辺三角形 $\triangle ABC$ が回転した角度 ωx を回転角と呼ぶ。

面積 s は三角形を横切る直線の線分の長さ h を用いて

$$s = \frac{1}{2}lh \sin(\omega x) \quad (5)$$

と表せる。ここで h は正弦定理より

$$h = \frac{l \cos \theta}{\cos(\omega x - \theta)} \quad (6)$$

である。従って面積 s は

$$s = \frac{l^2 \cos \theta \sin(\omega x)}{2 \cos(\omega x - \theta)} \quad (7)$$

となる。面積 s を決定するためには、等辺の長さ l を定義する必要がある。本論では $\sin^2 \omega x = 1$ であるとき、すなわち $\omega x = \pi/2$ のときの等辺の長さ

$$l = \sin 2\theta \sqrt{2 \tan \theta} \quad (8)$$

を用いる。このように、等辺の長さ l はニュートリノの混合角 θ のみで決定される。 $\omega x = \pi/2$ のとき

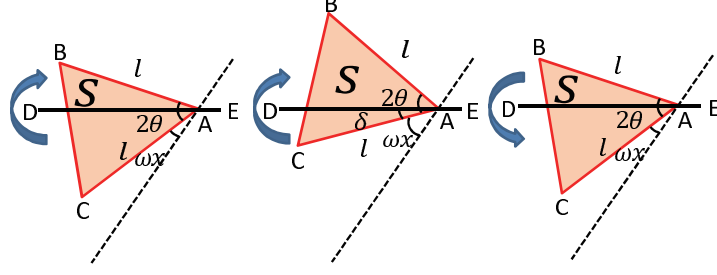


図 2: 逆回転する $\triangle ABC$ 。時計回りの回転を続けるとある角度において面積 s が発散してしまう。ニュートリノ振動確率 P が $0 \leq P \leq \sin^2 2\theta$ の範囲に納まるよう回転角 ωx を制限する。

の l を採用した理由は (3) 式より $P = \sin^2 2\theta$ となるとき、すなわちニュートリノ振動確率が最大となるとき物理量を面積 s に対応させるためである。式 (8) を式 (7) に代入すると、面積 s は

$$\begin{aligned} s &= \sin^2 2\theta \cdot \frac{\sin \theta \sin(\omega x)}{\cos(\omega x - \theta)} \\ &= \sin^2 2\theta \cdot s_{\theta\omega x} \end{aligned} \quad (9)$$

となる。ここで、式 (4) と同様に $\sin^2 2\theta$ 以外の部分を

$$s_{\theta\omega x} \equiv \frac{\sin \theta \sin(\omega x)}{\cos(\omega x - \theta)} \quad (10)$$

とした。式 (4) の場合とは異なり、 $s_{\theta\omega x}$ は ω と x だけではなく θ にも依存している点が異なっている。

式 (3) のニュートリノ振動確率 P が式 (9) の面積 s で完全に表現できる (すなわち $P = s$ である) ためには、混合角に関する部分 $\sin^2 2\theta$ は共通であるから、振動を表す部分 $P_{\omega x}$ と $s_{\theta\omega x}$ が等しく

$$\sin^2(\omega x) = \frac{\sin \theta \sin(\omega x)}{\cos(\omega x - \theta)} \quad (11)$$

を満たす必要がある。しかし、左辺 ($P_{\omega x}$) は連続関数であるのに対し右辺 ($s_{\theta\omega x}$) は $\omega x - \theta = \pi/2$ の時に発散する非連続関数であり、式 (11) が成立しないのは明らかである。また右辺 ($s_{\theta\omega x}$) の発散はニュートリノ振動確率が 1 を超えて無限に大きくなってしまいうことを意味するため、必ず回避しなければならない。そこでニュートリノ振動確率 P が $0 \leq P \leq \sin^2 2\theta$ の範囲に納まるように二等辺三角形の回転角 ωx に制限を与える。観測から $\sin^2 2\theta < 1$ であるため、回転角 ωx は頂角よりも小さく $\omega x < 2\theta$ を満たす必要がある。ここで、微小な角度 δ を用いると最大の回転角 (以下、最大角とよぶ) は $\omega x = 2\theta - \delta$ となる。(7) 式を二等辺三角形全体の面積 S を使って表すと、

$$s = \frac{S \sin(\omega x)}{2 \sin \theta \cos(\omega x - \theta)} \quad (12)$$

となり、 $\omega x = 2\theta - \delta$ とおくと

$$s = \frac{S (2S + \tan \delta \sqrt{l^4 - 4S^2})}{2S + \tan \delta (l^2 + \sqrt{l^4 - 4S^2})} \quad (13)$$

を得る。もちろん三角形が頂角分回転したとき、すなわち $\delta = 0$ のときには直線 DE を横切った二等辺三角形の面積 s と、二等辺三角形全体の面積 S は等しく $s = S$ となり一致する。

本論では、二等辺三角形の回転角が最大角に達したとき、すなわち $\omega x = 2\theta - \delta$ に達したとき、二等辺三角形が逆回転を開始するとする (図 2)。これで、式 (11) の右辺の無限大は回避できた。後は、式

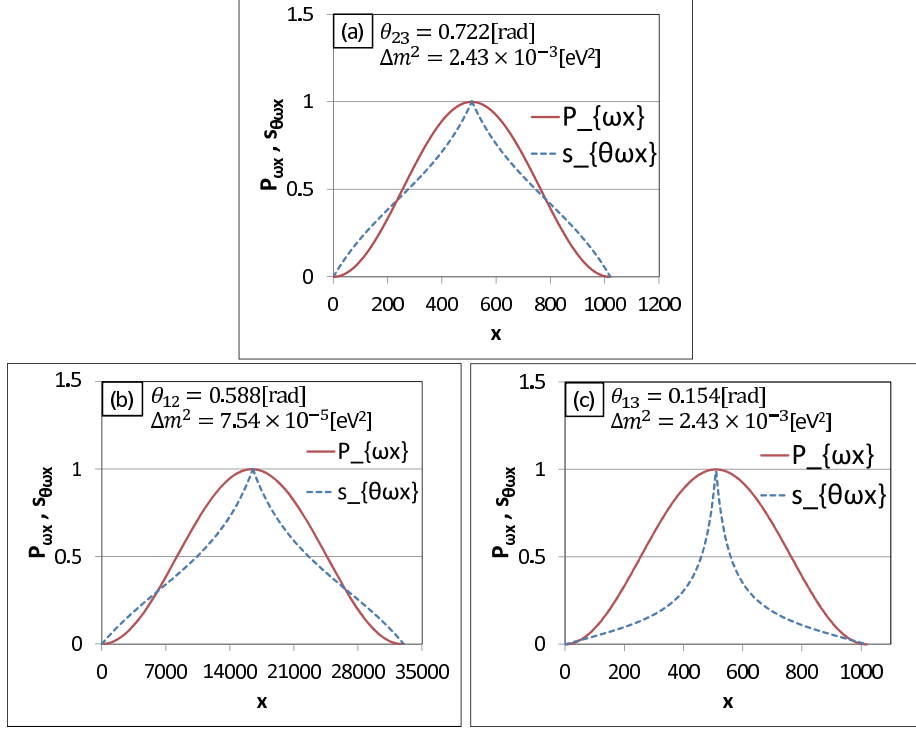


図 3: $s_{\theta \omega x}$ による $P_{\omega x}$ の再現性。実線が $P_{\omega x}$ を、点線が $s_{\theta \omega x}$ を表している。(a) は θ_{23} に対応した頂角を持つ二等辺三角形から $s_{\theta \omega x}$ を算出した場合、同様に (b) と (c) はそれぞれ θ_{12} および θ_{13} の場合を示す。

表 1: 各混合角 θ_{ij} に対応する質量二乗差 Δm^2 と二等辺三角形の諸量

混合角 $\theta[\text{rad}]$	質量二乗差 $\Delta m^2[\text{eV}^2]$	頂角 $2\theta[\text{rad}]$	等辺の長さ l	面積 S	角速度 ω	最大角 $2\theta - \delta[\text{rad}]$
$\theta_{23}=0.722$	2.43×10^{-3}	1.44	1.32	0.860	3.09×10^{-3}	1.56
$\theta_{12}=0.588$	7.54×10^{-5}	1.18	1.07	0.525	9.58×10^{-5}	1.48
$\theta_{13}=0.154$	2.43×10^{-3}	0.307	0.168	2.16×10^{-3}	3.09×10^{-3}	0.383

(11) の等号がどこまで近似的に成立するか ($P_{\omega x}$ と $s_{\theta \omega x}$ がどれだけ一致するか) が問題である。

2.2 再現性

図 3 は $s_{\theta \omega x}$ による $P_{\omega x}$ の再現性を示している。横軸は x 、縦軸は $P_{\omega x}$ もしくは $s_{\theta \omega x}$ であり、実線が $P_{\omega x}$ を、点線が $s_{\theta \omega x}$ を表している。 $s_{\theta \omega x}$ は頂角（混合角）にも依存する。図 3(a) は $s_{\theta \omega x}$ は混合角の観測値 $\theta_{23} = 0.722[\text{rad}]$ に対応した頂角 $2\theta_{23} = 1.44[\text{rad}]$ を持つ二等辺三角形を用いて求めたグラフである。この時の二等辺三角形の等辺の長さは $l = 1.32$ 、面積は $S = 0.860$ であり、振動確率の発散を抑制するための最大角は $1.56[\text{rad}]$ である。同様に (b) と (c) はそれぞれ θ_{12} と θ_{13} の場合のグラフであり、二等辺三角形の諸量は表 1 に示した通りである。

図 3(a) では、上に凸のカーブを描いている $P_{\omega x}$ の形を $s_{\theta \omega x}$ が大ざっぱには再現している。これは、混合角が $\theta_{23} = 0.722[\text{rad}]$ の場合には二等辺三角形の回転表現から求めた $s_{\theta \omega x}$ が $P_{\omega x}$ を定性的には

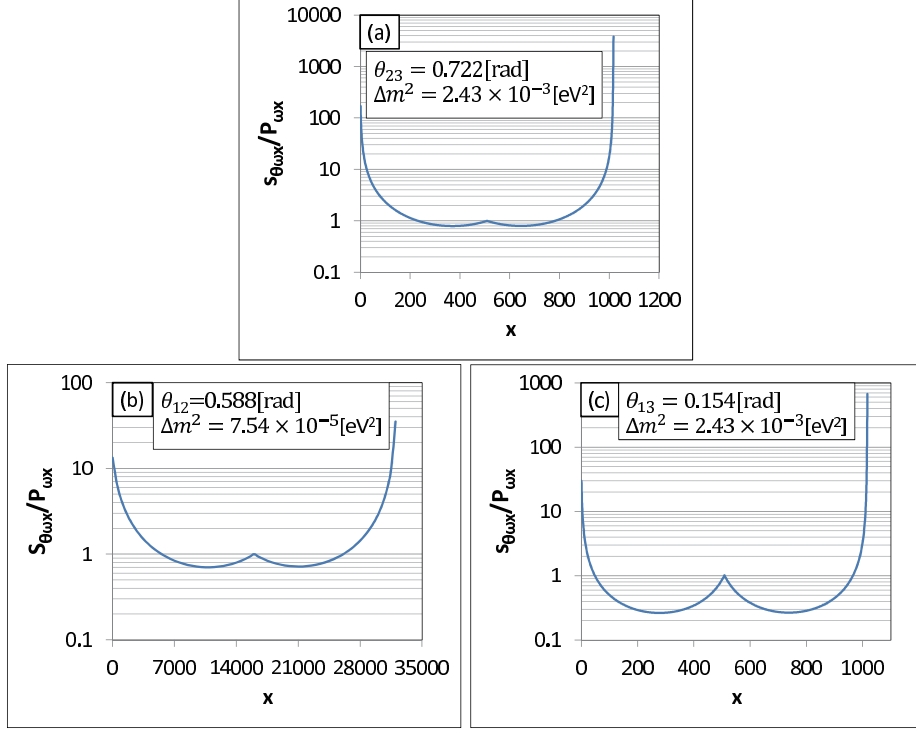


図 4: $P_{\omega x}$ に対する $s_{\theta\omega x}$ の比。(a) は θ_{23} に対応した頂角を持つ二等辺三角形から $s_{\theta\omega x}$ を求め $s_{\theta\omega x}/P_{\omega x}$ を算出した場合、同様に (b) と (c) はそれぞれ θ_{12} および θ_{13} の場合を示す。

再現しており、2成分近似ニュートリノ振動確率 $P = \sin^2 2\theta_{23} \cdot P_{\omega x}$ も二等辺三角形の回転で定性的には再現可能であることを示している。ただし、定量的な再現性は高くはない。比較的 x が小さい $0 \leq x \leq 2.33 \times 10^2$ の範囲では、 $s_{\theta\omega x}$ は常に $P_{\omega x}$ よりも大きくなっている。またこの範囲において $s_{\theta\omega x}$ は大きな誤差を生じている。実際 $x = 10$ の時の値を考えると、 $P_{\omega x}$ が 1.0×10^{-3} に対し $s_{\theta\omega x}$ は 2.5×10^{-2} を示しており、その相対誤差はオーダーで $10^3\%$ 以上となる。この相対誤差は x が小さい値の時ほど大きくなり、初めて 10% 以下となるのは $x = 2.1 \times 10^2$ の時である。その一方比較的 x が大きい $2.33 \times 10^2 \leq x \leq 5.10 \times 10^2$ の範囲では、 $s_{\theta\omega x}$ は常に $P_{\omega x}$ よりも小さくなる。またこの範囲での $P_{\omega x}$ との相対誤差は最大で 20.4% であり、 x が小さい時よりも高い再現性を示している。

図 3(b) の振る舞いは図 3(a) と同様である。したがって、混合角が $\theta_{12} = 0.588[\text{rad}]$ の場合にも 2成分近似ニュートリノ振動確率 $P = \sin^2 2\theta_{12} \cdot P_{\omega x}$ が二等辺三角形の回転で定性的には再現可能であることを示している。ただし、この場合も定量的な再現性は高くはない。 $0 \leq x \leq 6.00 \times 10^3$ の範囲では、 $s_{\theta\omega x}$ は常に $P_{\omega x}$ よりも大きくなっている。図 3(a) と同様この範囲では $s_{\theta\omega x}$ に大きな誤差が発生している。 $x = 1.0 \times 10^3$ においては $P_{\omega x}$ が 9.14×10^{-3} に対し $s_{\theta\omega x}$ が 5.94×10^{-2} となっておりその相対誤差はオーダーで $10^2\%$ 以上である。図 3(a) 同様 x が小さい時ほど誤差が大きくなり、初めて 10% 以下となる x の値は 5.5×10^3 であった。一方、比較的 x が大きく $6.00 \times 10^3 \leq x \leq 1.65 \times 10^4$ の範囲では、 $s_{\theta\omega x}$ は常に $P_{\omega x}$ よりも小さくなる。さらにこの範囲における相対誤差は、最大 29.5% となり図 3(a) 同様 x が小さい範囲の時よりも高い再現性を示した。しかし図 3(a) の x が大きい範囲における最大誤差が 20.4% であることを考えると、 $P_{\omega x} > s_{\theta\omega x}$ の範囲における再現性は混合角 $\theta_{23} = 0.722[\text{rad}]$ より $\theta_{12} = 0.588[\text{rad}]$ の方が低いことがわかる。

図 3(c) から、混合角が $\theta_{13} = 0.154[\text{rad}]$ の場合は θ_{23} や θ_{12} のときと比べて定性的にも定量的にも、二

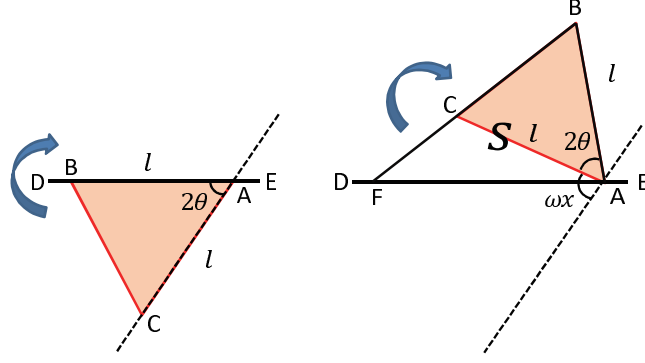


図 5: $\triangle ABC$ の回転角 ωx が頂角 2θ を超えて回転した場合。線分 CB を延長させ、直線 DE との交点を F とする。

等辺三角形の回転によるニュートリノ振動確率の再現性が著しく低下することが分かる。 $0 \leq x \leq 50$ の範囲では、 $s_{\theta\omega x}$ が $P_{\omega x}$ よりも大きくなっている。これより図 3(a) や図 3(b) に比べ $s_{\theta\omega x} > P_{\omega x}$ となる範囲が著しく狭くなっていることがわかる。だがしかし、 $0 \leq x \leq 50$ の範囲における相対誤差は図 3(a) や図 3(b) と同様大きくなっている。 $x = 10$ において $P_{\omega x}$ が 9.52×10^{-4} に対し $s_{\theta\omega x}$ が 4.76×10^{-3} となっており、相対誤差はオーダーで $10^2\%$ 以上であった。図 3(a) や図 3(b) と同様 x が小さいほど大きな誤差を持ち、始めて誤差 10% 以下となるのは $x = 45$ の時であった。 $50 \leq x \leq 510$ の範囲では $s_{\theta\omega x}$ が $P_{\omega x}$ よりも大幅に小さくなっている。この範囲における最大誤差は 73.5% であり θ_{23} や θ_{12} よりも著しく再現性が低いことがわかる。この原因として、 θ_{13} に対応した二等辺三角形の面積 S をみると θ_{23} や θ_{12} に比べ非常に小さい面積となっているためと考えられる。

図 3(a)(b)(c) のすべてに共通していることは、 x が小さいときには非常に誤差が大きくなってしまふ点である。この共通した振る舞いを図 4(a)(b)(c) に示した。図 4 の横軸は x 、縦軸は $P_{\omega x}$ に対する $s_{\theta\omega x}$ の比 $s_{\theta\omega x}/P_{\omega x}$ である。図 4(a) において $s_{\theta\omega x} \leq P_{\omega x}$ である $2.33 \times 10^2 \leq x \leq 5.10 \times 10^2$ の範囲の最小値は 0.796 である。同様に図 4(b) の $s_{\theta\omega x} \leq P_{\omega x}$ である $6.00 \times 10^3 \leq x \leq 1.65 \times 10^4$ の範囲の最小値は 0.705、図 4(c) の $50 \leq x \leq 510$ の範囲の最小値は 0.265 である。一方、 $x = 0$ 付近の比 $s_{\theta\omega x}/P_{\omega x}$ を見てみると図 4(a)(b)(c) とともに 10 以上と大きい誤差を示していることがわかる。これは図形の回転による $s_{\theta\omega x}$ の変化が $P_{\omega x}$ と比較し回転開始直後、急激に増加してしまっていることが原因であると考えられる。このことから筆者等は x が小さいときの誤差をいかに小さくしていくかが課題であると考えている。

また、回転角 ωx が頂角 2θ よりも小さくなるために最大角を導入したが、表 1 に示した通り、頂角 2θ よりも最大角の方が大きくなってしまった。これは、どの混合角 θ に対しても面積 S が 1 以下であることに由来する。混合角 θ_{23} に対応する三角形の面積 S は 0.860 であり、この値は $\sin^2 2\theta_{23} = 0.984$ よりも小さい。すなわち $\omega x < 2\theta$ の範囲において図形の回転表現による面積 s の最大値は 0.860、ニュートリノ振動確率 P の最大値は 0.984 であり、一致していない。この差を満たすために最大角が頂角 2θ よりも大きくなってしまったと考えられる。この時の二等辺三角形 $\triangle ABC$ の状態を図 5 に示した。 $\triangle ABC$ の面積 S は 0.860 である。逆回転を開始するときの面積 s は 0.984 であるため ωx は 2θ を超えてしまう。このとき、三角形を横切る直線の線分の長さとして定義されている h は線分 BC をのばしたときの直線 DE との交点 F を用いて、線分 AF の長さを満たす。したがって逆回転を開始するときの面積 s は $\triangle ABC$ の面積と $\triangle ACF$ の面積を足し合わせたものとなる。さらにいえば式 (11) で問題となった面積が発散している状態とは、さらに三角形が回転し直線 DE との交点 F が存在しなくなった時のことであ

る。なぜ最大角が頂角よりも大きくなってしまったことが問題なのかという一番の理由は、逆回転を開始するとき $\triangle ABC$ は完全に直線 DE を超えてしまっているため図 3 が発散に向かう途中でフィッティングされているということである。ほかの混合角 θ_{12}, θ_{13} においても同様のことが言える。この課題は $\triangle ABC$ の面積がニュートリノ振動確率 P の最大値より大きくなるよう等辺 l の長さを定義すれば回避できるのではないかと筆者等は考えている。

3 まとめ

我々は、ニュートリノ振動確率の数学表現に対する新たなアプローチとして、二等辺三角形の回転図形による表現を提案した。本論で導いた回転図形による表現を用いることで、混合角が θ_{23} および θ_{12} の場合には、ニュートリノ振動確率の振る舞いを定性的には再現可能であることを示した。ただし、定量的な再現性は高くない。混合角が θ_{23} の場合、 x が比較的小さいときには $10^3\%$ 以上のずれ、 x が比較的大きいときには最大で 20.4% のずれが生じた。混合角が θ_{12} の場合、 x が比較的小さいときには $10^2\%$ 以上のずれ、 x が比較的大きいときには最大で 29.5% のずれが生じた。混合角が θ_{13} の場合の再現性は定性的にも定量的にも著しく低く、 x が比較的小さいときには $10^2\%$ 以上、 x が比較的大きいときには最大 73.5% のずれが生じた。

このように、ニュートリノ振動確率の回転図形表現には改良が必須である。筆者等は (1) 図形の面積比をニュートリノ振動確率に対応させる、(2) 回転図形を二等辺三角形以外の図形に変更する、(3) 回転を表すパラメータの取り方を変える、(4) 回転軸となる点を別の点へ変更する、などの修正により再現性の向上が可能だと考えている。そして、ニュートリノ振動確率の再現性がよい回転図形が見つければ、その図形が持つ対称性や回転運動を詳細に調査することで、混合角と質量二乗差との関係や質量階級問題などの未解決問題の解決へもつながると考えている。

参考文献

- [1] F.Cappozzi, G.L.Fogli, E.Lisi, A.Marrone, D.Montanino and A.Palazzo, Phys. Rev. D **89**, 093018 (2014).
- [2] P.F. Harrison, D.H. Perkins and W.G. Scott, Phys. Lett. B **530**, 167 (2002).
- [3] Z.-Z. Xing, Phys. Lett. B **533**, 85 (2002).
- [4] G. Altarelli and F. Feruglio, Rev. Mod. Phys. **82**, 2701 (2010).
- [5] V.D. Barger, S. Pakvasa, T.J. Weiler, K. Whisnant, Phys. Lett. B **437**, 107 (1998).
- [6] 坂下健, 西村康宏, 南野彰宏, 日本物理学会誌, Vol.69, No. 4, 2014 年。