

位相同期から見出された周波数低減現象を応用した 除細動の可能性について

平井慶彦^{*1}, 南里憲三^{*2}, 秋山茂明^{*3}

^{*1} 元東海大学工学部電気工学科, ^{*2} 東海大学理学部物理学科, ^{*3} 医療法人日心会東洋医学科

〒392-0001 長野県諏訪市大和 1-24-9 セントベル諏訪湖 105 号

(2014 年 9 月 1 日受付; 2014 年 9 月 14 日受理)

On the Possibility of Defibrillation on the Basis of Application of Frequency Decreasing Phenomena Found in the Phase Synchronization

by

Yoshihiko HIRAI^{*1}, Kenzō NANRI^{*2} and Shigeaki AKIYAMA^{*3}

^{*1} Formerly Department of Electric Engineering, Faculty of Engineering, Tokai University,

^{*2} Department of Physics, School of Science, Tokai University,

^{*3} Department of Oriental Medicine, Nisshinkai Med. Corp.

1-24-9 St. Bell Suwa lake 105, Owa, Suwa, Nagano, 392-0001, Japan

(Received on Sept. 1, 2014; accepted on Sept. 14, 2014)

Abstract

When the a coefficient of interaction α is minus, the synchronization between two oscillators mutually lowers the frequency. This phenomenon indicates the frequency of an oscillator keeping the higher frequency can be lowered by the negative interaction of the other oscillator.

This study simulates Ventricular Fibrillation by the time series signals in the phase space of forced Van der Pol equation.

In interaction of time series in phase space unforced Van der Pol equation with $\alpha = -0.3$ to the above signal, frequency decreased approximately to $1/2$.

This result can be considered to suggest the possibility of making a practical application to Defibrillation.

1 はじめに

思考上の機械（チューリングマシン）で有名なイギリスの数学者 A. チューリングは、晩年の 1952 年に、受精卵が胚を形成する過程で、何故、空間対称性を破って複雑な形へと自己組織化できるのかと言う疑問に答えて、活性化因子（activator）と抑制因子（inhibitor）と言う 2 種類の形態形成因子の存在を仮定した。そして、化学反応と物質の拡散と言う二つの機構のみにより、均一な場が不均一化する可能性のあることを簡単な数学モデルを用いて見事に証明した [1]。

第 2 次世界大戦中は、電気回路網に取り組んでいたアメリカの数学者 N. ウィーナーが、戦後の 1945～1947 年、メキシコの国際心臓病研究所でメキシコ人の A. ローゼンブリュートと協力して、生体の制御機構をモデルとして、電気・電子系とのアナロジーから、サイバネティックスの萌芽を得たと言われている [2]。

1948 年に、ウィーナーが発表したサイバネティックス理論にとって重要な一連の原理について、チューリングは、抽象的機械の図式を用いて、数理理論学の分野のサイバネティックスとして証明している [3]。

高速電子計算機の祖と言われるチューリングは、ライプニッツが中国の陰陽論にヒントを得て 2 進法を発見したことに興味を持っていたと言われるので、「対称性の破れ」の議論でなされた「アクチベーター」と「インヒビター」の仮定は、恐らく、中国の陰陽論の示唆を受けているのではなかろうかと推測される。

古典陰陽論では、「全てのものは外性と内性を備えていて、形状と性相の 2 重構造になっている」と説かれている [4]。

チューリングが、この古典陰陽論を熟知していて、もし、その論理に示唆されたとすると、外性として活性化因子と抑制因子を仮定し、内性として化学反応と拡散反応を導入したのではなかろうかと解釈される。

一方、非線形 2 階微分方程式であるファンデルポール方程式は、1 階微分方程式の連立方程式に書き換えることにより、「アクチベーター」と「インヒビター」として機能することが分かっている [5]。

本論では、冒頭に引用したチューリングのアクチベーターとインヒビターの仮定に示唆されて、ファンデルポール方程式が、アクチベーターとインヒビターとして機能することを根拠に、心臓の拍動に対して、外性として「リズム現象」、内性として「引き込み現象」を仮定した。

ここでは、病的な心臓の拍動を「振動子 1」と仮定し、それを正常に戻す振動を、「振動子 2」と仮定した。2 つの振動子で構成された系には、「引き込み現象」が起り、正常に導くものと期待した。それは、引き込み現象は「時間領域」における自己組織化と言う考え方に立っているからである。つまり、系を構成する個々のリズムが、時間変動の位相を互いに調節することによって時間的秩序を生み出して行くのである。この秩序は、暫くの安定があり、再び不安定化し、また安定になる。これを繰り返す。従って、自己組織化とは平衡状態ではなく、進行しつつある状況が循環的に均衡を保っている非平衡定常状態と考えられている。

引き込み現象には、一般に、位相差が 0 となる正同期と、位相差が π となる逆同期が知られているが、ファンデルポール方程式系ではどちらにも属さない位相差が π よりも少し大きい同期現象があり得ると考えた [6]。そこで、数値実験は 2 種類行われた。一つは、相互作用係数 α に依存する「引き込み現象」の 3 パターンを確認した。もう一つは、その 3 種類の同期のパターンに対して、 α に依存して周波数が増えるもの、減るものとある事がわかったので、パターンに関わらず、周波数低減同期（位相差延長）現象を示すものを調べた。

その結果、周波数低減同期では、前者のパターンに比べて、より興味深い現象を示した。それは、位

相同期だけではなく、カオス状態の時系列信号に対して波形の沈静化と正常化を示したことである。この周波数低減現象は、生体に対しても安全性が高いので、徐細動に利用できる可能性があると思われた。

2 チューリング予想に基づくリミットサイクル振動の解析

2.1 チューリングの形態形成因子

チューリングが仮定した形態形成因子の一方の「アクチベーター」は、自己触媒的な物質である。すなわち、それを生成する反応がそれ自身の存在によって促進され、自己増殖的に量が增大するような物質である。もう一方の「インヒビター」は、活性化物質の崩壊反応を促す物質である。抑制物質は活性化物質の存在下で生成され、その支えなしには自ら崩壊すると言う性質をもつ。

これらの二物質は、「自己増殖する物質が、その増殖を妨げる物質を生成する」様な循環的なシステムを構成しているのである。この種の微妙なバランスを内蔵するシステムは、自然界には多くみられる。また、この反応が拮抗した状態は平衡状態ではなく、進行しつつある反応が循環的に均衡を保っている「非平衡状態」である。

2.2 新しい自然学の中で再認識される可能性のある陰陽理論

長年「科学的な知のありかた」に疑問を抱き、物理学に対して「自然学を提唱された京都大学大学院理学研究科教授（当時）の蔵本由紀先生は、現代科学の知の不均衡を是正するような過去数十年の学問的潮流として「開放系」「非線形」「複雑系」を挙げておられる。

また、M. ポラニーの「暗黙知」を取り上げて、そこで言う「創発」の概念を評価して、人間の日常感覚から離れてしまった科学から人間がよりよく生きるための科学を取り戻そうとする試みを提唱しておられる [7]。

要素還元論的な立場とは逆向きの流れを代表するものとして、パターン形成・自己組織化の物理を挙げておられて、ウィンフリーの提唱した「集団引き込み」を数学的に裏付ける「解きうるモデル」を発表され、Springer-Verlag 社から “Chemical Oscillations, Wave and Turbulence” を出版されている。

とくに、「開放系」「非線形」「複雑系」の学問的潮流のリーダーとして、優れた後進を育てられて、このグループから、多くの俊英が輩出している。

また、ウィンフリーのアイソクロンの概念とフローケの理論との関係を明らかにするなど、リミットサイクル振動子の結合系を扱うための理論的手法を導いて、この分野の研究を推進されている [7]。

そこで、我々が住む東洋に 4000 年来引き継がれてきた「陰陽論」に準拠する考え方が、人間がよりよく生きるための科学を取り戻そうとする試みの中に存在を許される場所があるかどうかを問うてみた。強いて言えば、僅かに一つだけ「要素還元主義」とは反するような立場にたっている事が共通するようになる。それは、「陰陽論」では、「太極」と呼ばれる中心があってそこから万物に力が及ぶと言う思想があるからである。「太極」は宇宙の始まりとも理解され、「みことば」と言われる [4]。これは、ヨハネによる福音書の冒頭の「初めにことばがあった」と不思議なことに共通する。また、物理学的にはエネルギーに類似した力を想像させる。もし、このような目に見えないエネルギーがあるとしたら、それが万物にくまなく伝わる方法としては、「振動子」の存在が想像できる。そのとき、振動子間にエネルギーを及ぼす手段は「引き込み現象」ではないかと思われるのである。

2.3 リミットサイクル振動におけるエネルギーの授受

ファンデルポール方程式で記述される系を考えてみる。ファンデルポール方程式には、およそ 4 種類がある [8]、第 1 の形の式を次に示す。

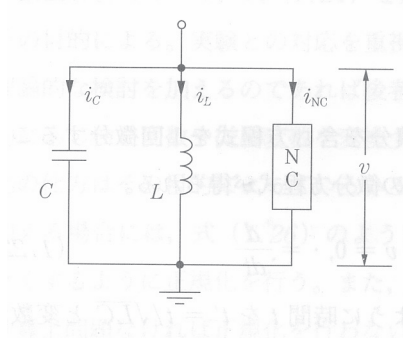


Fig. 2.1: ファンデルポール緩和発振回路

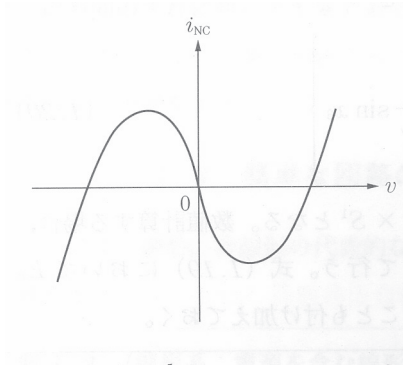


Fig. 2.2: 非線形コンダクタンスの電流-電圧特性

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \mu (x^2 - 1) \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (2.1)$$

上式で、 μ は非平衡度を示すパラメータと見做すことができ、 $\mu > 0$ のとき、次のように変形できる。

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\mu (x^2 - 1) \frac{dx}{dt} - x \quad (2.2)$$

いま、正弦波発振器の回路方程式は次式となる。

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -x \quad (2.3)$$

式 (2.3) の解は、 $x = \sin t$ となる。この回路はコンデンサー (C) とインダクタンス (L) の並列回路である。式 (2.2) の右辺をみると、式 (2.3) に $-\mu (x^2 - 1) \frac{dx}{dt}$ が加えられている。よって、式 (2.2) は、正弦波発振回路に、非線形コンダクタンス (NC) が付加された Fig. 2.1 のような回路の回路方程式であることがわかる。

Fig. 2.1 で、NC は、Fig. 2.2 に示すような電流-電圧特性をもっている。

Fig. 2.2 の 3 次曲線で表された非線形特性をみると、電圧の低い所で、負性抵抗を示し、高い所で正抵抗を示している。これは、振動が立ち上がり、或る所で落ち着くためには、回路にまず負性抵抗が接続され、振動の振幅がある程度大きくなると、それを抑える方向に正抵抗が接続される必要があるからである。

一方、Fig. 2.1 の NC を除いた回路素子をみると、インダクタンス L と静電容量 C が並列に接続されている。各々の素子の端子間電圧をみると、それぞれ、次式で表される。

位相同期から見出された周波数低減現象を応用した除細動の可能性について

$$v_L = L \frac{di(t)}{dt} \quad (2.4)$$

$$v_C = \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad (2.5)$$

式 (2.4) と式 (2.5) をみると、微分によって $i(t)$ に対し位相は $\pi/2$ 遅れ、積分によって $\pi/2$ 進むので、 v_L と v_C とは位相が π ずれていることがわかる。このことは、L には磁力線にエネルギーが保存され、C には電気力線にエネルギーが蓄えられるので、一周期 (2π) の間に、二つの素子の間で、エネルギーの蓄積と放出が交互に行われているとみることができる。

このように、系の内部でエネルギーの注入、放出（あるいは散逸）と言った過程が非線形振動を表わす式の中に自然な形で含まれている例は、摩擦を含む調和振動子、流体運動、化学反応など多くみられる。言い換えると、生命現象の中に頻繁に現れる「リズム現象」（心拍は典型的な例）の殆ど全てがエネルギーや物質の流れの中での非線形振動であると考えられる。

2.4 リミットサイクル振動における活性化因子と抑制因子

一般に、次のような x, y なる 2 変数の 1 階微分方程式を考えてみる。

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y) \quad (2.6)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y) \quad (2.7)$$

平衡点、すなわち、 $f = g = 0$ を満たす点を $(x, y) = (x_0, y_0)$ とする。この連立方程式において、平衡点の周りで $\partial f / \partial y$ と $\partial g / \partial x$ の符号が異なるとき、この系は、「アクチベータ・インヒビター系 (activator-inhibitor system)」と呼ばれる [5]。

いま、

$$\frac{\partial f}{\partial y} > 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} < 0 \quad (2.9)$$

とすると、 y は x を増やそうとするので、「活性化因子 (activator)」、 x は y を減らそうとするので、「抑制因子 (inhibitor)」となっている。

式 (2.2) のファンデルポール方程式は、1 変数の 2 階微分方程式であるが、次のような連立方程式で表された 2 変数のシステムと等価である。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -\mu(x^2 - 1)y - x \end{cases} \quad (2.10)$$

式 (2.10) は、式 (2.6)、式 (2.7) の形をしているので、次式が成立つ。

$$\frac{dx}{dt} = y \equiv f(x, y) \quad (2.11)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\mu(x^2 - 1)y - x \equiv g(x, y) \quad (2.12)$$

平衡点は $(0, 0)$ のまわりで、次式が成立つ。

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 > 0 \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -2\mu xy - 1 < 0 \quad (2.14)$$

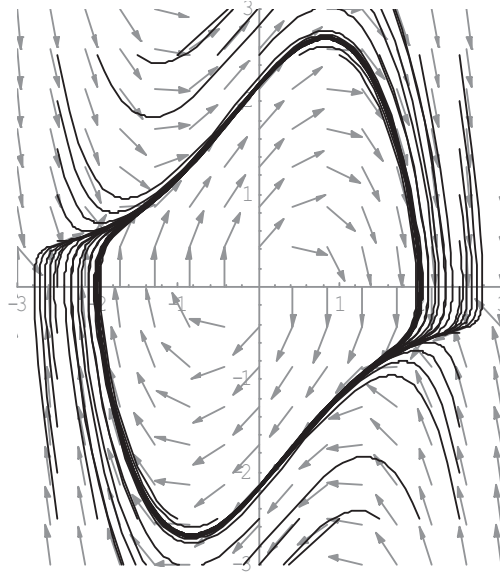


Fig. 3.1: ファンデルポール系の解軌道

よって、ファンデルポール方程式は、変数を増やして1階の連立微分方程式とみることにより、アクチベーター・インヒビター系として記述できることがわかる。ここで、式(2.10)、(2.12)、(2.14)の μ は非平衡度を示す非線形係数を表している。

3 引き込み現象で見られる周波数低減パターン

3.1 引き込み現象の起こる条件

引き込み現象は、いわゆる自己組織化現象の一種であり、時間領域に於ける自己組織化と言える。換言すれば、系を構成する個々の「振動」が、時間変動の「位相」を互いに調節することによって、新しい秩序を生み出していくのである。

このとき、時間によって一定の変動がある運動すなわち「振動」があれば全て引き込みが生ずるかと言うとそうではなく、引き込み現象を生ずるような「振動」は、閉軌道が一定の安定性をもっていて、多少の外力を受けても安定な場合に限る。一般的には、Cから少々ずれた色々な初期値から出発してもCに吸引されて、最終的には、その上に収束するという性質をもたねばならない。

次式で示されるような通常ファンデルポール方程式で記述される系は、実に、この軌道の漸近安定な性質をもっている代表的な系と言える。

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\mu(x^2 - 1)y - x \end{cases} \quad (3.1)$$

ここで、 μ は非線形係数を表す。式(3.1)の $\mu = 1$ としたときの解軌道とベクトルを重ね合わせたものをFig. 3.1に示す。

Fig. 3.1は、様々な初期値(状態点)から出発しても、中央の円が歪んだような軌道に収束していく様子が認められる。

上述のような性質をもつ振動は、「リミットサイクル振動」と呼ばれている。

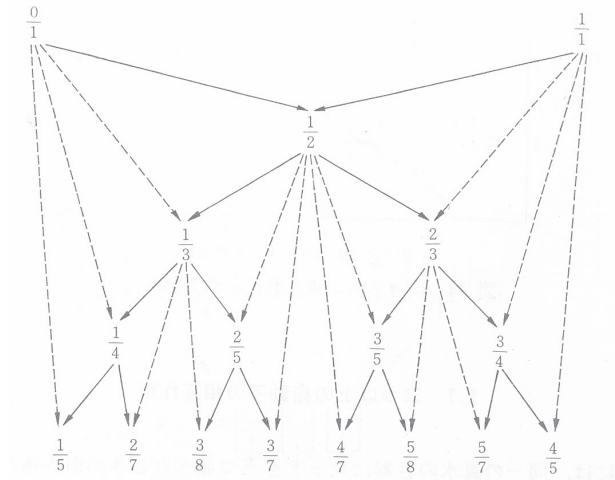


Fig. 3.2: ファーリー樹

3.2 引き込みの周波数比

熱力学第二法則は、「エントロピー増大の法則」によって自然現象は全て秩序が崩れていく方向に変化することを示してきた。然し、引き込み現象は、2つのリズムが自発的に同調して、「時間的・空間的な動秩序が自発的に形成される」ことを示した。これは「エントロピー増大の法則」に反する。然し、この矛盾は説明することができて、系の中でエネルギーの消費があるのである。即ち、エネルギーや物資の流れがある系（開放系と呼ぶ）の場合に、そのエネルギーによって自発的なリズム運動や振動が起こっていると理解されている。局所的に、エントロピーの低い部分ができるのは、ある時間継続する流れで、このような事が可能となり、局所的にエントロピーの低い構造は「解放系の散逸構造」と呼ばれている。そこで、2つの非線形振動子の引き込みのパターンを調べてみると、ある特徴のあることが分かった。文献 [10] から引用して、ファーリー樹を Fig. 3.2 に掲げた。

2つの振動数が1:1に同期したときを1/1と書き、振動数が1:2に同期したときは1/2と書く。一般に、引きこみの振動数は簡単な整数比になるが、それぞれの引き込みモードの間には、Fig. 3.1のような関係が成立つ。これをファーリー樹（Farey tree）と言う。

Fig. 3.2で2つの矢印でできる分数には、簡単なルールがあり、2つの分数を p/q 、 r/s と書くと、新たにできる分数は次式で与えられる。

$$\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s} = \frac{p+r}{q+s} \quad (3.2)$$

式 (3.2) の記号 $\oplus$ は、分母どうし、分子どうしを足し算する記号である。このようなルールで「ファーリー樹」はできているので、ファーリー樹の序列で、引きこみの勢力が決められていることがわかる [10]。

また、17世紀にオランダの物理学者 C. ホイヘンスが発見した2つの柱時計の間の引き込み現象は、1986年に、P. バックによって「悪魔の階段」として証明された [11]。

いま、2つの振動子で構成された系を考える。

最初に、2つの振動子が結合していない場合では、それらの運動は円筒表面上を回転するリミットサイクルになる。これを Fig. 3.3 に示す [9]。

円筒の両端を接合させると、トーラス状になるので、それらの軌跡は、2次元トーラス T^2 上にある。これを Fig. 3.4 に示す。

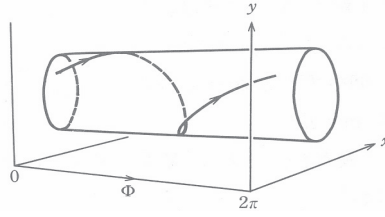


Fig. 3.3: 円筒上のリミットサイクル

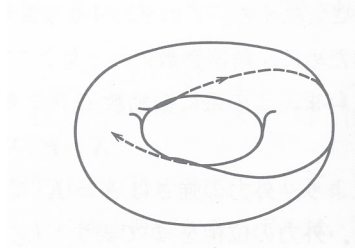


Fig. 3.4: 2次元トーラス T^2 上にあるリミットサイクル

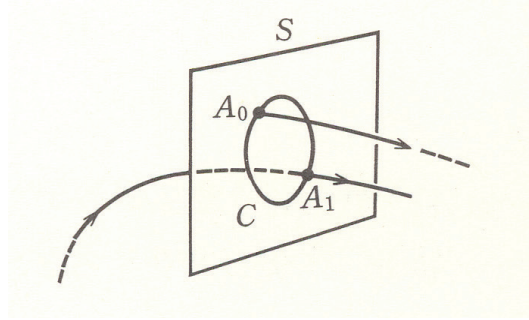


Fig. 3.5: ポアンカレ断面

トーラスを或る面で切断すると、平面 S ができる。これは「ポアンカレ断面」と呼ばれ、1次元トーラス T^1 の円 C が描かれる。これを Fig. 3.5 に示す。

このときのポアンカレ断面は次の関係式で与えられる [12]。

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad (3.3)$$

ここで、 ω_1 、 ω_2 は夫々、振動子 1 と振動子 2 の角周波数である。

次に、2つの振動子が相互作用をし合って、結合している場合では、ポアンカレ断面は、式 (3.3) に相互作用の項 F を付加した次式となる。

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \frac{\omega_2}{\omega_1} + F(\omega, \varphi) \quad (3.4)$$

結合初期の過渡現象が消え去った後には、 ω は φ のみの関数になるので、相互作用の項 F は、 φ のみの関数となる。 $F(\varphi)$ は、振動子間の相互作用によって発生した位相のずれである。よって、式 (3.4) は次式となる。

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \frac{\omega_2}{\omega_1} + F(\varphi_n) \quad (3.5)$$

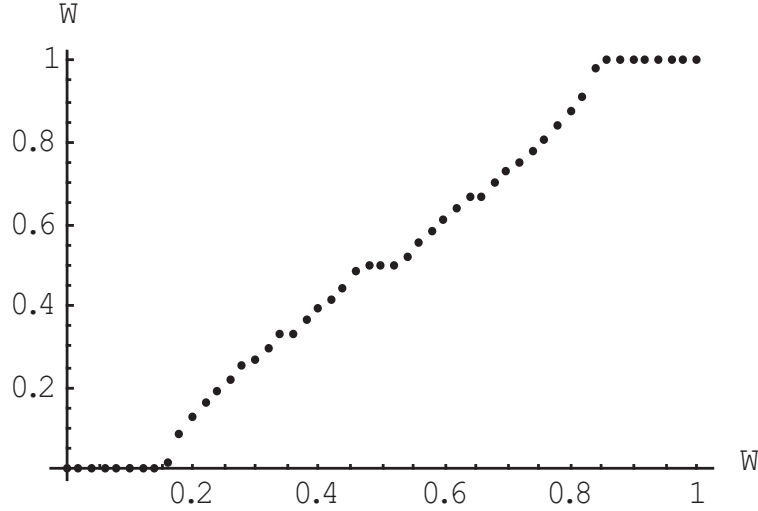


Fig. 3.6: 悪魔の階段

このとき、相互作用が周期的であるとして、次式で近似されることが多い。

$$F(\varphi) = -K \sin \varphi \quad (3.6)$$

ここで、 K は結合定数と呼ばれる。

また、位相角 φ_n を $\varphi_n = 2\pi \theta_n$ 、角周波数の比を $\omega_1 / \omega_2 = 2\pi \Omega$ と置き変えると、この関係式は次式で表される。

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi \theta_n) \pmod{1} \quad (3.7)$$

ここで、 $K > 0, 0 \leq \Omega < 1$ である。この差分方程式で表される写像は、Fig. 3.4 で言えば、円 C の上のある点 (A_0) を同じ円上の別の点 (A_1) に移す写像であるので、円写像と呼ばれる。

円写像で、Fig. 3.5 のポアンカレ断面 S を A_0 で貫いた後、軌道がトーラス軸方向に 1 周して、点 A_1 で再び S を貫くまでに、軌道はトーラスの軸まわりに何回巻きつくか、その数を「回転数」と呼んで W で表す。

すると、自然振動数の比 W_0 が外力との結合がない $K = 0$ の場合の回転数に等しくなるので、 W_0 を自然回転数と呼ぶ。引き込み現象においては、この自然回転数と真の回転数 W との関係が重要である。 $K = 1$ の場合には、常に、 $W = W_0$ で、 W と W_0 の座標上では、直線となり、 $K \neq 0$ の場合には、 W と W_0 の座標上では、 $W = 1$ に平坦部をもつような曲線が実現される。

そこで、系の性質が、巻数にどのように反映するかをみると、系が周期運動をする場合には、巻数 W が有理数になり、準周期運動をする場合には、巻数 W は無理数になる。カオス的な運動をする場合には定義ができない [12]。

いま、結合係数 K の値を $K = 1$ に近づけていくと、 W の有理数である間隔が広がる。 $K = 1$ では階段状の変化が見られる。階段の水平な部分の W の値は有理数になっている。この階段は「悪魔の階段 (Devil's staircase)」と呼ばれている。式 (3.7) で、 $K = 1$ とし、 W を Ω の関数として、マセマティカで計算したものを Fig. 3.6 に示した。

「悪魔の階段」の名前の由来は、引き込まれる前の元の周波数の比を横軸にして、引き込まれたときの周波数の比を縦軸にしたとき、「引き込みの勢力の範囲」が階段状になるからである。文献 [10] から引用して、引き込みの周波数比の勢力範囲を Fig. 3.7 に掲げた。

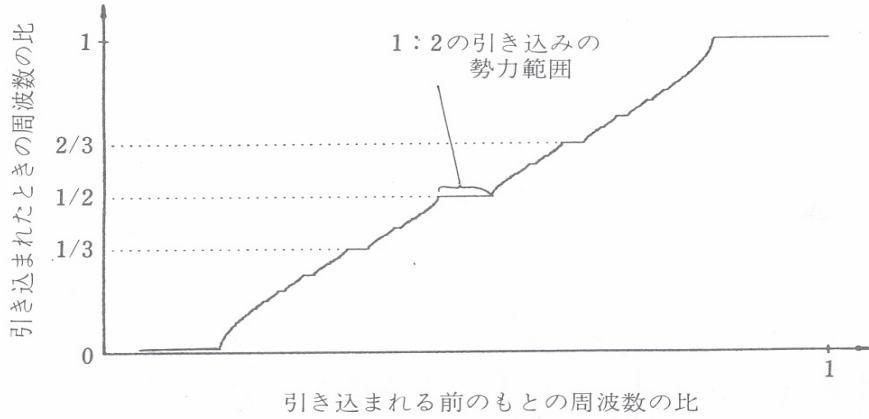


Fig. 3.7: 引き込みの勢力範囲

Fig. 3.7 から、引き込まれたときの周波数の比 W が $1:2$ のとき、引き込まれる前の元の周波数の比 Ω をみると、 W が $1:3$ の場合より大きくなっている。 W が $1:1$ のとき、 Ω は最も大きく、ファリー樹の場合の上に位置するモードの引き込みが起こり易いことを裏付けている。

3.3 具体的な引き込み現象の主な 3 つのパターン

いま、各振動子の変位が、 x_1, x_2 であるような二つの振動子があり、二つの振動子は比較的近くにあって相互作用をしているとする。その状態は次のように記述できるとする。

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = F(x_1; \omega_1) + G\left(x_1, x_2, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}\right) \quad (3.8)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = F(x_2; \omega_2) + G\left(x_2, x_1, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_1}{dt}\right) \quad (3.9)$$

ここで、 G は相互作用の項で、最も単純な 2 つの振動子の変位の差に応じて力が加わる相互作用と仮定すると、次式のように表される。

$$G\left(x, \tilde{x}, \frac{dx}{dt}, \frac{d\tilde{x}}{dt}\right) = \alpha (\tilde{x} - x) \quad (3.10)$$

ここで、 α は、相互作用の強さを表す定数である。

二つの振動子を数学的に表す方法は色々あるかもしれないが、ここでは文献 [5] を参考にして角周波数 ω_2 と ω_1 の比によって二つの方程式を作ることにする。

基本となる振動子は、リミットサイクルを形成することがわかっている次式のようなファンデルポールの式で表されるものとする。

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\mu (x^2 - 1) \frac{dx}{dt} - x \quad (3.11)$$

いま、式 (3.11) で、 $\mu = 1$ として、両辺に $(\omega_2 / \omega_1)^2$ をかけると、

$$\frac{d^2 x}{d(\omega_1 t / \omega_2)^2} = -\frac{\omega_2}{\omega_1} (x^2 - 1) \frac{dx}{d(\omega_1 t / \omega_2)} - (\omega_1 / \omega_2)^2 x \quad (3.12)$$

Fig. 3.6 の W の平坦部分に入る引き込み領域を考慮し、 $\omega_2 / \omega_1 = 0.91$ とおくと、 $\omega_2 = 0.91 \omega_1$ となるので、第 1 の振動子の $\omega_1 = 1$ とすると、 $\omega_2 = 0.91$ となる。

第 2 の振動子は、 $\omega_1 t / \omega_2 = \tau$ と時間を t から τ に変数変換された次式で表される。

位相同期から見出された周波数低減現象を応用した除細動の可能性について

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} = -0.91(x^2 - 1) \frac{dx}{d\tau} - 0.91^2 x \quad (3.13)$$

2つの振動子の式が相互作用するときの連立方程式は、第1の振動子の変位を x 、第2の振動子の変位を y とし、式 (3.13) の τ を t と読み直せば、次式となる。

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = -(x^2 - 1) \frac{dx}{dt} - x + \alpha(y - x), \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = -0.91(y^2 - 1) \frac{dy}{dt} - 0.91^2 y + \alpha(x - y) \end{cases} \quad (3.14)$$

(1) 正相 ($\Delta\varphi = 0$) に同期するパターン

$\alpha = 1.0$ のときの引き込み現象を Fig. 3.8 に示す。但し、境界条件は、第1の振動子では $x(0) = 2$ 、 $x'(0) = 0$ 、第2の振動子では $y(0) = 0$ 、 $y'(0) = 0$ である。

Fig. 3.8 では、約 30 秒で同期し、350 秒から 400 秒まで同期は安定している。

(2) 逆相 ($\Delta\varphi = \pi$) に同期するパターン

$\alpha = 0.9$ のときの引き込み現象を Fig. 3.9 に示す。

Fig. 3.9 では、約 40 秒から逆相に同期し、400 秒まで安定に逆相同期している。

(3) 位相差が π よりずれて同期する場合

$\alpha = 0.3$ の場合を Fig. 3.10 に示す。

Fig. 3.9 では、位相差が正相でもなく逆相でもなく、位相差が π から少しずれて、約 20 秒後から 400 秒に亘って同期している [6]。

また、通常のカテゴリに従い位相同期を正相、逆相、どちらでもない場合の順に表示したが、 $\alpha = 0.3 \sim 1.0$ を小さい順にみると、50 秒間にピーク数は、 $\alpha = 0.3$ では 9、 $\alpha = 0.9$ では 13、 $\alpha = 1.0$ では 7 となり、逆相同期の場合は α が増えるにつれて周波数が増えている。反対に、逆相同期から正相同期に変わるような場合、 $0.9 \leq \alpha \leq 1.0$ では周波数が急激に約 1/2 に低減している。

3.4 周波数低減パターン

位相同期は、 α がマイナスの値でも起こるので、その例を Fig. 3.11 に示す。

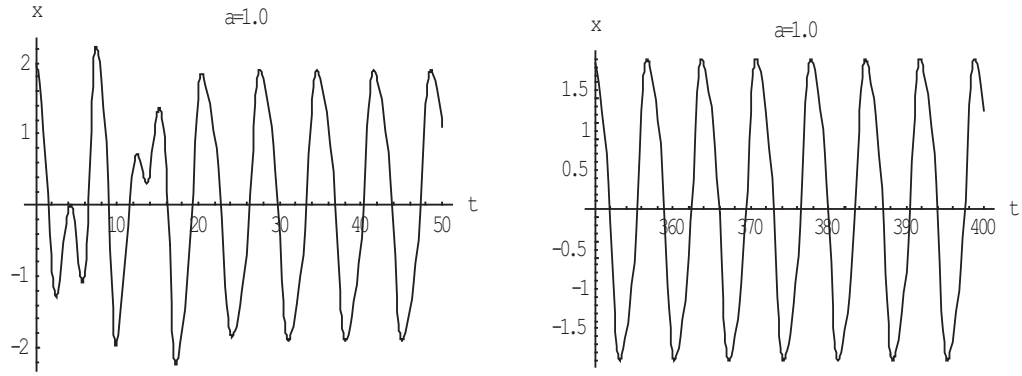
$\alpha = -0.2$ 以下では同期は起こらない。細かいデータは省略するが、Fig. 3.12 に α がマイナスのとき、周波数が低減して同相に同期するパターンを示した。

以上のように、相互作用係数 α は、同期の形態を決めるばかりでなく、振動子の周波数を制御することができる。この性質は、早いリズムを遅くすることが可能で、頻脈などの異常なリズムの正常化に応用できることを示唆している。

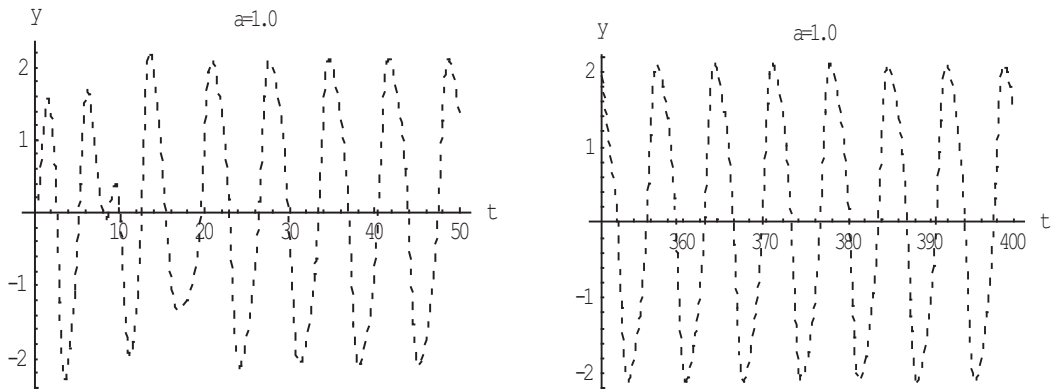
4 周波数低減現象の臨床応用への可能性

4.1 カオス辺縁領域の現象

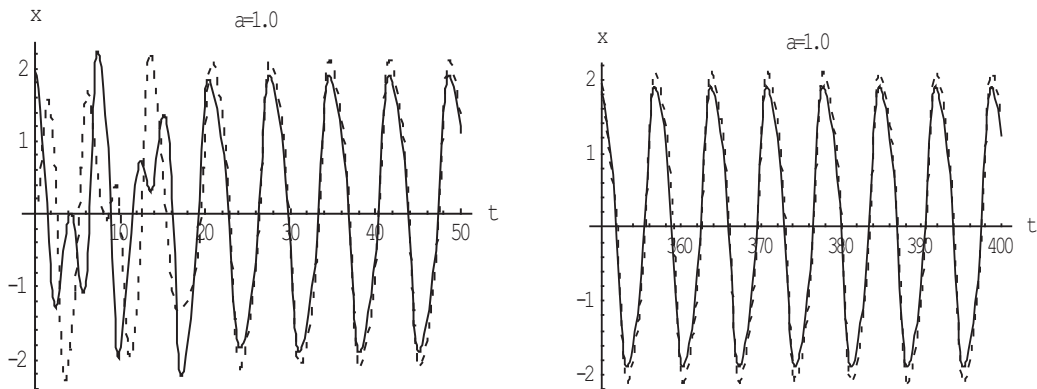
「カオスとは、保存量だけで座標系を構成することができない、直線群に引き伸ばす事が不可能な解軌道の無限の絡み合った〈分解不可能な〉曲線の束」[15] と言われている。この幾何学的なイメージから、カオス制御の至難さを示唆される。そこで、一歩下がって、カオスの辺縁に着目した所、有限な領域での2つの振動子の相互作用の引き込み現象を調べるうちに、カオス辺縁領域で、周波数の無段階に低減する現象が見出された。この現象は、系がもともと保有する「自己組織化」の機能の一つであろうと思われる。そのため、2つの振動子の引き込み現象によって目的とする振動子に対して周波数の無段階の低減が可能であると分かった。これは、頻脈の沈静化や乱脈の平常化をもたらし、結果として除細



(a) 第1の振動子の時系列



(b) 第2の振動子の時系列



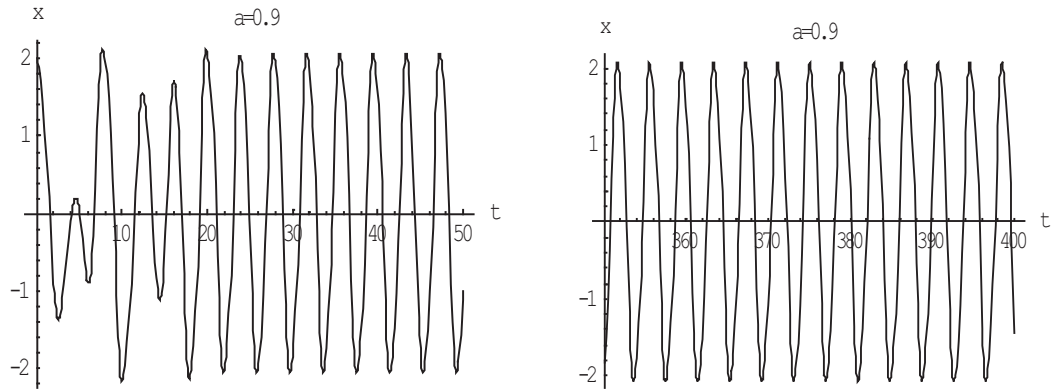
(c) 両者を重ね合わせたもの

Fig. 3.8: 引き込み現象 ($\alpha = 1$)

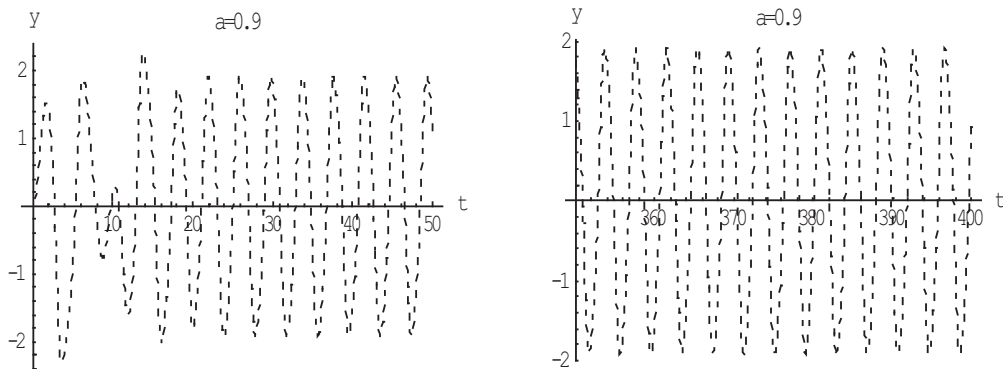
動に応用できる可能性が示唆された。以下に、数値実験結果を報告する。

4.2 頻脈の心電図を模擬した時系列信号波形の沈静化

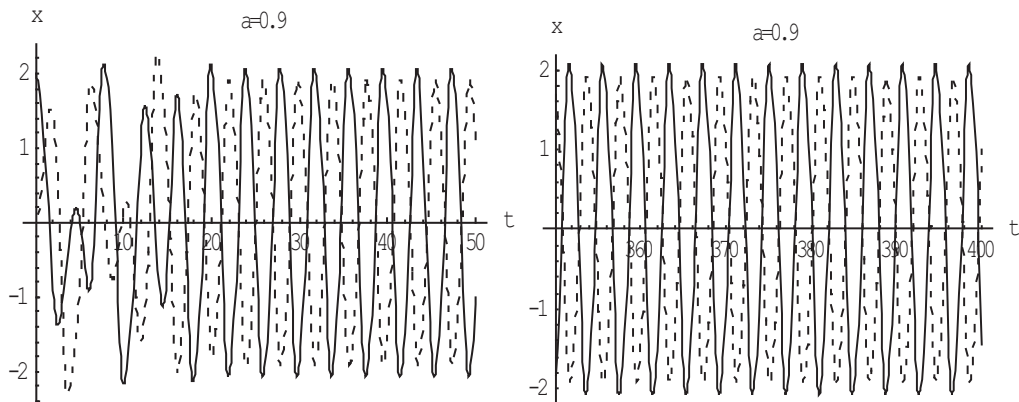
心電図波形を模擬する方法としては、ファンデルポール系がカオスに至る直前の位相空間における解軌道図を描き、その時系列信号の波形を用いた。その際、異常波形はファンデルポール系の微分方程式の非線形項の係数 ε 、外力項の振幅 B 、及び角周波数 ω を変化させる方法でこれを得た。



(a) 第1の振動子の時系列



(b) 第2の振動子の時系列



(c) 両者を重ね合わせたもの

Fig. 3.9: 引き込み現象 ($\alpha = 0.9$)

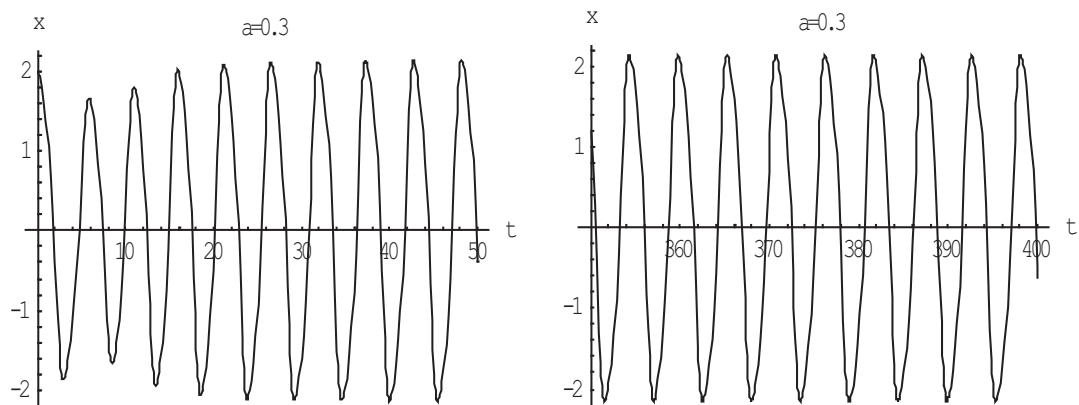
異常波形の例としては、時系列信号のなかで通常より異常に速い信号波形と、信号の周期が変化する波形を対象として選んだ。

$\varepsilon = 0.1$ 、 $\omega = 2.8$ の位相空間図を Fig. 4.1 に示した。

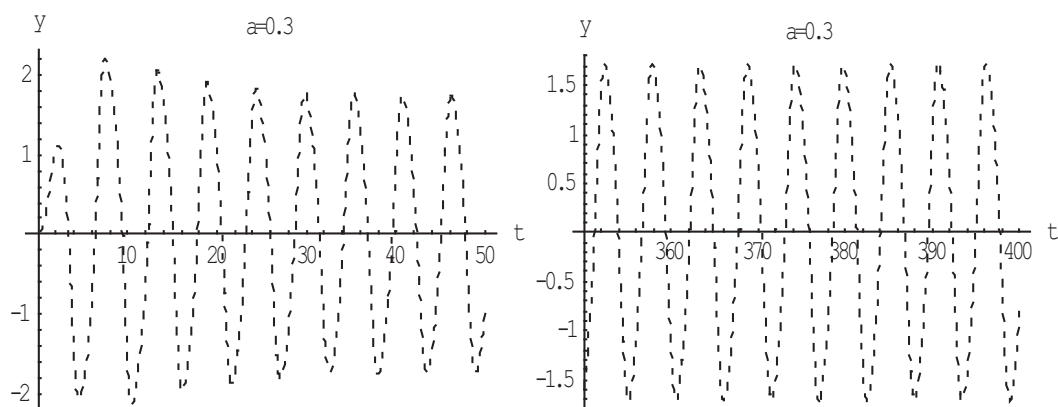
Fig. 4.1 では、解軌道が正常な一定のリミットサイクルにならずに、不安定であることを示している。

Fig. 4.1 から得られた時系列信号の $t = 0$ から $t = 100$ までの波形を Fig. 4.2 に示す。

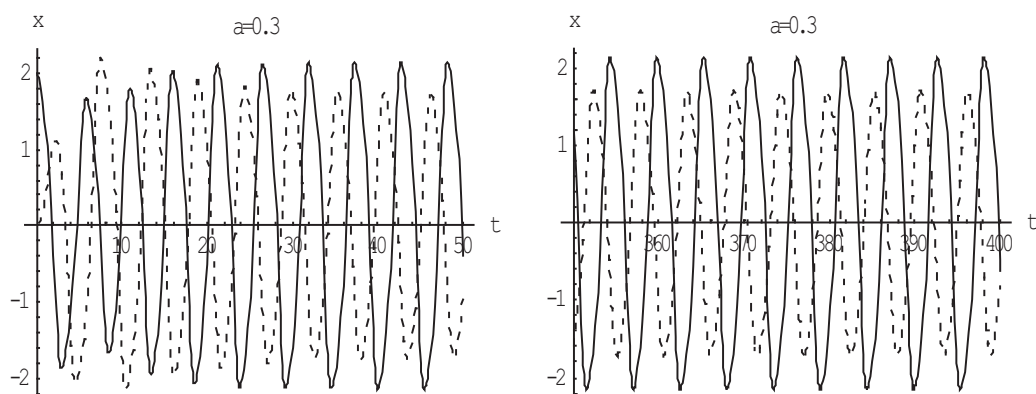
Fig. 4.2 の波形は、まだ不安定な時期であるので、安定した $t = 370$ から $t = 400$ の波形を Fig. 4.3 に示した。(なお、図における時間の単位は秒ではなく、規格化した無次元量である)



(a) 第1の振動子の時系列



(b) 第2の振動子の時系列



(c) 両者を重ね合わせたもの

Fig. 3.10: 引き込み現象 ($\alpha = 0.3$)

Fig. 4.2 の波形は、正常なリミットサイクルの時系列信号に比べて、異常に速い周期であることを示している。

次に、上記の波形に対して、周波数が比較的近く、リミットサイクルを形成する位相空間図を Fig. 4.4 に示した。

Fig. 4.4 の時系列信号を Fig. 4.5 に示す。

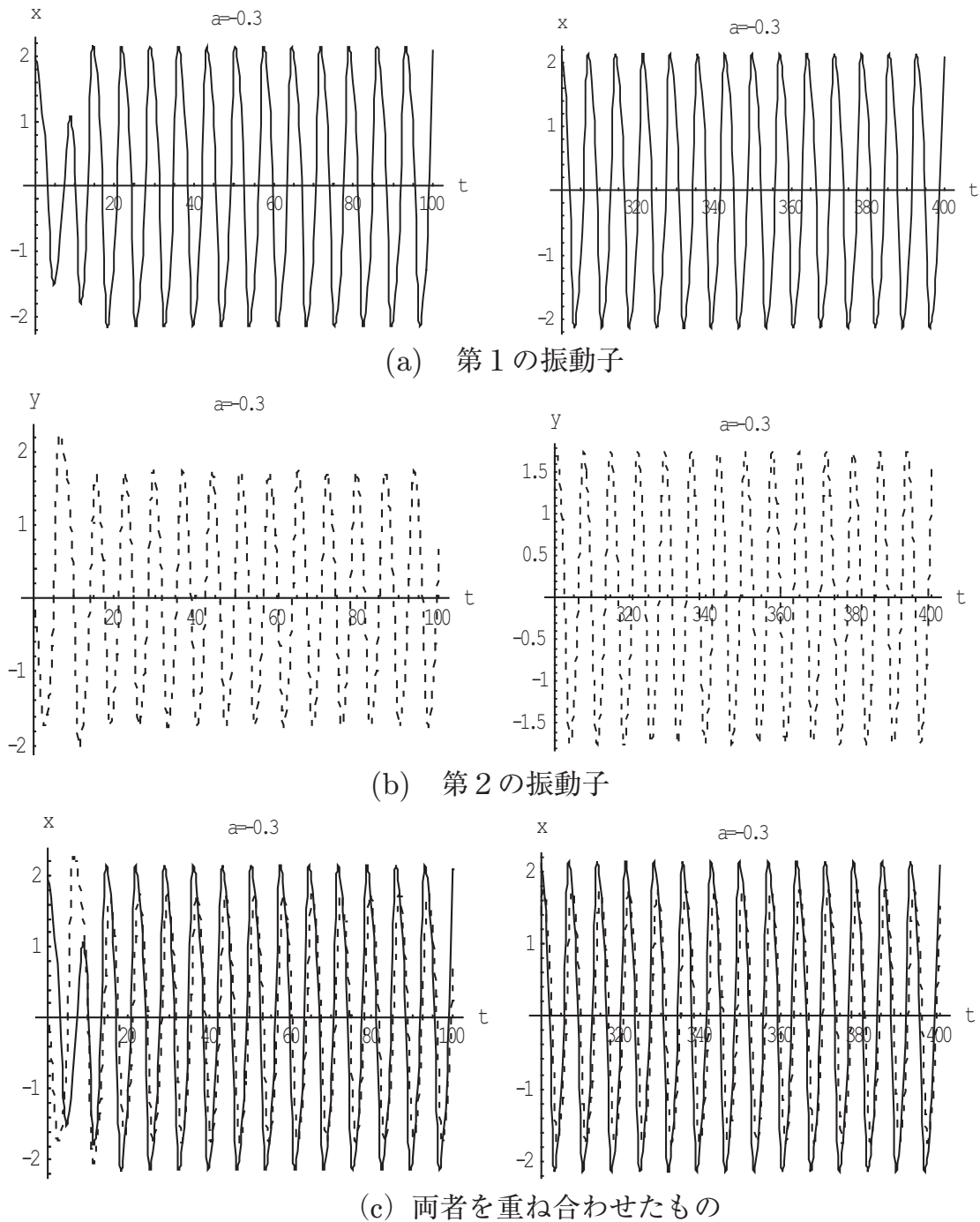


Fig. 3.11: 引き込み現象 ($\alpha = -0.3$)

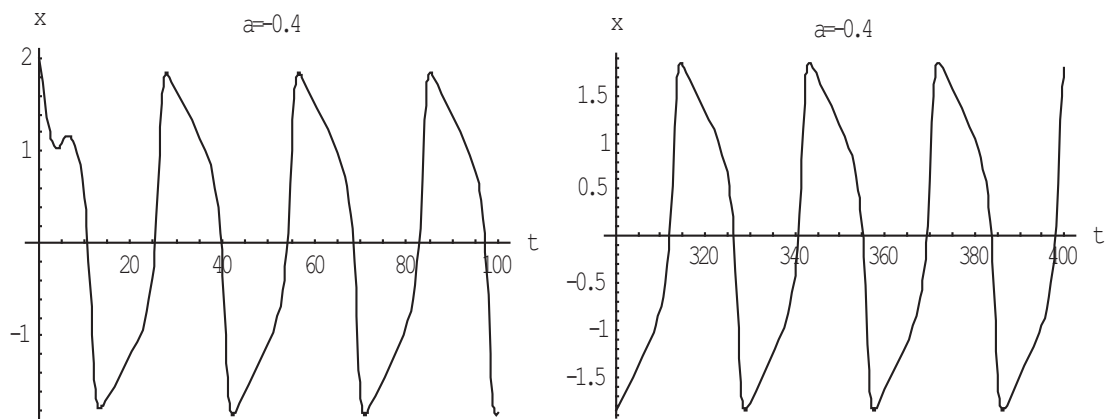
この2つの振動子 ($x(t), y(t)$) を、 $\alpha = -0.44$ で、相互作用させたときの $x(t)$ の波形を Fig. 4.6 に実線で示す。

相互作用後は周波数が低減しているのがわかる。一方、 $y(t)$ の波形を Fig. 4.7 に破線で示した。

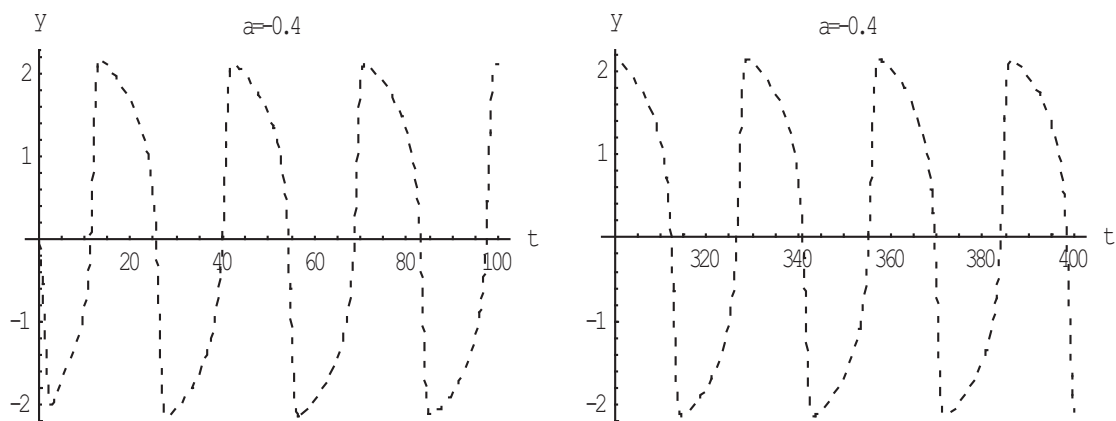
相互作用後は、 $x(t)$ と同様に周波数が低減している。

位相同期をみるために $x(t)$ と $y(t)$ を重ね合わせたものを Fig. 4.8 に示す。

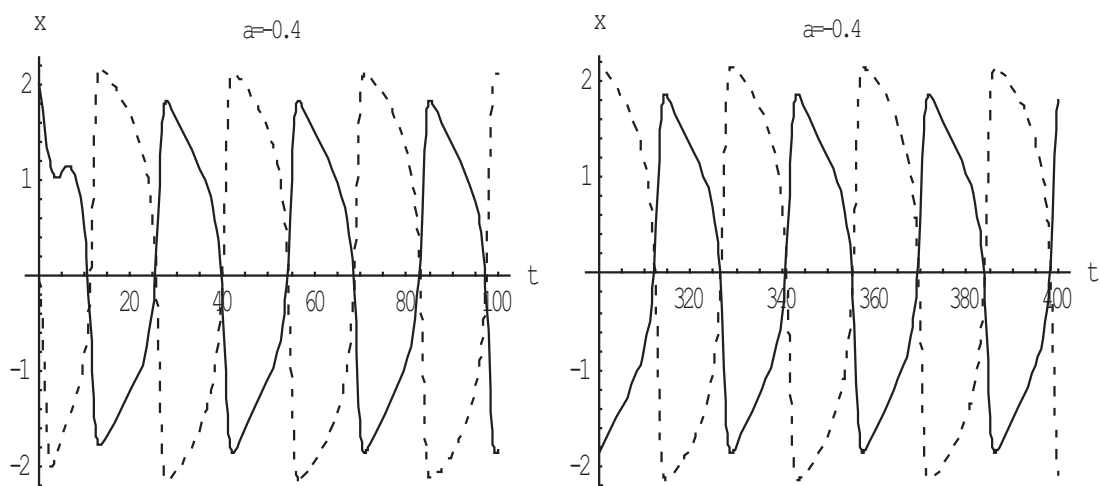
Fig. 4.8 では、初めはずれていた位相が次第に正相に同期する様子がみられる。



(a) 第1の振動子の時系列



(b) 第2の振動子の時系列



(c) 両者を重ね合わせたもの

Fig. 3.12: 引き込み現象 ($\alpha = -0.4$)

位相同期から見出された周波数低減現象を応用した除細動の可能性について

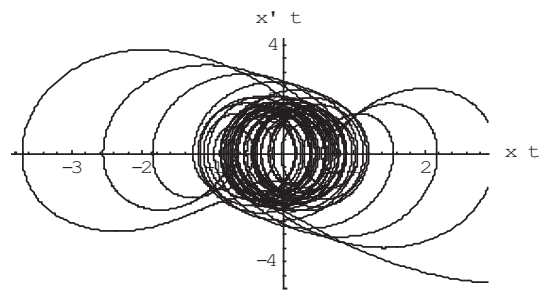


Fig. 4.1: 異常な位相空間図

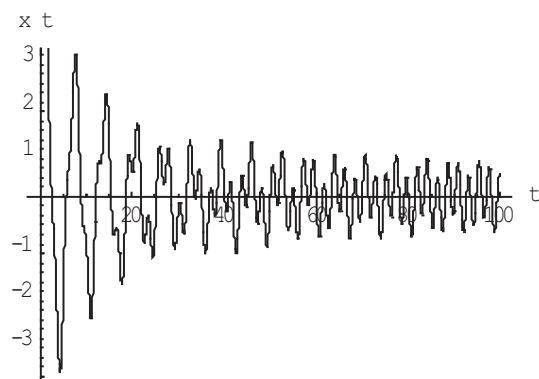


Fig. 4.2: 時系列信号の波形 ($t = 0 \sim 100$)

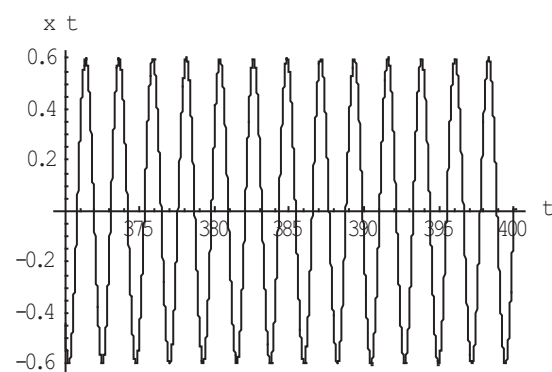


Fig. 4.3: 時系列信号の波形 ($t = 375 \sim 400$)

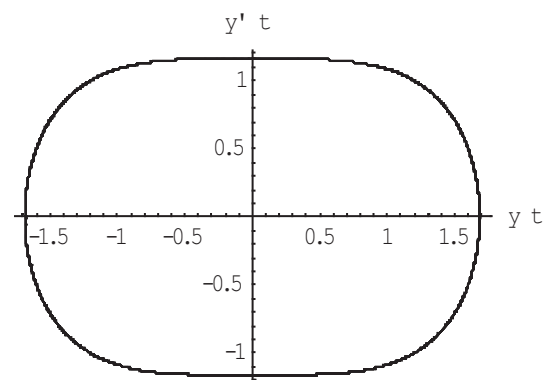


Fig. 4.4: リミットサイクルを形成する位相空間図

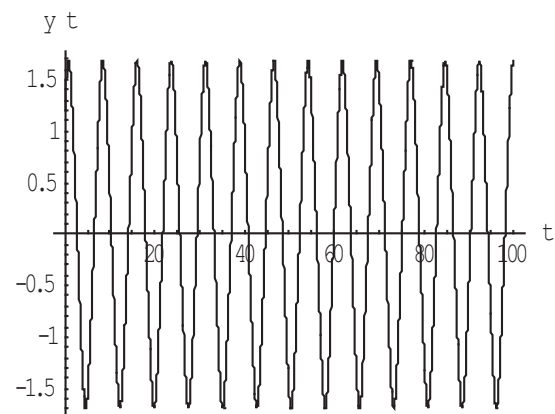


Fig. 4.5: どの時間帯でも比較的リズムの安定した波形

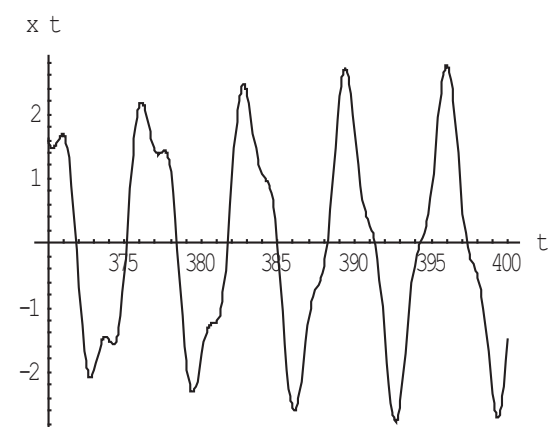


Fig. 4.6: 相互作用後の $x(t)$ の波形

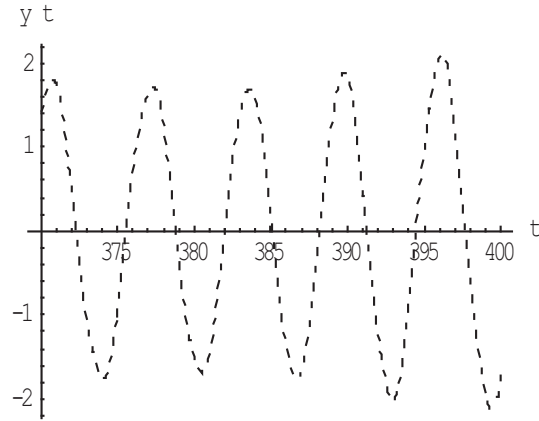


Fig. 4.7: 相互作用後の $y(t)$ の波形

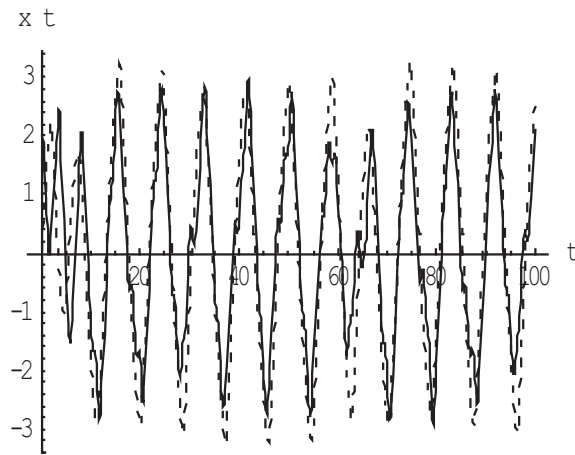


Fig. 4.8: 2つの振動子の位相同期図

4.3 乱脈の心電図を模擬した時系列信号波形の正常化

乱脈の例としては、時系列信号のなかで、振幅が乱れる波形を対象として選んだ。そのため、必ずしも周波数の早いことを条件としなかったので、周波数低減は2次的になった。この場合は、 α は負でなくとも所望の正常化が得られるので、 α が正の場合を検討した。

$\varepsilon = 0.1$ 、 $\omega = 0.48$ の位相空間図を Fig. 4.9 に示した。

Fig. 4.8 では、解軌道が一定のリミットサイクルに収束していない。

上図から得られた時系列信号の $t = 0$ から $t = 60$ までの波形を Fig. 4.10 に示す。

Fig. 4.9 の波形は、初期値の影響を受けているので、安定した $t = 70$ から $t = 130$ の波形を Fig. 4.11 に示した。

Fig. 4.11 の波形は、正常なリミットサイクルの時系列信号に比べて、振幅が乱高下していることを示している。

次に、上記の波形に対して、周波数が比較的近く、リミットサイクルを形成する位相空間図を Fig. 4.12 に示した。

Fig. 4.12 の時系列信号を Fig. 4.13 に示す。

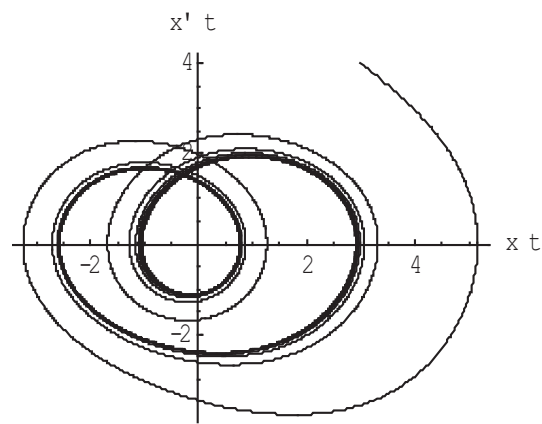


Fig. 4.9: 異常な位相空間図

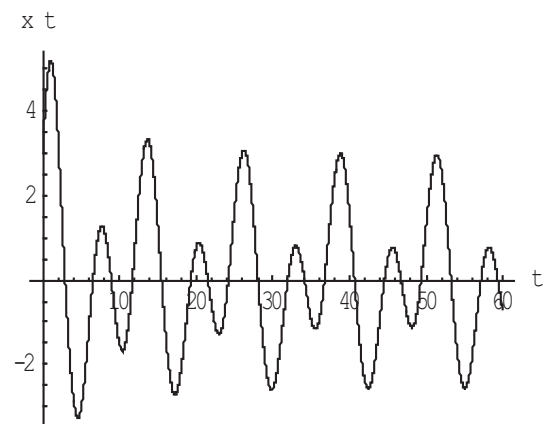


Fig. 4.10: 時系列信号の波形 ($t = 0 \sim 60$)

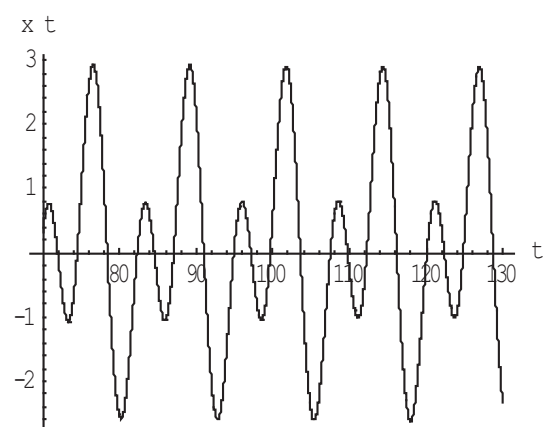


Fig. 4.11: 時系列信号の波形 ($t = 70 \sim 130$)

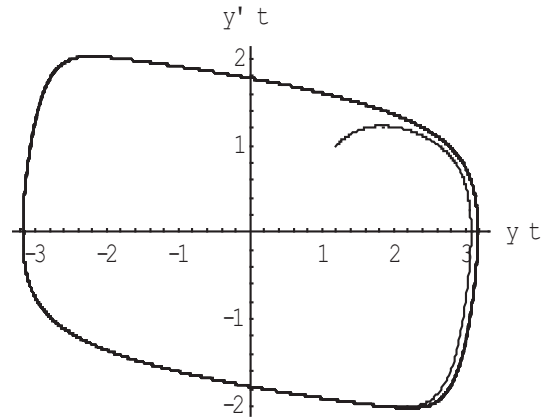


Fig. 4.12: リミットサイクルを形成する位相空間

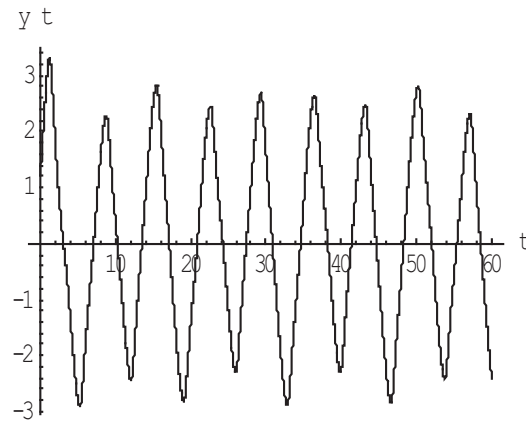


Fig. 4.13: 比較的振幅もリズムの安定した波形

この2つの振動子 $(x(t), y(t))$ を、 $\alpha = 3.5$ で、相互作用させたときの $x(t)$ の波形を Fig. 4.14 に実線で示す。

Fig. 4.14 では、Fig. 4.10 で見られた振幅の乱高下がある程度平均化されている。

一方、 $y(t)$ の波形を Fig. 4.15 に破線で示した。

位相同期をみるために $x(t)$ と $y(t)$ を重ね合わせたものを Fig. 4.16 に示す。

Fig. 4.16 では、正相で、元の乱高下していた信号が加えた正常な信号に同期している様子がみられる。

4.4 心室細動の心電図を模擬した時系列信号波形の沈静化

第4のファンデルポール系に外力項を付加した微分方程式において、4.2節の定義に従って、 $\varepsilon = 3.5$ 、 $B = 4.5$ 、 $\omega = 4.28$ の条件でカオスになる位相空間図を Fig. 4.17 に示した [10]。

このときの時系列信号を Fig. 4.18 に示す。

不規則な時系列信号のパワースペクトルを Fig. 4.19 に示す。

Fig. 4.19 では周波数成分が不規則に分布していて、カオス状態であることが分かる。

本研究では、「心室細動はカオスである」と言う説に基づいて、Fig. 4.18 の時系列信号を模擬的に心室細動時の心電図波形と見做し、これを第1の振動子とした。第2の振動子は、第1の振動子に対して、

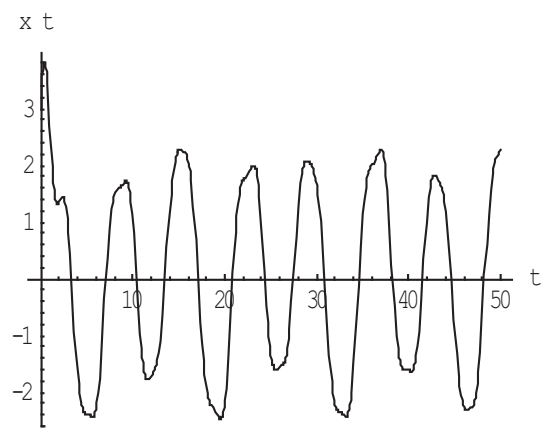


Fig. 4.14: 相互作用後の $x(t)$ の波形

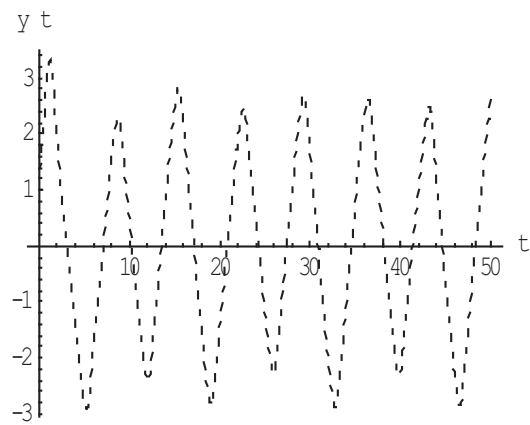


Fig. 4.15: 相互作用後の $y(t)$ の波形

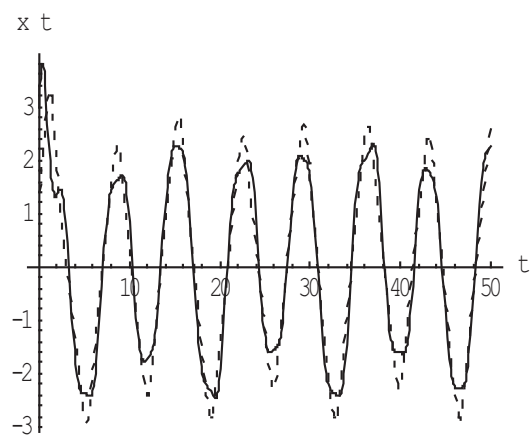


Fig. 4.16: 2つの振動子の位相同期図

位相同期から見出された周波数低減現象を応用した除細動の可能性について



Fig. 4.17: ストレンジアトラクターが見られる位相空間図

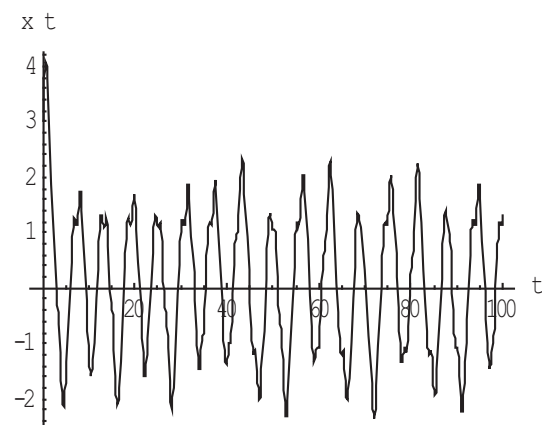


Fig. 4.18: 時系列信号の波形 ($t = 0 \sim 100$)

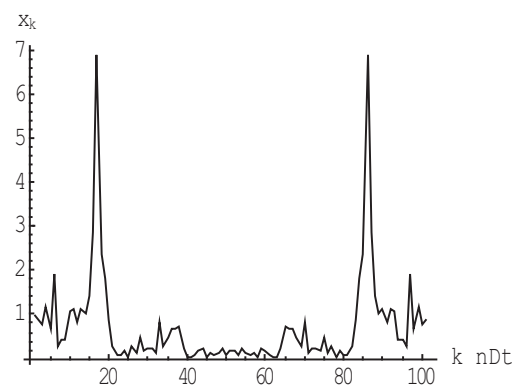


Fig. 4.19: 時系列信号のパワースペクトル

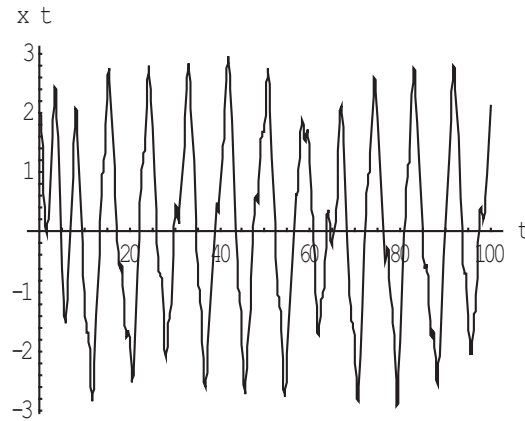


Fig. 4.20: 相互作用後の第 1 の振動子の時系列信号

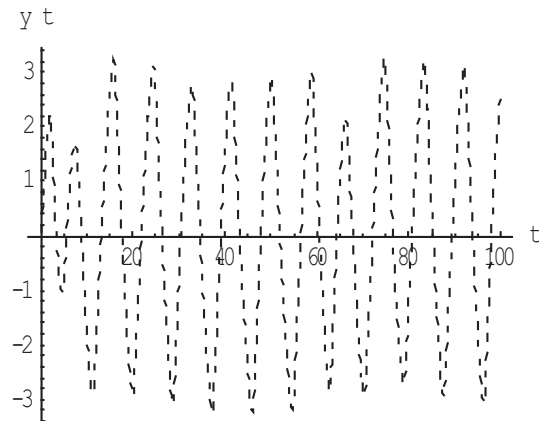


Fig. 4.21: 相互作用後の第 2 の振動子の時系列信号

角周波数が 0.91 だけ小さく、第 4 の形のファンデルポール微分方程式で記述されるものとした。従って、第 2 の振動子には外力項がないものとする。

そこで、相互作用係数 $\alpha = 1.0$ として、この二つの振動子を相互作用させたときの第 1 の振動子の時系列信号を Fig. 4.20 に示す。

Fig. 4.20 の波形は、元の Fig. 4.18 に比べて振幅の変動が減少しており、カオスの特徴である 2 峰性が殆ど消失している。

次に、第 2 の振動子の時系列信号を Fig. 4.21 に示す。

第 2 の振動子は、ほぼ振幅が一定で、周期も一定の正弦波に近い波形をしている。両者の位相同期を確認するために、Fig. 4.20 と Fig. 4.21 とを重ね合わせたものを Fig. 4.22 に示す。

Fig. 4.22 では 2 つの信号が同相に同期している。この位相同期現象のために、周期が早く、振幅が変動し、2 峰性の示した第 1 の振動子の異常波形が、加えられた比較的节奏的な第 2 の振動子に引きこまれて、沈静化している様子が観測される。

次に、相互作用係数 α が負の場合を調べてみる。 $\alpha = -0.3$ のとき、二つの振動子を相互作用させたときの第 1 の振動子の時系列信号を Fig. 4.23 に示す。

Fig. 4.23 の波形は、元の Fig. 4.18 に比べ周波数が約 1/2 に減少し、振幅の変動も減少しており、カオ

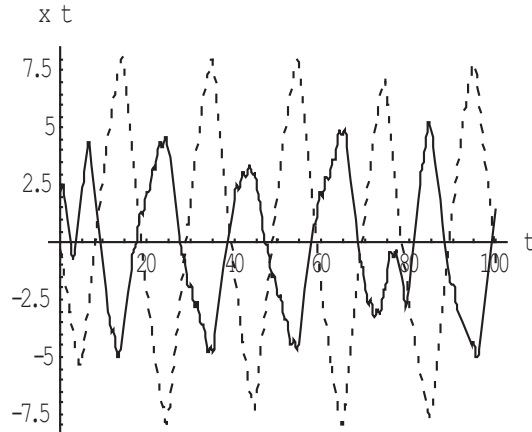


Fig. 4.22: 2つの信号の同期図

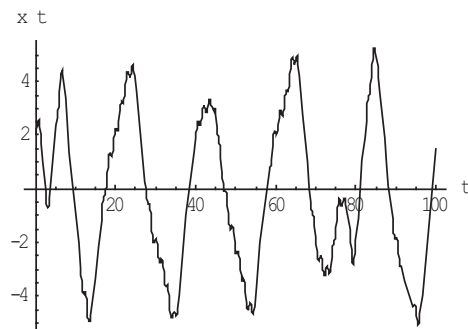


Fig. 4.23: 相互作用後の第1の振動子の時系列信号

スの特徴である2峰性も殆ど消失している。

次に、第2の振動子の時系列信号を Fig.4.24 に示す。

第2の振動子は、同様に相互作用後は周期が約 $1/2$ に減少しており、正弦波に近い波形を保っている。両者の位相同期を確認するために、Fig. 4.23 と Fig. 4.24 とを重ね合わせたものを Fig. 4.25 に示す。

Fig. 4.25 では2つの信号が逆相に同期している。この位相同期現象のために、第1の振動子の異常波形が、加えられた比較的节奏の正常な第2の振動子に引きこまれて、沈静化している様子が観測される。

因みに、相互作用後の第1の振動子のパワースペクトルを Fig. 4.26 に示す。

Fig. 4.26 は、Fig. 4.19 と比べると、分布が局在して、カオスではなくなっていることがわかる。

引き込み現象は、同種間のみならず、異種間のリズムでも起こるので、生体の異常リズムを沈静化する方法として、例えば、生体の循環器のリズムに近い周波数の緩和発振器を作り、これを生体の皮膚に密着させて、筋肉を媒体として位相同期現象を誘起させることが可能ではないかと思われる。

5 おわりに

振動子の引き込み現象を最初に物理学的に記述したのは17世紀オランダの物理学者 C. ホイヘンスで、あるとされている。ホイヘンスは世界一精確な振り子時計を作ったり、望遠鏡を手作りして土星の輪

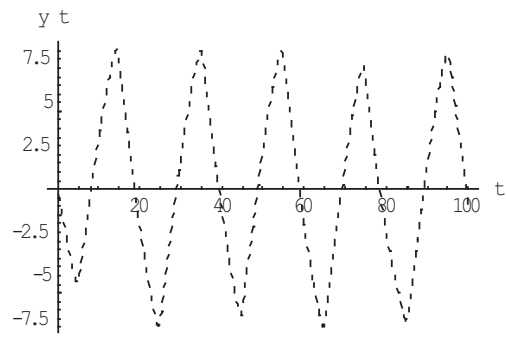


Fig. 4.24: 相互作用後の第2の振動子の時系列信号

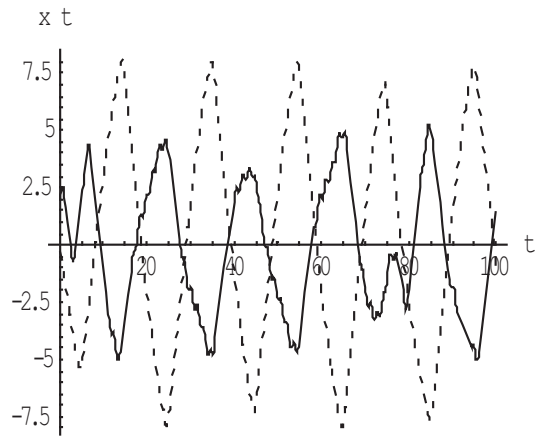


Fig. 4.25: 2つの信号の同期図

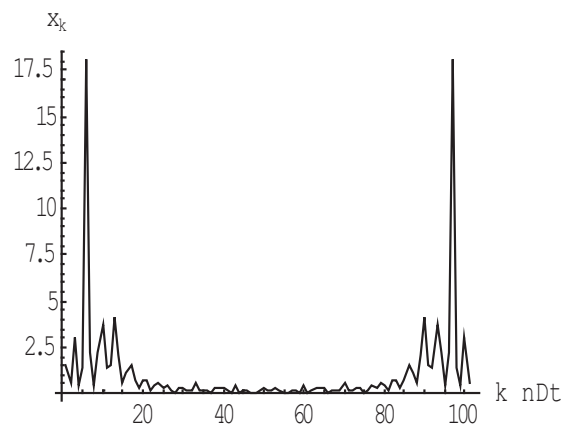


Fig. 4.26: 相互作用後の波形のパワースペクトル

を発見したり、「ホイヘンスの原理」と言われる光の反射・屈折の原理を発見している。

1665年に、ホイヘンスは父親への手紙のなかで、教会の壁に掛った2つの自作の時計が奇妙にも常に歩調を揃えてリズムを刻むのを発見したと書いている。複数のリズムの歩調が合うことを「引き込み」あるいは「同期」と言う。然し、一方の時計を15フィート離れた部屋の反対側の壁に取り付けると同期は破れた。このことから、ホイヘンスは、同期の原因は共通の壁を媒体として微弱な相互作用が働いたと考えた。

残念ながら、この素晴らしい発見は、2世紀も認められなかった。19世紀になって同じオランダ人の電気工学者ファンデルポールによって発振器上で「引き込み現象」の起こることが確認された。然し、[引き込み現象]が近代科学のなかで取り上げられることはなく、専門化して行く現代科学の中では馴染まなく、ごく最近まで正面から取り上げられることはなかった。

然し、皮肉なことに、1つの専門分野ではなく複数の分野に跨る「学際領域」と呼ばれる分野で、本格的な研究の機運がおこり、「引き込み現象」は、散逸力学系における時間領域の「自己組織化」と理解されるようになって、多くの新進の研究者が参加するようになった[14]。

また、「引き込み現象」の興味深い点は、時計と時計どうしのような同種のリズム現象ばかりでなく、全く種類の異なったリズム現象の間でも成立することである。例えば、地球の自転は約24時間であるが、地球上に住む生物はこのリズムに同期している。その証拠に現存する生物が24時間の概日周期（サーカディアンリズム）を持つのは、地球の自転リズムに共鳴した化学反応機構を持った生命体のみが選択されて進化し、現在に残ったと考えられているからである[6]。

1982年に、R. ベンズィらによって、氷河期の繰り返し周期を説明するモデルとして提唱されたミランコビッチサイクルに対して、このような地球上の現象は、太陽活動、地殻変動などの宇宙的な雑音強度によって起こるという「確率共鳴」と呼ばれる概念が提案された[16]。これは、引き込み現象が異種のリズム現象の間でも成立することから、生体にとっても起こり得ることである。このことは、本論文では全く扱えなかったが、今後の課題としたい。

本論は、その前提が、古い中国の伝統のなかで生き続けている「陰陽思想」の応用にあったので、そこで述べられている目にみえない「内相」を「位相同期現象」に素朴に結びつけ、ある種の「外形」とも言える「周波数の低減現象」を数値実験で示したものである。よって、本論の数学解析ソフトのマセマティカを用いて数値実験した手法は、最新の進んだ解析的な物理学理論[14]に基づいたものではなく、一時代前の位相同期現象を説明する初歩的な理論である。

現在では、位相同期現象に対する研究が非常に進んでいて、心室細動のようなカオスに対する引き込み現象を主として扱うならば、リミットサイクルになる周期振動子の結合系ではなく、カオス素子の結合系の数値モデルを用いるべきであると思われる[13]。

最後に、本論文が纏まるには理学部数学科の前田陽一教授より日頃から老体への温かいお労わりとご懇切な御指導を賜った。謹んで深く感謝申し上げます。

参考文献

- [1] Alan Turing: “The chemical basic of morphogenesis”, (1952)
- [2] A.I. ボロディン、A.S. プガイ編：「世界数学者人名事典」大竹出版（2004）
- [3] 日本数学会編集：[岩波数学辞典第4版]、岩波書店（2007）
- [4] 秋山茂明：私信（2013.0805）
- [5] 北畑裕之、吉川研一「化学・生物の世界のリズム」（蔵本由紀編「リズム現象の世界」第1章）東京大学出版会（2005）
- [6] 甲斐昌一：「生命におけるリズムと確率共鳴」（蔵本由紀編「リズム現象の世界」の第2章）東京大学出版会（2005）

- [7] 蔵本由紀:「新しい自然学—非線形科学の可能性」岩波書店 (2003)
- [8] 平井慶彦、南里憲三、窪田洋:「パルス信号の遅延機構から発生する仮想外力によって心室細動が誘発される可能性について」東海大学紀要理学部 **Vol. 49**, Mar. (2013), pp. 66–89
- [9] 蔵本由紀:「引き込み現象の数理」(蔵本由紀他「パターン形成」第5章) 朝倉書店 (1991)
- [10] 吉川研一:「非線形科学」学会出版センター (1993)
- [11] P.Bak: “The Devil’s staircase”, Phys. Today, **39**, (1986) pp. 12
- [12] 下條隆嗣:「シミュレーション物理学 6 カオス力学入門」近代科学社 (1992)
- [13] 藤坂博一:「カオス的リズムの同期・非同期現象とその数理」(蔵本由紀編「リズム現象の世界」の第5章) 岩波書店 (2005)
- [14] 蔵本由紀:「リズム現象と位相ダイナミクス」(蔵本由紀編「リズム現象の世界」第4章) 東京大学出版会 (2005)
- [15] 吉田善章:「非線形とは何か」岩波書店 (2008)
- [16] R.Benzi, S.Sutera, and A.Vulpini: J. Phys. A14 (1981) L453